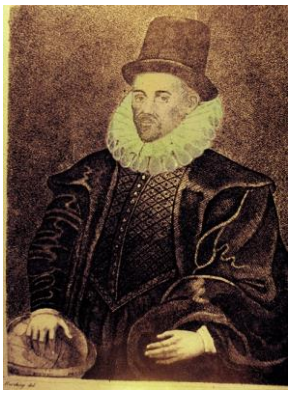
1 IL CAMPO ELETTROSTATICO

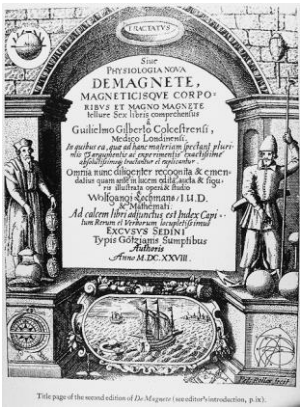
1.1 Proprietà delle cariche elettriche

La capacità di alcuni materiali come l'ambra, una resina naturale, o il vetro quando strofinati sulla lana di attrarre piccoli pezzi di carta era nota sin dall'antichità. Platone, nel 4° secolo a.C. considerava l'origine di tali effetti simile a quella dei fenomeni magnetici. Nel 1° secolo a.C. Lucrezio ipotizzava che la resina strofinata emette dei fluidi in grado di rarefare l'aria per cui l'aria più densa tende a spingere i corpi verso il vuoto parziale prodotto da tali fluidi. Plutarco, nel 1° secolo d.C. credeva che il fluido emesso dall'oggetto strofinato allontanasse l'aria intorno ad esso così, quando l'aria colpisce un corpo leggero posto nelle vicinanze vi rimbalza, risucchiando il corpo verso l'oggetto strofinato. Plutarco osservò inoltre che la natura di questi effetti doveva essere dissimile da quella dei fenomeni magnetici poiché mentre la magnetite sembrava attrarre il solo ferro, l'ambra strofinata attrae differenti oggetti purché leggeri.



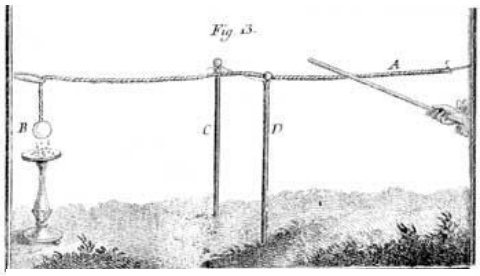
William Gilbert

All'inizio del 16° secolo si sapeva che, oltre all'ambra ed al vetro, altri materiali manifestano analoghi comportamenti. Nel 1600 William Gilbert, medico personale della regina Elisabetta I, nella sua opera, *De Magnete*, compilò una lista dei materiali allora noti che godono di tale capacità e introdusse l'aggettivo *elettrico* per indicare questa classe di fenomeni, dal nome greco dell'ambra, $\eta\lambda\varepsilon\kappa\tau\rho o\nu$; in particolare Gilbert formulò una teoria che giustificava questo fenomeno, detto di *elettrizzazione per strofinio*, ipotizzando che per effetto del riscaldamento dei corpi a causa dello strofinio, venga emesso dal corpo un fluido che ha la capacità di attrarre gli oggetti leggeri posti nelle vicinanze. Per provare tale ipotesi Gilbert effettuò molteplici esperimenti e verificò tra l'altro che la forza di attrazione elettrica diminuisce col crescere della distanza; tale proprietà fu giustificata affermando che il fluido elettrico tende a disperdersi con la distanza e di conseguenza i suoi effetti si affievoliscono allontanandosi dal corpo elettrizzato. Gilbert non cercò azioni elettriche di tipo repulsivo e probabilmente per tale motivo non le trovò e, inoltre, non osservò neanche effetti attrattivi reciproci, cioè egli assunse che i corpi elettrizzati sono in grado di attrarre degli oggetti ma tali oggetti non attraggono i corpi elettrizzati, ciò derivava probabilmente dal fatto che il principio di azione e reazione fu formulato da Newton circa 100 anni dopo. Le teorie che ritenevano l'aria il vettore del fenomeno elettrico furono smentite intorno al 1675 quando Robert Boyle, utilizzando una pompa a vuoto, provò che questi fenomeni persistono all'assenza dell'aria; Boyle inoltre verificò che l'azione elettrica sui corpi è reciproca. Riprendendo gli esperimenti di Gilbert, nel 1629 il gesuita ferrarese Niccolò Cabeo per primo osservò la presenza di effetti elettrici di tipo repulsivo.



Copertina della seconda edizione del *De Magnete* di W. Gilbert

Nel 1729 Stephen Gray, un pensionante di un istituto caritatevole inglese scoprì che il fenomeno dell'attrazione elettrica di piccoli corpi può manifestarsi all'estremità di una corda inumidita lunga varie decine di metri quando un corpo elettrizzato, come una bacchetta di vetro strofinato, viene posto a contatto con l'altra estremità. Circa sessanta anni prima il tedesco Otto von Guericke, borgomastro di Magdeburgo, utilizzando una



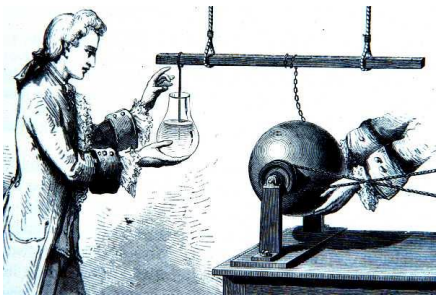
Esperimento di S. Gray sulla conduzione elettrica

rudimentale macchina elettrostatica da lui sviluppata, aveva osservato che dei pezzi di spago collegati a questa macchina si elettrizzano per tutta la loro lunghezza, tuttavia egli non dedusse come Gray la propagazione del fenomeno elettrico lungo gli spaghi. Gray inoltre scoprì che se la corda è sostenuta con fili metallici gli effetti elettrici cessano di essere trasmessi, mentre lo stesso non accade se le sospensioni sono fatte con cordicelle di seta, così dedusse che mentre i fili metallici disperdono le proprietà elettriche, lo stesso non accade per i fili di seta. Questa capacità fu descritta da un suo collaboratore, Jean Théophile Desaguliers introducendo la terminologia dei *conduttori* e degli *isolanti*.

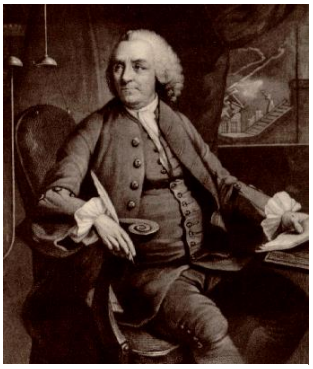
Nella prima metà del 18° secolo lo scienziato francese Charles François Cisternay Du Fay stimolato dai lavori di Gray iniziò una metodica attività di ricerca intorno alla fenomenologia elettrica e, partendo da un riesame storico dell'attività svolta dai suoi predecessori, mise in atto un preciso programma di ricerca. Attraverso tale studio Du Fay verificò che tutti i materiali, eccetto i metalli possono essere elettrizzati per strofinio, deducendo che l'elettricità è una proprietà della materia; come altri prima di lui, Du Fay notò che gli oggetti strofinati non sempre attraggono piccoli corpi ma, in certi casi li respingono. A partire da tale constatazione realizzò un esperimento in cui una sottile asta di legno imperniata come un ago magnetico, aveva fissata ad una estremità un pezzo di materiale resinoso elettrizzato; avvicinando a questo un altro pezzo dello stesso materiale elettrizzato osservava che il primo veniva respinto mentre un pezzo di vetro elettrizzato lo attraeva. Da qui Du Fay dedusse che devono esistere due tipi di elettricità che denominò *elettricità resinosa* ed *elettricità vitrea* e propose una teoria secondo la quale i corpi non elettrizzati hanno i due tipi di elettricità in uguale misura. Se due corpi posseggono lo stesso tipo di elettricità si respingono mentre se posseggono tipi diversi si attraggono. Infine verificò che i metalli e gli oggetti bagnati sono buoni conduttori del fenomeno elettrico mentre i materiali che si elettrizzano facilmente, come l'ambra o il vetro, non lo sono.

Charles François Cisternay Du Fay

Durante tutto il 18° secolo furono sviluppate molteplici macchine elettrostatiche e l'interesse verso questi effetti si estese rapidamente anche alla gente comune, così erano frequenti dimostrazioni pubbliche di tali fenomeni. Al di la dello spettacolo, l'attenzione degli scienziati era rivolta ai possibili impieghi di questi effetti e in questo periodo si ebbero i primi tentativi di applicazione dell'elettricità alla medicina. Probabilmente, nel tentativo di valutare gli effetti sulla salute dell'acqua elettrizzata, il canonico Ewald Jurgen von Kleist, a Wicewo, ora in Polonia, nel 1745 inserì un chiodo nel collo di una bottiglia riempita con acqua e con esso toccò il conduttore di una macchina elettrica in funzione. Poi, dopo aver interrotto il contatto sfiorò con l'altra mano il chiodo avvertendo un'intensa scossa. Nello stesso anno, indipendentemente, il ricercatore olandese Pieter Van Musschenbroek presso Leida, in Olanda, ripeté il medesimo esperimento e a questo dispositivo, in grado di immagazzinare il fenomeno elettrico, fu dato il nome di *bottiglia di Leida*. Tale dispositivo fu successivamente migliorato sostituendo l'acqua con dei fogli di materiale metallico disposti sia all'interno che all'esterno della bottiglia, ottenendo l'immagazzinamento dell'elettricità anche per alcuni giorni.


Carica di una bottiglia di Leida attraverso una rudimentale macchina elettrostatica.

Le pubbliche esibizioni del fenomeno elettrico attirarono l'attenzione di Benjamin Franklin nelle colonie dell'America del nord. Franklin ripeté molti degli esperimenti ormai ben noti



Benjamin Franklin

in Europa ma formulò una teoria dei fenomeni elettrici dissimile da quella di Du Fay. Egli ipotizzò che nello strofinio tra due corpi non vi sia creazione di elettricità ma ciò che accade è che uno dei corpi perde dell'elettricità che l'altro acquista; pertanto secondo Franklin c'è un solo tipo di elettricità anziché due. Franklin inoltre constatò che l'elettricità si dispone sui conduttori interno ed esterno della bottiglia di Leida in quantità uguali ma di segno opposto, ossia un conduttore presenta un eccesso e l'altro un difetto di elettricità. Attraverso tali esperimenti, Franklin giunse, inoltre, all'ipotesi che il fulmine ha natura elettrica e per provarlo caricò una bottiglia di Leida utilizzando l'elettricità immagazzinata nelle nubi durante un temporale facendo uso di un aquilone trattenuto da un filo metallico.

Riproduzione dell'esperimento di B. Franklin per lo studio dell'elettricità atmosferica

Nella seconda metà del 18° secolo la fenomenologia relativa all'elettrostatica poteva considerarsi nota; secondo Du Fay si riteneva che esistessero due tipi di cariche, una positiva e l'altra negativa oppure, come sosteneva Franklin, la carica è di un solo tipo e può essere aggiunta o sottratta ad un corpo inizialmente neutro. Era nota la conservazione della carica, cioè che la somma delle cariche positive e negative si mantiene costante. I materiali potevano essere distinti in conduttori, nei quali il fenomeno elettrico si sposta liberamente e in isolanti. Infine era noto che le cariche dello stesso tipo si respingono e le cariche di tipo diverso si attraggono e inoltre si sapeva che la forza di attrazione o di repulsione diminuisce di intensità con la distanza tra i corpi carichi.

Charles Augustin Coulomb

Nel 1788 Charles Augustin Coulomb, un ingegnere francese, servendosi di una bilancia a torsione da lui realizzata circa nove anni prima, verificò che la forza di attrazione o di repulsione tra due corpi carichi puntiformi dipende dall'inverso del quadrato della distanza tra i corpi. La bilancia di torsione è costituita da una leggera sbarretta isolante alle cui estremità sono collocate due uguali sferette metalliche; questa sbarretta è sospesa tramite un lungo filo sottile e, in assenza di forze, la sbarretta si dispone in una certa posizione di equilibrio. Se una delle due sferette viene caricata ed avvicinata ad un'altra pure carica, la forza elettrica agente sulla sferetta mobile determinerà la rotazione della sbarretta fino a quando la torsione del filo equilibrerà la forza agente. Siccome il filo è sottile, l'azione di una debole forza sulla sferetta mobile è in grado di determinare una notevole deviazione della sbarretta rispetto alla posizione di equilibrio originaria e l'angolo di rotazione risulterà proporzionale a tale forza. Utilizzando diverse quantità di carica e variando la distanza tra le sferette Coulomb verificò la legge ora nota col suo nome.

Bilancia a torsione per la verifica della legge di Coloumb

A partire dalla formulazione della legge di Coulomb la fenomenologia elettrica nota divenne classificabile attraverso uno schema teorico di carattere generale e, contemporaneamente, si aprirono nuove direttrici di indagine guidate da tale schema.

Con la scoperta dell'elettrone attraverso la determinazione del rapporto tra la sua carica e la sua massa da parte di Joseph John Thomson nel 1887 e l'identificazione dell'atomo come componente fondamentale della materia fu possibile fornire una spiegazione della fenomenologia dell'elettrizzazione per strofinio. In corrispondenza dello strofinio della bacchetta con un panno di lana alcuni elettroni della bacchetta sono strappati dall'azione abrasiva e

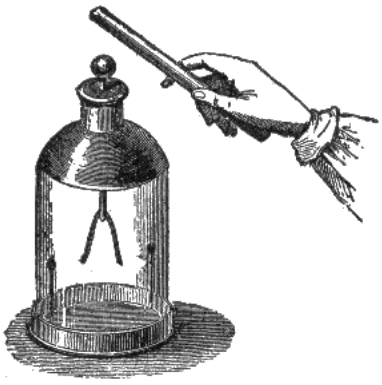
vengono trasferiti al panno. Pertanto la bacchetta acquista una carica netta diversa da zero. Nel 1909 il fisico americano Robert Millikan verificò sperimentalmente che la carica elettrica si presenta sempre in multipli interi di un'unità fondamentale di carica *e*, ovvero la carica che si osserva risulta quantizzata, esistendo sempre in quantità discrete. Pertanto la carica *q* di un corpo si può sempre esprimere come $\pm Ne$, dove *N* è un numero intero. In particolare, un elettrone ha carica $-e$ mentre un protone ha carica $+e$; un atomo neutro contiene lo stesso numero di elettroni e di protoni.

Alla luce di queste considerazioni possiamo riassumere brevemente le proprietà delle cariche elettriche stazionarie:

1. Ci sono due tipi di cariche elettriche, con la caratteristica che cariche diverse si attraggono mentre cariche uguali si respingono.
2. La carica si conserva.
3. La carica è quantizzata.
4. La forza tra cariche puntiformi è inversamente proporzionale al quadrato della mutua distanza.

Il motivo per il quale originariamente si riteneva che i corpi metallici non potessero essere caricati, ad esempio per strofinio, è dovuto al fatto che in tali materiali la carica si distribuisce rapidamente in tutto il corpo; pertanto la carica che si determina sul corpo fluisce rapidamente verso la terra attraverso la mano dell'operatore. Solo nel 1778 il fisico olandese Jan Ingenhousz mostrò che interponendo un apposito sostegno isolante tra il metallo e la mano viene impedito questo flusso, consentendo la conservazione della carica sul corpo metallico. Così vetro e resina sono detti isolanti: In tali materiali la carica viene a localizzarsi in una regione del corpo e non si sposta; viceversa, i metalli sono conduttori: la carica tende a ridistribuirsi rapidamente nel corpo. Collegando attraverso un filo conduttore un materiale conduttore a terra (*messa a terra*) si agevola il flusso delle cariche verso tale corpo che agisce, quindi, come una sorta di serbatoio infinito di carica.

Un procedimento alternativo all'elettrizzazione per strofinio, correttamente interpretato da Franz Ulrich Theodor Aepinus nel 1759, prende il nome di *elettrizzazione per induzione*. Avvicinando un corpo carico, ad esempio negativamente, ad una sfera conduttrice isolata neutra, la regione della sfera più prossima al corpo carico si carica di segno opposto mentre quella più lontana si carica dello stesso segno (di fatto gli elettroni della sfera neutra si spostano lasciando scoperta della carica positiva). Se la sfera, anziché essere isolata, è connessa a massa, alcuni elettroni fluiscono verso la massa, per cui, interrompendo il collegamento, la sfera resta carica positivamente. Allontanando successivamente il corpo carico, la carica della sfera si distribuisce uniformemente per effetto della mutua repulsione delle cariche uguali.



Elettroscopio a foglie d'oro. Si compone di due sottili lamine d'oro sospese da un asta di ottone all'interno di un contenitore di vetro. Viene utilizzato per rilevare la presenza ed il segno di una carica elettrica. L'elettrizzazione dell'asta viene segnalata dalla divergenza delle lamine.

Infine un isolante può caricarsi per *polarizzazione*. Nelle molecole neutre i baricentri delle cariche positive e negative in genere coincidono; tuttavia in prossimità di un corpo carico i baricentri si spostano, caricando in modo non uniforme la molecola. Ciò determina la formazione di una carica indotta sulla superficie dell'isolante. Una interpretazione efficace di tale fenomeno fu proposta nel 1837 dal fisico inglese Michel Faraday.

1.2 La legge di Coulomb

La legge che esprime l'intensità della forza elettrica che si esercita fra due particelle puntiformi cariche, rispettivamente di carica q_1 e q_2, a riposo, poste alla mutua distanza r è data dalla relazione:

$$F = k\frac{|q_1||q_2|}{r^2},$$

tale formula esprime la *legge di Coulomb*. La limitazione di tale legge alle sole cariche puntiformi fu mostrata circa sessanta anni dopo la sua originaria formulazione, da William Thomson. L'unità di misura della carica è il *coulomb* (*C*); per motivi di carattere pratico tale unità è definita come la carica che scorre in un *secondo* attraverso un conduttore percorso dalla corrente di un *ampere* ($1C = 1A \cdot 1s$). La costante k che compare nell'espressione della legge di Coulomb vale:

$$k \approx 8.98 \times 10^9 \frac{N\,m^2}{C^2}$$

e, per definizione risulta:

$$k \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0},$$

dove ε_0 prende il nome di *costante dielettrica del vuoto* ed è pari a:

$$\varepsilon_0 \approx 8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N\,m^2}.$$

La carica libera più piccola è quella dell'elettrone e risulta:

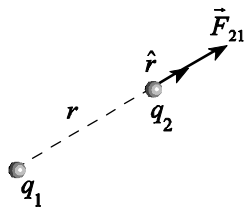
$$|e| \approx 1.60 \times 10^{-19}\,C$$

così $1C$ è la carica di circa 6.2×10^{18} elettroni.

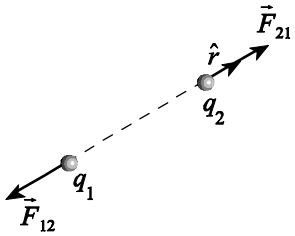
Esempio: Negli esperimenti didattici di elettrostatica le cariche coinvolte sono usualmente molto minori di 1 *C*, ad esempio dell'ordine di 1 μC, che corrisponde alla carica di circa 6.2×10^{12} elettroni. Ad esempio, se questa carica viene fornita ad un corpo di rame, siccome in 1 cm^3 di rame ci sono circa 10^{23} elettroni, la carica di 1 μC è determinata dalla variazione di un elettrone ogni 16˙000 circa. Nondimeno, dalla legge di Coulomb segue che due corpi puntiformi che posseggono tale carica interagiscono con una forza di circa 90 *N* quando sono posti alla distanza di 1 *cm*.

Vettorialmente, se $\hat{r}$ rappresenta il versore diretto da q_1 a q_2, allora la forza elettrica esercitata su q_2 per effetto di q_1 è (si veda la figura):

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r}, \qquad (1.1)$$

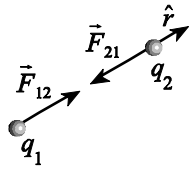


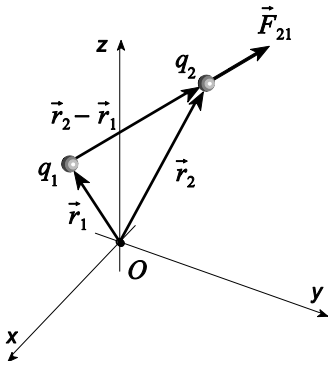
inoltre dalla terza legge di Newton segue che la forza agente su q_1 per effetto di q_2 è:



$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\left(-\hat{r}\right) = -\vec{F}_{21},$$

essendo $\hat{r}' = -\hat{r}$ (si veda la figura). Nel sistema di riferimento indicato in figura, l'espressione della forza elettrica esercitata su q_2 per effetto di q_1 si indica come:





$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^2}\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^3}.$$

Se il sistema è costituito da più cariche, la forza agente su ciascuna di esse è pari alla somma vettoriale delle forze esprimibili attraverso la relazione (1.1), dovute ad ognuna delle altre cariche del sistema; cioè la forza elettrica obbedisce al *principio di sovrapposizione*.

1.3 Il campo elettrico

L'espressione (1.1), analogamente a quella della forza gravitazionale che descrive l'interazione tra due masse puntiformi, sottintende che l'azione che si esercita tra due corpi carichi si manifesta direttamente e istantaneamente senza alcun meccanismo di mediazione (*azione a distanza*). Nel 1846 Faraday, riprendendo le idee del gesuita slavo Rudjer Boscovich, ipotizzò che le cariche riempissero lo spazio circostante con un'entità alla quale attribuì il nome di *campo*. Pertanto in un sistema di cariche elettriche, una carica contribuisce al campo in tutto lo spazio e, allo stesso tempo, è sensibile al campo risultante di tutte le altre cariche.

Si definisce vettore *campo elettrico* $\vec{E}$ il rapporto tra la forza $\vec{F}$ che agisce su una carica di prova positiva q_0 ed il valore di tale carica:

$$\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}}{q_0}, \tag{1.2}$$

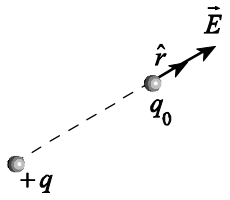
questa grandezza si misura in N/C. La carica di prova q_0 deve essere sufficientemente piccola da non perturbare la distribuzione di carica che genera il campo; così, a rigore, $\vec{E}$ va definito come:

$$\vec{E} \equiv \lim_{q_0 \to 0}\frac{\vec{F}}{q_0},$$

sebbene il limite $q_0 \to 0$ risulti fisicamente privo di senso poiché la carica più piccola ottenibile è quella dell'elettrone. Assegnata una carica puntiforme q posta a distanza r dalla carica di prova q_0, dalla (1.1) si ha:

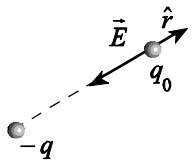
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}\hat{r}\,,$$

così dalla relazione (1.2) segue che il campo elettrico prodotto dalla carica puntiforme q è dato da:



$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}\,,$$

(si veda la figura in cui è mostrato il vettore campo elettrico prodotto in corrispondenza di una carica di prova da una carica puntiforme positiva, in alto, e negativa, in basso).



Come conseguenza del principio di sovrapposizione, se $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$, ..., $\vec{E}_N$ sono i campi prodotti da N cariche in un certo punto dello spazio, allora il campo complessivo in tale punto vale:

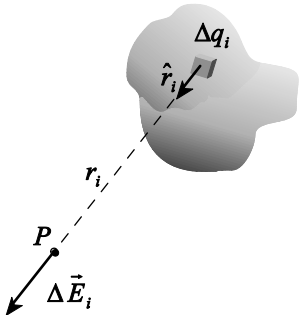
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_N\,.$$

In particolare, per un sistema di N cariche puntiformi q_1, q_2, ..., q_N, poste rispettivamente alle distanze r_1, r_2, ..., r_N dal punto in cui è stata posta la carica di prova, si ha:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i^2}\hat{r}_i\,.$$

1.4 Distribuzioni continue di carica

Qualora la separazione fra le singole cariche di un certo insieme è molto piccola rispetto alla distanza dal punto in cui si vuole calcolare il campo elettrico, è possibile considerare tale insieme come una distribuzione continua di carica. Consideriamo pertanto una carica Q situata in una certa regione dello spazio e valutiamo il campo elettrico prodotta da essa in un punto P. Il contributo al campo dell' $i-$esimo elemento di carica Δq_i, delle N cariche in cui è stata ripartita la distribuzione di carica Q, è:



$$\Delta\vec{E}_i \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta q_i}{r_i^2}\hat{r}_i\,,$$

dove r_i è la distanza da P dell'elemento di carica considerato. In virtù del principio di sovrapposizione, il campo totale prodotto dall'intera distribuzione di carica vale:

$$\vec{E} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{\Delta q_i}{r_i^2}\hat{r}_i$$

Se il numero di elementi in cui è ripartita la distribuzione è fatto crescere, la separazione fra tali elementi diventa piccola rispetto alla distanza dal punto P e la distribuzione può ritenersi continua; così, nel limite il cui numero N è fatto tendere all'infinito, si ha:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \lim_{\Delta q_i \to 0} \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \hat{r}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_Q \frac{dq}{r^2} \hat{r} ,$$

dove l'integrazione è estesa a tutta la carica Q che costituisce la distribuzione. Allo scopo di poter calcolare tale integrale, può essere opportuno introdurre il concetto di *densità di carica*, in maniera da convertirne il dominio di integrazione in un domino geometrico. In particolare, se la carica è distribuita in un volume si definisce:

$$\rho \equiv \frac{dq}{dV} ,$$

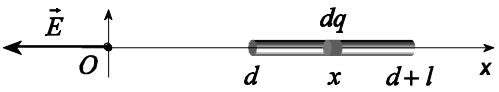
che prende il nome di *densità di carica volumetrica* e si misura in C/m^3 ; se è distribuita su di una superficie:

$$\sigma \equiv \frac{dq}{dS} ,$$

che prende il nome di *densità di carica superficiale* e si misura in C/m^2 ; infine, se la carica è distribuita lungo una linea si definisce:

$$\lambda \equiv \frac{dq}{dl} ,$$

che prende il nome di *densità di carica lineare* e si misura in C/m . Qualora una carica Q è uniformemente distribuita in un volume V o su di una superficie S o lungo una linea l, si ha, rispettivamente, $\rho = Q/V$ o $\sigma = Q/S$ o $\lambda = Q/l$.



Esempio: (*Campo elettrico prodotto da una bacchetta carica*). Consideriamo una bacchetta di lunghezza l lungo la quale è uniformemente distribuita una carica Q con densità λ. Stabiliamo l'intensità del campo elettrico in un punto situato lungo l'asse della barretta, ad una distanza d da un estremo. Consideriamo un'ascissa con origine nel punto O in cui si vuole determinare il campo. All'elemento infinitesimo dx della sbarretta, posto a distanza x dall'origine, corrisponde una carica (si veda la figura):

$$dq = \lambda\, dx$$

così il campo elettrico nel punto O dovuto a tale elemento vale:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{x^2} \left(-\hat{x}\right) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda\, dx}{x^2} \hat{x} ,$$

essendo $d\vec{E}$ orientato nella direzione opposta dell'asse x. Integrando questa espressione tra d e $d+l$ si ha:

$$\vec{E} = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_d^{d+l} \frac{dx}{x^2} \hat{x} = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{x} \right]_d^{d+l} \hat{x} = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+l} \right) \hat{x} = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{l}{d\left(d+l\right)} \hat{x} ,$$

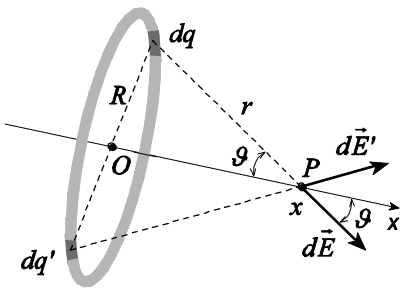
e, in modulo:

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{l}{d\left(d+l\right)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{d\left(d+l\right)},$$

poiché, essendo la carica Q uniformemente distribuita lungo la bacchetta, di ha $\lambda l = Q$. Si osservi che, a grande distanza dalla bacchetta, ovvero per $d \gg l$, risulta:

$$E \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{d^2},$$

cioè, a grande distanza la bacchetta è assimilabile ad una carica puntiforme.



Esempio: (*Campo elettrico prodotto da un anello carico*). Consideriamo l'anello di figura, di raggio R lungo il quale è uniformemente distribuita la carica Q. Ci proponiamo di stabilire l'intensità del campo elettrico su un punto situato sull'asse dell'anello. Consideriamo un'ascissa x coincidente con l'asse e con origine O nell'intersezione tra tale asse ed il piano dell'anello. Se il punto P è situato a distanza x dall'origine, il campo elettrico dovuto ad un elemento di carica dq sull'anello risulta:

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}$$

dove r è la distanza della carica infinitesima dq dal punto P. Il vettore $d\vec{E}$ può essere decomposto in una componente diretta lungo l'asse ed una perpendicolare a questo, così, poiché per ogni elemento dq ce n'è un altro dq' che genera un campo $d\vec{E}'$ la cui componente normale all'asse è opposta a quella di $d\vec{E}$, il campo in P risulterà dovuto alla sola componente di $d\vec{E}$ diretta lungo l'asse. Siccome:

$$r = \left(x^2 + R^2\right)^{1/2},$$

$$\cos\vartheta = \frac{x}{r},$$

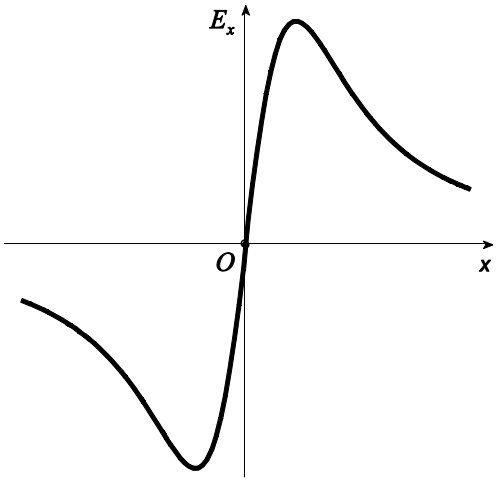
si ha:

$$dE_x = dE\cos\vartheta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{x^2+R^2}\frac{x}{\left(x^2+R^2\right)^{1/2}} =$$

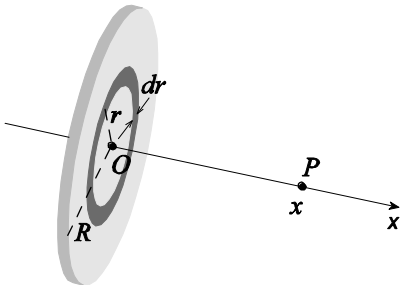
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}dq;$$

integrando infine su q si ha:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}\int_Q dq = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}.$$



In figura è mostrato l'andamento del campo elettrico lungo l'asse x.



Esempio: (*Campo elettrico prodotto da un disco carico*). Consideriamo un disco di raggio R sul quale risulta uniformemente distribuita una carica Q con densità superficiale σ. Stabiliamo il campo elettrico in corrispondenza di un punto posto sull'asse. Consideriamo l'ascissa indicata in figura, con origine nell'intersezione tra il piano del disco e l'asse, e sia x la coordinata del punto P. Consideriamo inoltre un anello di raggio r ($r < R$) e spessore dr; poiché l'area di questo anello è $2\pi r\,dr$, la carica dq che è contenuta in esso vale:

$$dq = 2\pi\sigma r\,dr.$$

Dal risultato dell'esempio precedente segue che il campo prodotto da tale distribuzione è:

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{\left(x^2+r^2\right)^{3/2}}dq = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{\left(x^2+r^2\right)^{3/2}}2\pi\sigma r\,dr = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\frac{r}{\left(x^2+r^2\right)^{3/2}}dr\,.$$

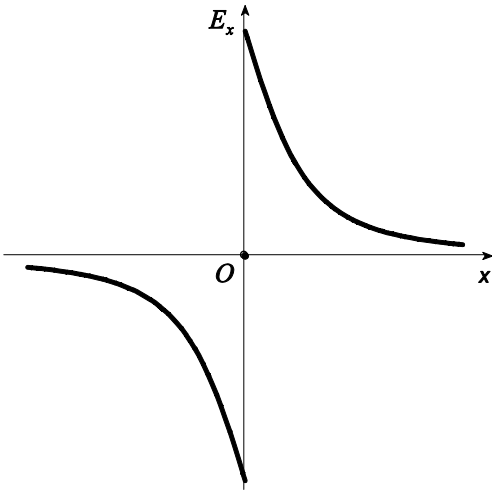
Per ottenere il campo in P integriamo da 0 a R:

$$E = \frac{\sigma|x|}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r}{\left(x^2+r^2\right)^{3/2}}dr\,,$$

ponendo $\xi \equiv x^2+r^2$ si ha $r\,dr = d\xi/2$ così, sostituendo segue:

$$E = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\frac{1}{2}\int_{x^2}^{x^2+R^2}\xi^{-3/2}d\xi = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\frac{1}{2}\left[\frac{\xi^{-1/2}}{-1/2}\right]_{x^2}^{x^2+R^2} =$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{x}{\left(x^2+R^2\right)^{1/2}}\right],$$



(si veda la figura). Si noti che, nell'espressione precedente, facendo tendere $x \to 0$ o $R \to \infty$ si ottiene:

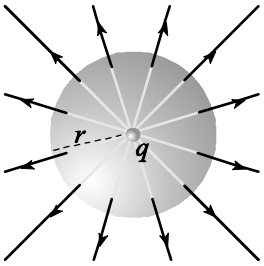
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,,$$

tale relazione rappresenta il campo elettrico prodotto da una distribuzione di carica piana di estensione infinita.

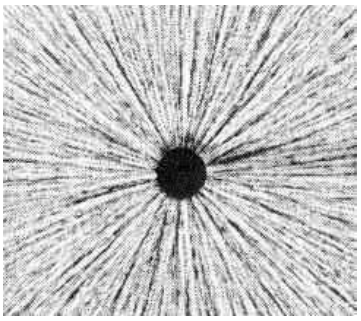
1.5 Linee di forza del campo elettrico

Il concetto di linee di forza fu introdotto da Faraday per permettere una efficace rappresentazione del vettore campo elettrico nello spazio (si veda l'Appendice B). Le regole per disegnare le linee di forza del campo elettrico per una distribuzione di carica sono:

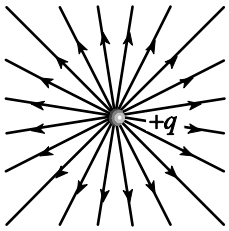
1. Le linee di forza devono avere origine dalle cariche positive e terminare sulle cariche negative o all'infinito qualora il sistema abbia un eccesso di carica.
2. Il numero di linee di forza che entrano o escono da una carica è proporzionale alla carica.
3. Due linee di forza non si possono incrociare.



Per verificare che queste regole di rappresentazione del campo elettrico attraverso le linee di forza sono in accordo con la legge di Coulomb, consideriamo una sfera di raggio r concentrica con una carica q (si veda la figura). Per simmetria il campo elettrico avrà la stessa intensità su tutti i punti della sfera. Il numero N di linee che escono dalla carica è pari a quello delle linee che entrano nella superficie sferica,



Rappresentazione delle linee di forza del campo elettrico prodotto da una carica puntiforme.

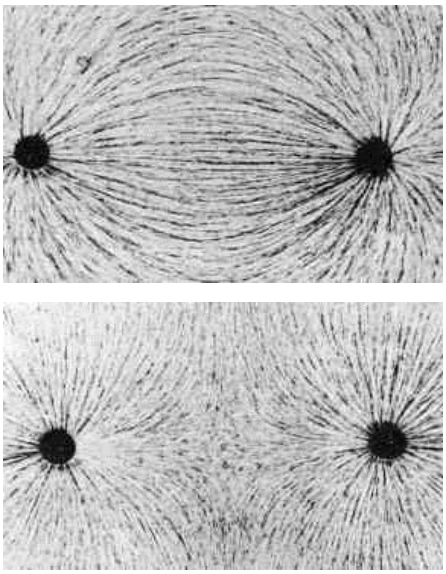


così, poiché la superficie della sfera in questione è $4\pi r^2$ e l'intensità del campo elettrico è proporzionale al numero di linee per unità di superficie, sarà:

$$E \propto \frac{N}{4\pi r^2}$$

inoltre, siccome il numero di linee è proporzionale alla carica ($N \propto q$), allora, in accordo alla legge di Coulomb:

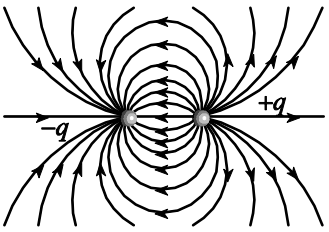
$$E \propto \frac{q}{4\pi r^2}\,.$$



Rappresentazione delle linee di forza del campo elettrico prodotto da due cariche puntiformi di segno uguale (in alto) e opposto (in basso).

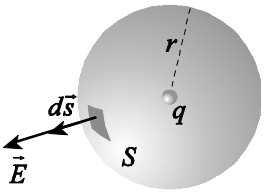
Poiché la carica è quantizzata, il numero di linee di forza che escono da un qualsiasi oggetto materiale deve essere 0, $\pm ke$, $\pm 2ke$, …, dove k è una costante di proporzionalità arbitraria. Fissato k, il numero di linee di forza non è arbitrario. Se, ad esempio, un oggetto ha carica Q_1 ed un altro ha carica Q_2, allora il rapporto N_1/N_2 tra i numeri delle corrispondenti linee di forza sarà pari al rapporto delle cariche Q_1/Q_2.

Il metodo di rappresentazione del campo elettrico attraverso le linee di forza presenta tuttavia alcune limitazioni. Innanzitutto la sua efficacia è circoscritta alla descrizione di campi statici essendo piuttosto complessa la rappresentazione dei campi generati da cariche in movimento; inoltre con questo metodo è impossibile applicare il principio di sovrapposizione. Si faccia riferimento infatti alla configurazione di linee di forza originate da una singola carica (si veda la figura); in principio il campo prodotto da due cariche uguali ma di segno opposto si dovrebbe ottenere affiancando due configurazioni di linee di una singola carica e invertendo la direzione delle frecce per una delle due cariche. Tuttavia tale metodo determinerebbe delle linee che si incrociano a cui corrisponderebbero due differenti direzioni del campo elettrico nello stesso punto. La rappresentazione delle linee di forza per tale sistema di cariche è comunque possibile ma richiede un opportuno calcolo matematico (si veda la figura).



1.6 La legge di Gauss

Consideriamo una carica puntiforme q posta al centro di una sfera di raggio r. Sulla superficie S della sfera risulta:



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{n}$$

dove $\hat{n}$ è il versore normale uscente dal generico punto posto sulla superficie. Il flusso elementare (si veda l'Appendice B) attraverso un elemento di superficie $d\vec{s}$ vale (si veda la figura):

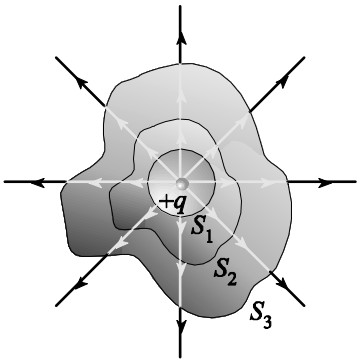
$$d\phi = \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{n}\cdot\hat{n}\,ds = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}ds\,,$$

così, il flusso attraverso l'intera superficie S vale:

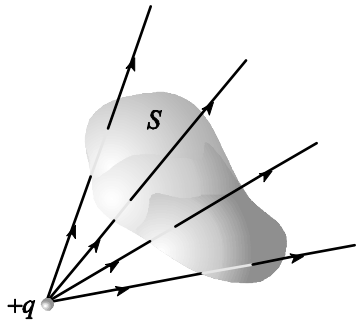
$$\phi = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}ds = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\int_S ds = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}4\pi r^2\,,$$

essendo pari a $4\pi r^2$ la superficie della sfera, così:

$$\phi = \frac{q}{\varepsilon_0}\,.$$



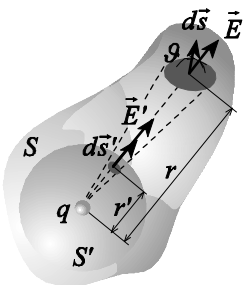
Quindi il flusso del campo elettrico attraverso la superficie della sfera è proporzionale alla carica interna alla superficie. Il risultato appena conseguito, che sarà esteso nel seguito ad una qualsiasi superficie chiusa contenente la carica, risulta consistente con la definizione di flusso e con le caratteristiche delle linee di forza; infatti il flusso attraverso una superficie è proporzionale al numero di linee di forza che attraversano tale superficie, d'altra parte tale numero è proporzionale alla carica che le origina, così il flusso risulta proporzionale alla carica. Dalla costruzione di figura è evidente che il numero di linee di forza che attraversano le superfici chiuse non sferiche S_2 e S_3 è pari al numero di linee di forza che attraversano S_1, così il flusso totale attraverso qualsiasi superficie chiusa è indipendente dalla forma della superficie stessa. Se la carica è esterna alla superficie chiusa (si veda la figura) il numero di linee di forza entranti è pari a quello delle linee uscenti, così il flusso totale del campo elettrico che attraversa una superficie chiusa che non contiene alcuna carica è nullo. In formule si ha:



$$\int_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \begin{cases} \dfrac{q}{\varepsilon_0} & \textit{se q è interna a } S, \\ 0 & \textit{se q è esterna a } S. \end{cases}$$

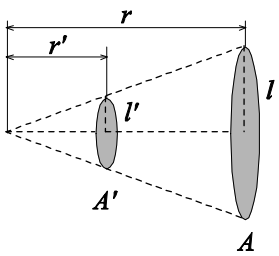
Questo risultato fu dimostrato dal fisico tedesco Karl Friedirch Gauss nel 1835 nell'ambito di uno studio di carattere generale relativo alle forze agenti in modo inversamente proporzionale al quadrato della distanza; per tale motivo prende il nome di *legge di Gauss*. Di seguito ne è data una dimostrazione analitica.

Consideriamo una superficie chiusa S contenente la carica q. Sia S' una superficie sferica concentrica alla carica e contenuta in S (si veda la figura); dal risultato conseguito nel paragrafo precedente, il flusso attraverso S' vale:



$$\phi_{S'} = \int_{S'} \vec{E}'\cdot d\vec{s}' = \int_{S'} E'\,ds' = \frac{q}{\varepsilon_0}\,,$$

dove $\vec{E}'$ è il campo elettrico sulla superficie S'. In particolare se r' è il raggio della sfera di superficie S', si ha:



$$E' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r'^2} \tag{1.3}$$

mentre, in un punto a distanza r sulla superficie S risulta:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}, \tag{1.4}$$

così, dividendo membro a membro le equazioni (1.3) e (1.4) si ottiene:

$$\frac{E'}{E} = \left(\frac{r}{r'}\right)^2. \tag{1.5}$$

Con riferimento al cono di figura, risulta che l'area A della base e l'area A' di una sezione del cono perpendicolare all'asse possono essere espresse in funzione dei corrispondenti raggi della base e della sezione considerata, come:

$$A' = \pi l'^2,$$
$$A = \pi l^2,$$

pertanto il rapporto tra le aree A' e A vale:

$$\frac{A'}{A} = \left(\frac{l'}{l}\right)^2;$$

d'altra parte, valendo la relazione di proporzionalità $l/l' = r/r'$ si può scrivere:

$$\frac{A'}{A} = \left(\frac{r'}{r}\right)^2. \tag{1.6}$$

Karl Friedirch Gauss

Applicando tale relazione alle superfici infinitesime $d\vec{s}$ e $d\vec{s}'$ appartenenti rispettivamente alle superfici S e S' della figura precedente si ha:

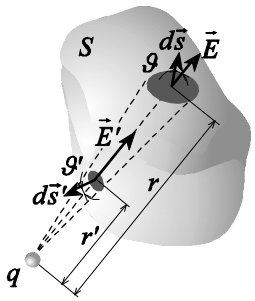
$$ds\cos\vartheta = \left(\frac{r}{r'}\right)^2 ds'$$

così, il flusso del campo elettrico $\vec{E}$ attraverso la superficie S vale:

$$\phi_S = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_S E\,ds\cos\vartheta = \int_{S'}\left(\frac{r'}{r}\right)^2 E'\left(\frac{r}{r'}\right)^2 ds' = \int_{S'} E'\,ds' = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

dove si è fatto uso della (1.5) per mettere in relazione il campo $\vec{E}$ col campo $\vec{E}'$. Se la carica è situata all'esterno della superficie chiusa considerata, con riferimento alla figura risulta:

$$ds'\cos\vartheta' = \left(\frac{r'}{r}\right)^2 ds\cos\vartheta;$$



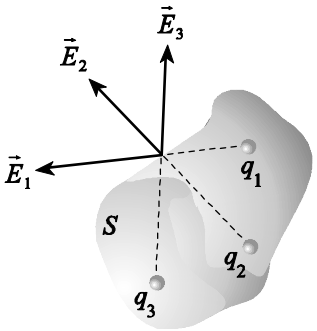
facendo uso di tale formula ed esprimendo il flusso infinitesimo del campo elettrico attraverso S come la somma dei flussi infinitesimi attraverso le superfici contrapposte $d\vec{s}$ e $d\vec{s}'$, si ha:

$$d\phi_S = \vec{E}'\cdot d\vec{s}' + \vec{E}\cdot d\vec{s} = -E'ds'\cos\vartheta' + Eds\cos\vartheta = -\left(\frac{r}{r'}\right)^2 E\left(\frac{r'}{r}\right)^2 ds\cos\vartheta + Eds\cos\vartheta =$$
$$= 0,$$

e siccome questo risultato vale per ogni coppia di elementi $d\vec{s}$ e $d\vec{s}'$, risulterà:

$$\phi_S = 0.$$

Questa dimostrazione mette in luce un importante collegamento tra la legge di Gauss e la legge di Coulomb. Infatti la dimostrazione è basata sul fatto che il rapporto tra i campi elettrici prodotti da una carica puntiforme in corrispondenza di due superfici sferiche concentriche alla carica e di raggi r e r' (1.5) è uguale all'inverso del rapporto tra le aree delle due superfici (1.6). Concludiamo quindi che la legge di Gauss è conseguenza della proporzionalità attraverso l'inverso del quadrato della distanza espressa dalla legge di Coulomb.



Supponiamo che internamente alla superficie chiusa considerata S vi siano N cariche $q_1, q_2, \ldots, q_N$, allora se $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \ldots, \vec{E}_N$ rappresentano i campi prodotti da ciascuna di esse prese singolarmente (si veda la figura), si ha:

$$\int_S \vec{E}_1 \cdot d\vec{s} = \frac{q_1}{\varepsilon_0},$$

$$\int_S \vec{E}_2 \cdot d\vec{s} = \frac{q_2}{\varepsilon_0},$$

$$\vdots$$

$$\int_S \vec{E}_N \cdot d\vec{s} = \frac{q_N}{\varepsilon_0},$$

così, sommando membro a membro, per il principio di sovrapposizione, se:

$$\vec{E} \equiv \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_N,$$

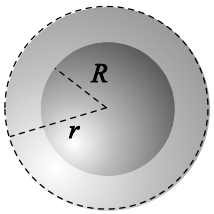
$$q_{int} \equiv q_1 + q_2 + \ldots + q_N,$$

segue:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}.$$

Cioè il flusso del campo elettrico totale attraverso una qualunque superficie chiusa è uguale alla carica totale contenuta all'interno della superficie, divisa per ε_0.

Esempio: (*Campo elettrico prodotto da una sfera carica*). Consideriamo una distribuzione sferica di carica di raggio R di densità di carica, uniforme, ρ. Calcoliamo il campo elettrico in ogni punto dello spazio. Consideriamo una superficie sferica di raggio r concentrica con la sfera data e valutiamo il campo per $r > R$ e per $r < R$. Se $r > R$, (si veda la figura) dall'applicazione della legge di Gauss segue:



$$\phi\left(\vec{E}\right) = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

dove $S = 4\pi r^2$ è la superficie della sfera di raggio r e q è la carica contenuta nella sfera. Da tale relazione si ricava[1]:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \int_S ds = E\, 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

cioè:

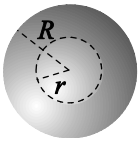
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}. \tag{1.7}$$

Quindi all'esterno della sfera il campo è lo stesso che si avrebbe qualora la sfera fosse sostituita da una carica puntiforme di uguale valore posta al centro della sfera. Inoltre, siccome la carica è uniformemente distribuita nel volume V della sfera, si ha:

$$q = \int_V \rho\, dv = \rho \int_V dv = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho, \tag{1.8}$$

e quindi:

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{R^3}{r^2}.$$



Se $r < R$, (si veda la figura) dall'applicazione della legge di Gauss segue:

$$\phi\left(\vec{E}\right) = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = E\, 4\pi r^2 = \frac{q'}{\varepsilon_0},$$

dove q' rappresenta la carica contenuta all'interno del volume V' delimitato dalla superficie S di raggio r:

$$q' = \int_{V'} \rho\, dv = \rho \int_{V'} dv = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho,$$

quindi, sostituendo si ha:

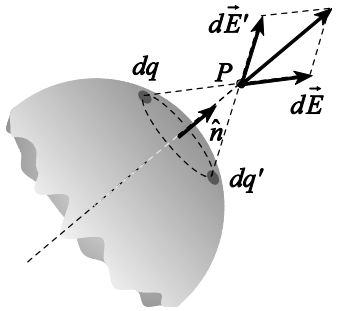
$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r,$$

inoltre, facendo uso della (1.8) è possibile esprimere tale risultato in funzione della carica q come:

---

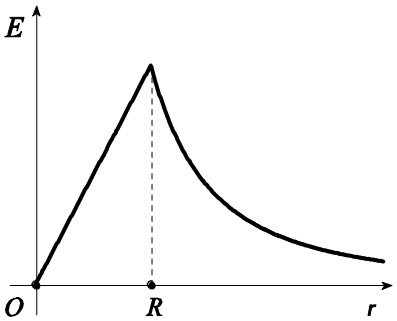
[1] Il passaggio:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, ds = \int_S E\, ds = E \int_S ds$$

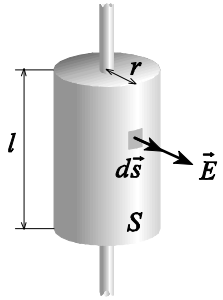


richiede che si provi che il vettore campo elettrico $\vec{E}$ sia diretto lungo la normale $\hat{n}$ e che il suo modulo risulti indipendente dalla variabile di integrazione, ovvero da dove è situato l'elemento di superficie ds sul dominio di integrazione S. Entrambe le caratteristiche possono essere dedotte dalla specifica simmetria del problema e dalla conseguente scelta circa la superficie S. Con riferimento alla figura, per ogni elemento di carica dq, che produce un campo $d\vec{E}$ nel punto P, esiste un elemento dq' che nello stesso punto determina il campo $d\vec{E}'$ disposto come mostrato in figura. Per costruzione, la somma degli elementi $d\vec{E}$ e $d\vec{E}'$ produce un vettore $d\vec{E} + d\vec{E}'$ diretto lungo la normale alla superficie passante per il punto P. L'indipendenza del campo dalla posizione su S, purché S sia una sfera concentrica alla distribuzione data, è conseguenza della comune simmetria della distribuzione di carica e della superficie S.

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r = \frac{3}{4}\frac{q}{\pi R^3}\frac{1}{3\varepsilon_0} r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r \,. \tag{1.9}$$

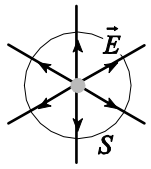


In figura è mostrato l'andamento del campo elettrico al variare di *r*.



Esempio: (*Distribuzione di carica a simmetria cilindrica*). Consideriamo un filo di lunghezza infinita lungo il quale è uniformemente distribuita una carica con densità lineare λ. Stabiliamo il valore del campo elettrico in tutto lo spazio. La simmetria della distribuzione di carica suggerisce che il campo elettrico deve essere perpendicolare al filo carico e uscente. Consideriamo una superficie cilindrica *S* di raggio *r* e lunghezza *l* coassiale col filo (nella figura, in alto; in basso la superficie è mostrata in sezione); il flusso attraverso le superfici di base è nullo essendo il campo elettrico parallelo a tali superfici, quindi:

$$\phi\left(\vec{E}\right) = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = E\int_S ds = 2\pi r l\, E \,.$$



D'altra parte per la legge di Gauss risulta:

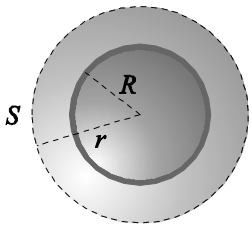
$$\phi\left(\vec{E}\right) = 2\pi r l\, E = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \,,$$

pertanto:

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r} \,. \tag{1.10}$$

Si osservi che se il filo non è infinito viene a cadere la simmetria è diventa inutile l'applicazione della legge di Gauss per la determinazione del campo elettrico; tuttavia questo risultato resta valido per un filo di lunghezza finita *L* nel limite $r \ll L$ per punti sufficientemente distanti dalle estremità del filo.

Esempio: (*Campo prodotto da un guscio sferico*). Consideriamo un guscio sferico di materiale isolante di raggio *R* sul quale è uniformemente distribuita una carica con densità σ. Con riferimento ad una superficie sferica *S* di raggio *r* concentrica al guscio (si veda la figura), possiamo affermare che per $r < R$ il campo elettrico è nullo poiché non è presente alcuna carica all'interno del guscio. Per $r > R$, se *q* è la carica distribuita sul guscio, si ha:



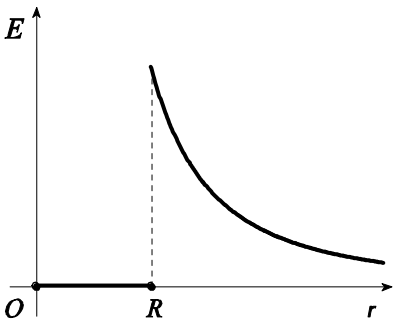
$$q = 4\pi R^2 \sigma \,,$$

e quindi, poiché:

$$\phi\left(\vec{E}\right) = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = E\, 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \,,$$

segue:

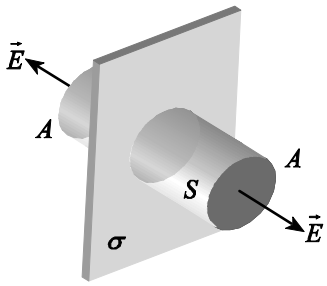
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{r^2} \,. \tag{1.11}$$



in figura è mostrato l'andamento del campo elettrico[2] al variare di *r*.

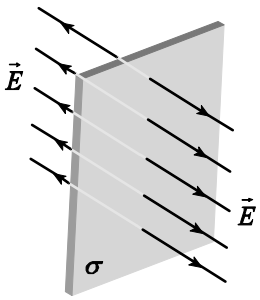
[2] L'osservazione secondo cui una sfera piena ed una vuota ugualmente elettrizzate esercitano la stessa forza di attrazione su corpi carichi fu fatta nel 1773 da Giambattista Beccaria. Nel 1755 Franklin verificava che un corpo carico non risente di forze di natura elettrica quando viene posto all'interno di una sfera cava elettrizzata. Circa settanta anni prima, Newton aveva dimostrato che la forza gravitazionale tra un corpo cavo ed un oggetto situato al suo interno è nulla. A partire da tale osservazione, Joseph Priestley, nel 1766, senza fornire alcuna dimostrazione, ipotizzò che le

Esempio: (*Piano infinito uniformemente carico*). Consideriamo un piano isolante indefinito sul quale è uniformemente distribuita una carica positiva con densità superficiale σ. Stabiliamo il valore del campo elettrico in ogni punto dello spazio. Per simmetria il campo elettrico su entrambe la superfici del piano sarà normale ed opposto in verso (si veda la figura). Consideriamo una superficie cilindrica S con asse perpendicolare al piano e superfici di base di area A equidistanti dal piano, come mostrato in figura. Il flusso del campo elettrico attraverso ciascuna base è EA, così il flusso totale attraverso la superficie S vale:



$$\phi\left(\vec{E}\right) = 2EA;$$

d'altra parte la carica q interna a questa superficie è pari a quella distribuita sull'intersezione tra il volume definito dal cilindro di superficie S ed il piano carico:

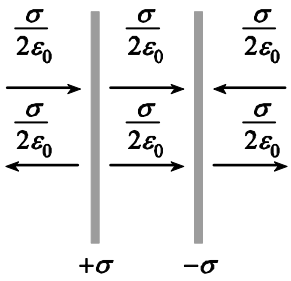


$$q = \sigma A,$$

così, essendo $\phi\left(\vec{E}\right) = q/\varepsilon_0$, segue:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Questo risultato, per altro già ottenuto attraverso un approccio diverso in un precedente esempio, può essere applicato ad una importante configurazione di carica rappresentata da una coppia di piani infiniti e paralleli uniformemente carichi e recanti su di essi cariche di segno opposto. Con riferimento alla figura si osserva che all'esterno della regione compresa tra i due piani, i campi prodotti da ciascun piano sono uguali ma hanno verso opposto; all'interno i campo hanno lo stesso segno e si sommano. Pertanto:



$$E_{ext} = 0,$$
$$E_{int} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

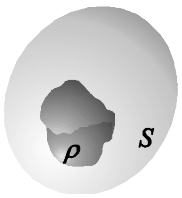
Questa configurazione elettrostatica consente quindi di confinare un campo uniforme in una regione limitata dello spazio.

1.7 Formulazione puntuale della legge di Gauss

Supponiamo che all'interno del volume V racchiuso da una superficie S vi sia una distribuzione continua di carica con densità $\rho(x, y, z)$ (si veda la figura). Allora la carica totale contenuta all'interno del volume V vale:

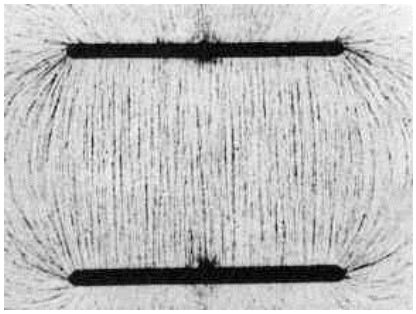
$$q = \int_V \rho\, dv;$$

sostituendo q nell'espressione della legge di Gauss si trova:



$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\, dv.$$

azioni elettriche si esercitassero nella stessa maniera di quelle gravitazionali, secondo la legge dell'inverso del quadrato della distanza, anticipando di quasi vent'anni il risultato ottenuto sperimentalmente da Coulomb.



Rappresentazione delle linee di forza del campo elettrico prodotto da due piani uniformemente carichi.

Questa espressione mette in relazione il campo elettrico, definito su una superficie, con la densità di carica, definita in un volume. Sebbene risulti utile in numerose circostanze, tale formulazione della legge di Gauss, detta *integrale*, presenta lo svantaggio di non poter fornire, in generale, indicazioni di carattere puntuale circa le grandezze coinvolte.

Applicando il teorema della divergenza (si veda l'Appendice B) al primo membro dell'espressione precedente, si trova:

$$\int_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\,dv = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\,dv\,,$$

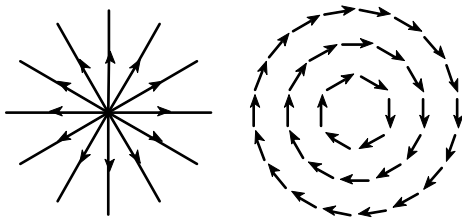
ovvero:

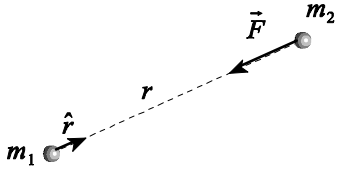
$$\int_V \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0}\right) dv = 0\,;$$

dovendo valere questa relazione per ogni dominio di integrazione *V*, deve essere:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\,. \tag{1.12}$$

Laddove ρ è nullo, $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$ e di conseguenza il campo elettrico $\vec{E}$ è solenoidale. In sostanza l'equazione precedente stabilisce quali sono i punti dello spazio dove $\vec{E}$ è o meno solenoidale e pertanto stabilisce l'assenza o meno di sorgenti del campo elettrico in quei punti. Così se, ad esempio, osserviamo delle linee di forza di $\vec{E}$ che originano da un punto, che funge quindi da sorgente del campo (si veda la figura a sinistra), possiamo dedurre che esiste un punto in cui risulta $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\neq 0$. Viceversa, se le linee di forza del campo non originano da alcun punto (si veda la figura a destra), concludiamo che il campo è solenoidale.





Esempio: (*Legge di Gauss per il campo gravitazionale*). L'espressione della forza gravitazionale esercitata da un corpo di massa m_1 su un corpo di massa m_2, supposti puntiformi, è data da:

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}\,,$$

in cui la costante di proporzionalità *G* vale circa $6.6759\times10^{-11}\ m^3/\left(kg\cdot s^2\right)$. A partire da tale relazione, in analogia al caso elettrostatico, è possibile definire il campo gravitazionale prodotto da una massa puntiforme *m* alla distanza *r* come:

$$\vec{\mathcal{G}} = -G\frac{m}{r^2}\hat{r}\,.$$

Tale campo, essendo dipendente dall'inverso del quadrato della distanza soddisfa la legge di Gauss che può essere dedotta per analogia. Indicando con ρ_m la densità volumetrica di materia:

$$\rho_m = \frac{dm}{dV},$$

risulta:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{G}} = -4\pi G \rho_m ,$$

che rappresenta l'espressione puntuale della legge di Gauss per il campo gravitazionale.

1.8 Differenza di potenziale e potenziale elettrico

Le forze di tipo centrali, che dipendono funzionalmente dalla sola distanza da un centro, sono conservative (si veda l'Appendice B); poiché la forza espressa dalla legge di Coulomb appartiene a questa categoria è conservativa e, di conseguenza, il campo elettrostatico è conservativo. Se una carica q_0 è immersa in un campo elettrostatico $\vec{E}$, la forza $\vec{F}$ cui è soggetta vale $q_0\vec{E}$; tale forza è conservativa essendo la somma di tutte le forze conservative agenti tra q_0 e le cariche che determinano il campo $\vec{E}$. Il lavoro fatto da questa forza per uno spostamento infinitesimo $d\vec{l}$ della carica vale:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} ;$$

in corrispondenza di tale lavoro l'energia potenziale U_e del sistema costituito dalle cariche che determinano il campo $\vec{E}$ e dalla carica q_0 subisce una diminuzione pari a dL:

$$dU_e = -dL = -q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} ;$$

in relazione ad uno spostamento finito di q_0 dal punto A al punto B, la variazione di energia potenziale è data da:

$$\Delta U_e = U_{eB} - U_{eA} = \int_A^B \left(-q_0 \vec{E}\right) \cdot d\vec{l} = -q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} ,$$

dove l'integrale non dipende dal cammino scelto essendo il campo $\vec{E}$ conservativo. La *differenza di potenziale* ΔV tra i punti B e A, $V_B - V_A$, è definita come la variazione dell'energia potenziale per unità di carica, ovvero:

$$\Delta V \equiv V_B - V_A = \frac{U_{eB} - U_{eA}}{q_0} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} ; \tag{1.13}$$

si noti che, analogamente all'energia potenziale, tale grandezza viene definita attraverso una differenza. Spesso si usa assumere che la funzione potenziale sia nulla in un punto particolare, ad esempio all'infinito; allora, ponendo:

$$V(\infty) = 0 ,$$

il potenziale in corrispondenza di un generico punto *P* vale:

$$V_P = -\int_{\infty}^{P} \vec{E} \cdot d\vec{l} \ ,$$

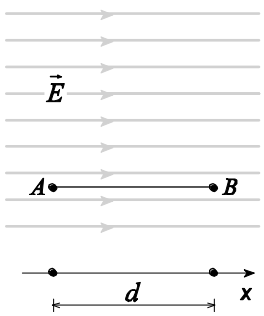
espressione che può essere riguardata come il lavoro necessario per trasportare una carica unitaria dall'infinito al punto *P*. L'unità di misura del potenziale è il *volt* (*V*) e risulta $1V = 1J/1C$, così $1J$ rappresenta il lavoro che deve essere svolto per far superare ad una carica di $1C$ una differenza di potenziale di $1V$. L'introduzione del *volt* consente inoltre di riscrivere l'unità di misura del campo elettrico in V/m, che rappresenta l'unità tradizionalmente adoperata per questa grandezza. Il concetto di potenziale fu introdotto dal matematico inglese George Green nel 1828 attraverso la generalizzazione di precedenti lavori di Joseph-Louis Lagrange, Pierre-Simon de Laplace e Poisson relativi al campo gravitazionale.

Esempio: (l'*elettronvolt*) In fisica atomica e nucleare è d'uso comune per la misura dell'energia l'*elettronvolt* (*eV*), definito come l'energia che un elettrone (o un protone) acquista quando viene accelerato mediante una differenza di potenziale di $1V$. Siccome $1V = 1J/1C$ e la carica dell'elettrone (protone) in modulo è di $1.6\times10^{-19}\,C$, allora

$$1\,eV = \left(1.6\times10^{-19}\,C\right)\cdot\left(1V\right) = 1.6\times10^{-19}\,J.$$

Esempio: Nel cinescopio di un tubo a raggi catodici per applicazioni televisive un elettrone del fascio ha una velocità di $8\times10^{7}\,m/sec$ circa. Poiché la massa dell'elettrone è di circa $9.1\times10^{-31}\,kg$, questa velocità corrisponde ad un'energia cinetica di $3\times10^{-15}\,J$. Cosi tale elettrone per raggiungere questa velocità, partendo da fermo, deve essere accelerato tramite una differenza di potenziale di $19\,kV$.

Esempio (*Campo elettrico uniforme*): Consideriamo un campo elettrico uniforme diretto lungo l'asse *x* di figura:



$$\vec{E} = E\,\hat{x}$$

e calcoliamo la differenza di potenziale tra i punti *A* e *B* separati dalla distanza *d*:

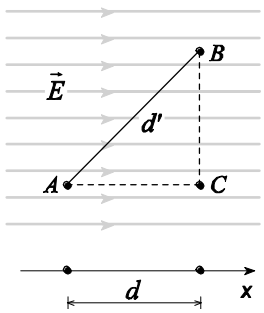
$$V_B - V_A = \Delta V = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_A^B \left(E\,\hat{x}\right)\cdot\left(\hat{x}\,dx\right) = -\int_A^B E\,dx = -Ed\,. \qquad (1.14)$$

Il fatto che $\Delta V < 0$ indica che il potenziale di *B* è inferiore a quello di *A*, ossia $V_B < V_A$. La variazione di energia potenziale di interazione tra una carica di prova q_0 ed un campo elettrico uniforme, quando la carica si muove tra *A* e *B* è:

$$U_{eB} - U_{eA} = \Delta U_e = q_0 \Delta V = -q_0 E d\,.$$

Quindi se $q_0 > 0$ allora $\Delta U_e < 0$ ovvero $U_{eB} < U_{eA}$, cioè il sistema perde energia potenziale in corrispondenza del moto di una carica positiva nella direzione del campo elettrico. Se venisse abbandonata in *A*, la carica, per effetto della forza $q_0\vec{E}$, sarebbe accelerata acquisendo energia cinetica; siccome la carica guadagna energia cinetica in una certa misura, il sistema deve perdere altrettanta energia potenziale. Pertanto, se la carica è originariamente a riposo in *A*, la sua velocità v_A è nulla e risulta:

$$U_{eA} = U_{eB} + \frac{1}{2} m_{q_0} v_B^{\ 2}\ ,$$

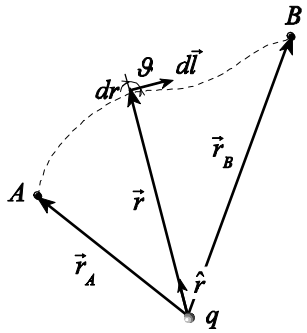


dove v_B è la velocità della carica nel punto B e m_{q_0} è la sua massa. Viceversa, se $q_0 < 0$ allora $\Delta U_e > 0$ ovvero $U_{eB} > U_{eA}$, cioè il sistema guadagna energia potenziale in corrispondenza del moto di una carica negativa nella direzione del campo elettrico. Supponiamo che lo spostamento avvenga tra due punti disposti come indicato in figura; siccome $\vec{E}$ è uniforme, si ha:

$$\Delta V = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_A^B \left(E\,\hat{x}\right)\cdot\left(\hat{x}\,dx + \hat{y}\,dy\right) = -\int_A^B E\,dx = -Ed\ ,$$

così il risultato conseguito è lo stesso del caso precedente. Ne segue che i punti perpendicolari alla direzione del campo (B e C ad esempio, nella figura) sono equipotenziali e definiscono una superficie detta *superficie equipotenziale*.

La differenza di potenziale tra i punti A e B di figura situati in prossimità di una carica puntiforme q vale:



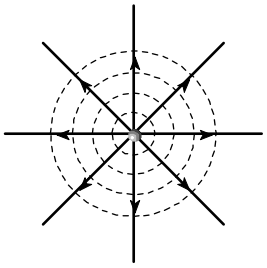
$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}\ ,$$

in cui:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}\ ;$$

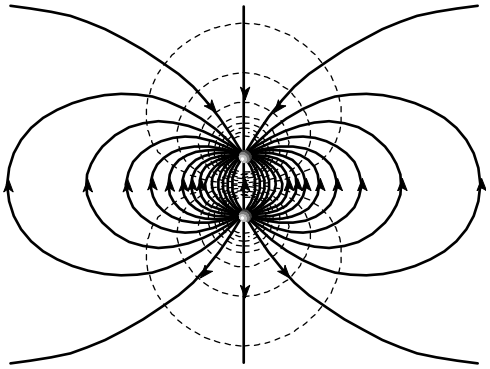
siccome la proiezione del vettore $d\vec{l}$ nella direzione del versore $\hat{r}$, pari a $\hat{r}\cdot d\vec{l}$, è uguale alla variazione dr che subisce il modulo del vettore $\vec{r}$ quando il suo estremo libero si sposta di un vettore $d\vec{l}$, si ha:

$$V_B - V_A = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_A^B \frac{1}{r^2}\hat{r}\cdot d\vec{l} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_B}\frac{1}{r^2}dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\bigg|_{r_A}^{r_B} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right).$$



A motivo della conservatività del campo, l'integrale appena calcolato risulta indipendente dal percorso seguito. Assumendo che il potenziale sia nullo per $r_A \to \infty$, dalla relazione precedente si deduce il potenziale di una carica puntiforme:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r};$$



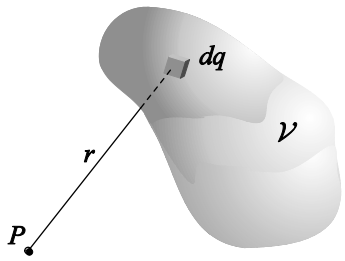
tale espressione può essere interpretata come il lavoro per unità di carica che si effettua per trasportare una carica dall'infinito ad un punto posto a distanza r dalla carica q. Poiché V è uniforme su una superficie sferica di raggio r (cioè $r_A = r_B$ nella precedente relazione), concludiamo che le superfici equipotenziali per una carica puntiforme sono delle sfere concentriche alla carica stessa e tali superfici risultano, punto per punto, perpendicolari alla direzione del campo. Nelle figure è mostrata la sezione (in tratteggio) delle

superfici equipotenziali per una carica puntiforme e per due cariche puntiformi di segno opposto. Come conseguenza del principio di sovrapposizione, il potenziale in un certo punto, dovuto a più cariche puntiformi, è pari alla somma dei potenziali di ciascuna carica calcolati in tale punto:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}, \tag{1.15}$$

sempre nell'ipotesi che il potenziale sia nullo all'infinito. Questa espressione costituisce la definizione originaria fornita da Green per la funzione potenziale.

Per il calcolo del potenziale di una distribuzione continua facciamo riferimento alle espressioni già trovate per le cariche puntiformi. Sia dq un elemento di carica della distribuzione Q, allora, il contributo al potenziale nel punto P posto a distanza r da questo elemento è:



$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r}$$

così, per ottenere il potenziale generato dall'intera distribuzione occorre integrare su tutta la carica Q della distribuzione:

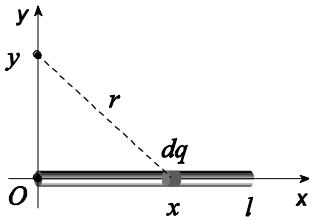
$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_Q \frac{dq}{r}.$$

In relazione al tipo di distribuzione di carica è possibile esplicitare il differenziale dq; così, ad esempio, qualora la carica è distribuita in un volume $\mathcal{V}$ con densità $\rho = dq/dv$, risulta:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_Q \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{V}} \frac{\rho\, dv}{r}. \tag{1.16}$$

Un approccio alla determinazione del potenziale di un corpo alternativo al precedente prevede la diretta applicazione dell'espressione (1.13) della differenza di potenziale in termini di integrale di linea di $\vec{E}$. Pertanto, se il problema ha un grado di simmetria tale da rendere agevole questa determinazione, fissando il valore del potenziale in un punto arbitrario, è possibile stabilire il potenziale del corpo.

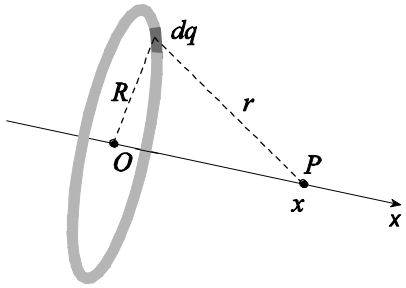
Esempio: (*Potenziale elettrico di una bacchetta carica*). Consideriamo una bacchetta di lunghezza l uniformemente carica e valutiamo il potenziale in corrispondenza dei punti dell'asse passante per un estremo. Il contributo al potenziale di un elemento di carica dq posto a distanza r dal punto considerato, vale:



$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, dx}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}},$$

dove λ rappresenta la densità con cui è distribuita la carica lungo la bacchetta; integrando da 0 a l si trova:

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^l \frac{dx}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{l+\sqrt{l^2+y^2}}{y}\right).$$

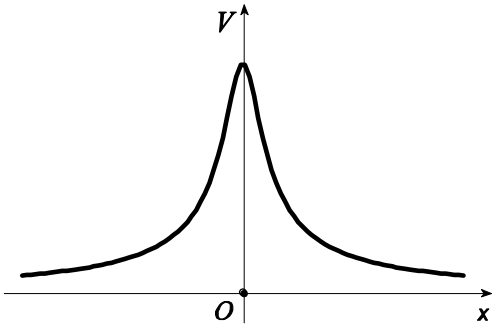


Esempio: (*Potenziale elettrico dovuto ad un anello uniformemente carico*). Consideriamo un anello uniformemente carico e calcoliamo il potenziale in un punto *P* posto sull'asse dell'anello. Il contributo al potenziale di un elemento di carica dq posto sull'anello è:

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{\left(x^2+R^2\right)^{1/2}},$$

il termine $\left(x^2+R^2\right)^{1/2}$ è comune a tutti i punti sull'anello, così, integrando, segue:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_Q \frac{dq}{\left(x^2+R^2\right)^{1/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left(x^2+R^2\right)^{1/2}}\int_Q dq = \\ = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left(x^2+R^2\right)^{1/2}}. \tag{1.17}$$



Il cui grafico è mostrato in figura.

Esempio: (*Potenziale elettrico di una sfera uniformemente carica*). Consideriamo una sfera uniformemente carica di raggio *R* e calcoliamo il potenziale in un punto della sua superficie. Assumendo che il potenziale sia nullo all'infinito, dalla relazione (1.7) e dalla definizione (1.13) segue:

$$V(r) = -\int_\infty^r \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\zeta^2}d\zeta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r},$$

in cui $r > R$; in particolare, in corrispondenza di un punto posto sulla superficie della sfera risulta:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}. \tag{1.18}$$

1.9 Espressione della conservatività del campo elettrostatico

Nota che sia l'espressione del campo elettrico, è possibile ricavare il corrispondente potenziale attraverso la relazione:

$$V(P) = -\int_{P_0}^{P} \vec{E}\cdot d\vec{l} + V(P_0);$$

da questa espressione segue:

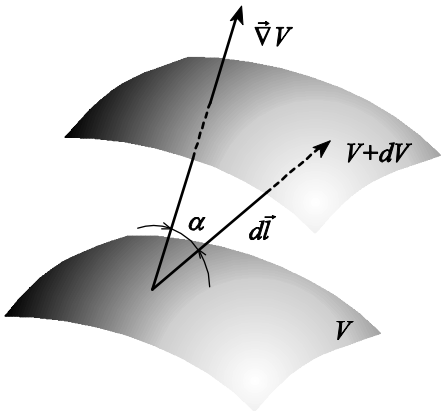
$$\vec{E}\cdot d\vec{l} = -dV \tag{1.19}$$

e, sviluppando i due membri in coordinate cartesiane, si ha:

$$E_x dx + E_y dy + E_z dz = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right),$$

così, confrontando le due espressioni, segue:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x},$$
$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y},$$
$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z},$$



ovvero, vettorialmente:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \; ; \qquad (1.20)$$

cioè il campo elettrostatico si può esprimere come l'opposto del gradiente del potenziale (si veda l'Appendice B). Sostituendo questa relazione nella (1.19) si trova:

$$dV = \left(\vec{\nabla} V\right) \cdot d\vec{l} = \left|\vec{\nabla} V\right| dl \cos\alpha$$

in cui α rappresenta l'angolo compreso tra i vettori $\vec{\nabla} V$ e $d\vec{l}$. Da tale relazione segue:

$$\frac{dV}{dl} = \left|\vec{\nabla} V\right| \cos\alpha \, ,$$

cioè la variazione per unità di lunghezza di V nella direzione di $d\vec{l}$ è pari alla proiezione del vettore $\vec{\nabla} V$ nella direzione di $d\vec{l}$.

Se a partire da un punto ci si sposta di un tratto $d\vec{l}$ ortogonalmente a $\vec{\nabla} V$, siccome α vale $\pi/2$ e $\cos\alpha = 0$, segue che $dV/dl = 0$, ovvero V è costante; pertanto $\vec{\nabla} V$ è un vettore perpendicolare alle superfici equipotenziali in cui V è costante. Infine, se $d\vec{l}$ è diretto perpendicolarmente alle superfici equipotenziali, ovvero parallelamente a $\vec{\nabla} V$, siccome α è nullo e $\cos\alpha = 1$, segue che la derivata direzionale dV/dl risulta massima e pari al modulo del gradiente:

$$\frac{dV}{dl} = \left|\vec{\nabla} V\right| .$$

Inoltre il verso di $\vec{\nabla} V$ è nella direzione in cui il potenziale aumenta con la derivata massima[3].

Esempio: A partire dalla relazione (1.20) e dall'espressione del potenziale (1.17) deduciamo l'espressione del campo elettrico sull'asse (asse x) di un anello carico (per $x > 0$):

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\hat{x}\frac{dV}{dx} = -\hat{x}\frac{d}{dx}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left(x^2+R^2\right)^{1/2}} = -\hat{x}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+R^2\right)^{-3/2} 2x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}\hat{x},$$

che coincide con quanto già determinato attraverso l'applicazione della legge di Coulomb.

[3] Infatti, ad esempio, per una carica puntiforme positiva, $\vec{\nabla} V$ punta verso la carica, dove il potenziale aumenta.

Dalla conservatività del campo elettrostatico segue che l'integrale di linea di $\vec{E}$ calcolato da un punto *A* ad un punto *B* risulta indipendente dal percorso che porta da *A* a *B*, cioè

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = V(A) - V(B),$$

Siméon-Denis Poisson

ovvero l'integrale dipende dai soli valori estremi del percorso e di conseguenza, per una qualsiasi curva chiusa $\mathcal{C}$ si ha:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0. \tag{1.21}$$

Infine, da tale relazione, attraverso l'applicazione del teorema del rotore (si veda l'Appendice B), segue l'espressione puntuale:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}. \tag{1.22}$$

Sostituendo la relazione (1.20) nell'espressione puntuale della Legge di Gauss (1.12) segue:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} V\right) = \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

ovvero:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{1.23}$$

dove ∇^2 indica l'operatore laplaciano (si veda l'Appendice B)

La relazione (1.23), dimostrata da Siméon-Denis Poisson nel 1813, compendia la (1.12) e la (1.22) e prende il nome di *equazione di Poisson*. Fissata che sia la funzione ρ, localizzata in una regione definita dello spazio, si prova che l'equazione di Poisson ammette una sola soluzione che soddisfi le specificate condizioni al contorno nel dominio di definizione. In particolare, imponendo la condizione secondo cui il potenziale e il campo elettrico si annullino nel limite per $r \to \infty$, rispettivamente come $1/r$ e almeno come $1/r^2$, è possibile dimostrare che la soluzione della (1.23) è data della relazione (1.16). In assenza di cariche localizzate, ovvero per $\rho = 0$, l'equazione precedente si scrive:

Pierre-Simon de Laplace

$$\nabla^2 V = 0$$

e prende il nome di *equazione di Laplace*[4], che la riscoprì nel 1796 dopo che Leonhard Euler la trovò nel 1756. Da tale equazione segue banalmente che le derivate seconde $\partial^2 V/\partial x^2$, $\partial^2 V/\partial y^2$ e $\partial^2 V/\partial z^2$ non possono avere contemporaneamente lo stesso segno, per cui *V* non può

[4] In generale, una funzione *V* che in un assegnato dominio è derivabile fino al secondo ordine e soddisfa l'equazione (1.24) è detta una *funzione armonica*.

presentare massimi o minimi relativi nelle regioni di spazio in cui $\rho = 0$, ma solo punti di sella. Ne segue, ad esempio, che un insieme di cariche puntiformi non può essere mantenuta in una configurazione di equilibrio stabile per effetto della sola interazione delle cariche stesse. Tale risultato, che fu dimostrato nel 1842 dal matematico inglese Samuel Earnshaw inizialmente per il solo campo elettrico, fu successivamente esteso a tutte le forze caratterizzate dalla legge dell'inverso del quadrato della distanza. La proprietà dimostrata da Earnshaw comporta, ad esempio, che se le forze elettriche mantengono inalterate le loro caratteristiche anche sulla scala atomica, si ha che in un atomo o in una molecola i costituenti carichi non possono trovarsi in quiete.

Esempio: Consideriamo una distribuzione sferica di carica di raggio R di densità di carica, uniforme, ρ. All'esterno della sfera risulta:

$$\nabla^2 V = 0;$$

per simmetria il potenziale è indipendente dagli angoli ϑ e ϕ, pertanto l'espressione precedente in coordinate sferiche diventa:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0,$$

questa identità implica:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0,$$

ovvero che la quantità nelle parentesi è una costante rispetto a r; indicando tale costante con A risulta:

$$r^2 \frac{\partial V}{\partial r} = A,$$

cioè:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{A}{r^2}.$$

D'altra parte, dalla relazione (1.20) segue:

$$E = -\frac{A}{r^2},$$

tale risultato è in accordo con la (1.7), in cui la costante A vale $-q/(4\pi\varepsilon_0)$. All'interno della sfera risulta:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

Anche in questo caso il potenziale è indipendente dagli angoli ϑ e ϕ, per cui, esprimendo tale relazione in coordinate sferiche si ha:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

cioè:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) = -\frac{\rho r^2}{\varepsilon_0}.$$

Integrando ambo i membri di tale espressione rispetto r si trova:

$$r^2 \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\rho r^3}{3\varepsilon_0} + B\,,$$

dove B è una costante di integrazione. Pertanto:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\rho r}{3\varepsilon_0} + \frac{B}{r^2}\,;$$

così dalla (1.20) segue:

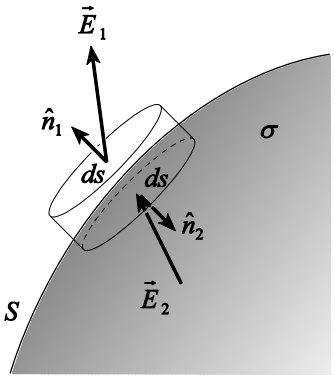
$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} - \frac{B}{r^2}\,.$$

Ovviamente il campo elettrico non può risultare infinito nell'origine $r = 0$, per cui la costante B deve necessariamente essere nulla, così, utilizzando la (1.8) l'espressione precedente si scrive:

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r\,,$$

in accordo con la (1.9).

Esempio: (*Distribuzione superficiale di cariche e discontinuità del campo elettrico*). Consideriamo una distribuzione superficiale di carica con densità σ. Stabiliamo il valore del campo elettrico in ogni punto dello spazio. Indichiamo con $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$ i campi elettrici in prossimità della superficie nei due semispazi individuati dalla superficie stessa. Consideriamo una superficie cilindrica infinitesima con asse perpendicolare al piano e superfici di base di area ds equidistanti dal piano, come mostrato in figura, e infinitesime di ordine inferiore rispetto alla superficie laterale. Dalla legge di Gauss, trascurando il contributo della superficie laterale, segue che il flusso totale attraverso la superficie cilindrica vale:

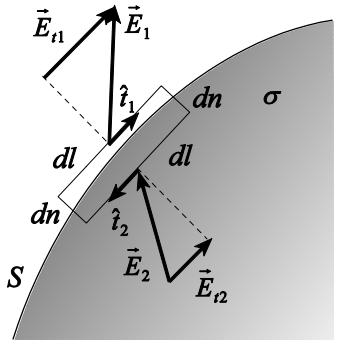


$$\vec{E}_1 \cdot \hat{n}_1\, ds + \vec{E}_2 \cdot \hat{n}_2\, ds = E_{n1}\, ds - E_{n2}\, ds = \frac{\sigma ds}{\varepsilon_0}\,,$$

dove E_{n1} e E_{n2} rappresentano la proiezione del campo elettrico nei due semispazi lungo i versori normali; pertanto:

$$E_{n1} - E_{n2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,,$$

cioè la componente normale del campo elettrico presenta una discontinuità di σ/ε_0 passando attraverso la superficie di separazione tra i due semispazi. Consideriamo un circuito elementare costituito da due tratti elementari dl paralleli alla superficie S e due tratti dn perpendicolari alla superficie, infinitesimi di ordine superiore a dl (si veda la figura). Trascurando il contributo dei due tratti dn, dalla (1.21) segue che la circuitazione del campo elettrico lungo tale percorso vale:



$$\vec{E}_1 \cdot \hat{t}_1\, dl + \vec{E}_2 \cdot \hat{t}_2\, dl = E_{t1}\, dl - E_{t2}\, dl = 0,$$

dove E_{t1} e E_{t2} rappresentano la proiezione del campo elettrico nei due semispazi lungo i versori tangenti; pertanto:

$$E_{t1} - E_{t2} = 0.$$

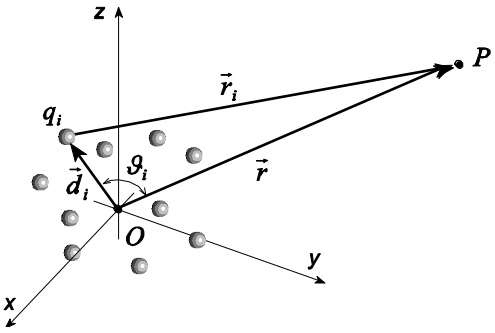
Quindi, le relazioni di raccordo all'interfaccia determinata da una distribuzione di

carica superficiale di densità σ sono:

$$\begin{cases} E_{n1} = E_{n2} + \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}, \\ E_{t1} = E_{t2}\,. \end{cases}$$

1.10 Sviluppo in serie di multipoli

Consideriamo una distribuzione di N cariche puntiformi $q_1, q_2, \ldots, q_N$, con $\sum_{i=1}^{N} q_i \equiv Q$; attraverso la relazione (1.15) è possibile stabilire il valore del potenziale in corrispondenza di un punto P situato a distanza r_i da ciascuna delle cariche. Considerando un sistema di riferimento con origine in un arbitrario punto O (si veda la figura), $\vec{r}_i$ rappresenta la differenza tra il vettore $\overrightarrow{OP}$, pari a $\vec{r}$, ed il vettore posizione dell' $i-$esima carica, $\vec{d}_i$, ovvero:



$$\vec{r}_i = \vec{r} - \vec{d}_i\,;$$

pertanto la distanza r_i può esprimersi come:

$$r_i = \left(r^2 - 2d_i r\cos\vartheta_i + d_i^{\,2}\right)^{1/2} = r\left[1 - 2\cos\vartheta_i\left(\frac{d_i}{r}\right) + \left(\frac{d_i}{r}\right)^2\right]^{1/2},$$

così:

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{r}\left[1 - 2\cos\vartheta_i\left(\frac{d_i}{r}\right) + \left(\frac{d_i}{r}\right)^2\right]^{-1/2}. \tag{1.25}$$

Sfruttando l'espressione dello sviluppo in serie del binomio [5] in cui $n = -1/2$ e $y = -\left(2\cos\vartheta_i\right)\left(d_i/r\right) + \left(d_i/r\right)^2$, la quantità in parentesi quadre diventa:

$$\left[1 - 2\cos\vartheta_i\left(\frac{d_i}{r}\right) + \left(\frac{d_i}{r}\right)^2\right]^{-1/2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left[-2\cos\vartheta_i\left(\frac{d_i}{r}\right) + \left(\frac{d_i}{r}\right)^2\right] + \frac{3}{8}\left[-2\cos\vartheta_i\left(\frac{d_i}{r}\right) + \left(\frac{d_i}{r}\right)^2\right]^2 + \ldots$$

[5] $(1+y)^n = 1 + ny + \dfrac{n(n-1)}{2!}y^2 + \ldots,$

e sviluppando, si ottiene:

$$\left[1-2\cos\vartheta_i\left(\frac{d_i}{r}\right)+\left(\frac{d_i}{r}\right)^2\right]^{-1/2}=$$

$$=1+\cos\vartheta_i\left(\frac{d_i}{r}\right)+\frac{1}{2}\left(3\cos^2\vartheta_i-1\right)\left(\frac{d_i}{r}\right)^2+\ldots.$$

Infine, sostituendo nella relazione (1.25), si ha:

$$\frac{1}{r_i}=\frac{1}{r}\left[1+\cos\vartheta_i\left(\frac{d_i}{r}\right)+\frac{1}{2}\left(3\cos^2\vartheta_i-1\right)\left(\frac{d_i}{r}\right)^2+\ldots\right].$$

Dalla (1.15), l'espressione del potenziale del sistema di cariche nel punto P considerato è, quindi:

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\sum_{i=1}^{N}q_i\left[1+\cos\vartheta_i\left(\frac{d_i}{r}\right)+\frac{1}{2}\left(3\cos^2\vartheta_i-1\right)\left(\frac{d_i}{r}\right)^2+\ldots\right]=\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\sum_{i=1}^{N}q_i+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sum_{i=1}^{N}q_i d_i\cos\vartheta_i+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sum_{i=1}^{N}q_i d_i^{\,2}\frac{3\cos^2\vartheta_i-1}{2}+\ldots=\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i d_i^{\,n}}{r^n}P_n\left(\cos\vartheta_i\right).\end{aligned}\tag{1.26}$$

In cui $P_n\left(\cos\vartheta_i\right)$ rappresenta l' $n-$esimo polinomio di Legendre[6]. La relazione precedente prende il nome di *sviluppo in serie di multipoli* e consente di stimare il potenziale prodotto da una generica distribuzione di carica a grandi distanze dalla distribuzione stessa. Ciascun termine dello sviluppo ha ordine $1/r^{n+1}$, con $n=0,1,2,\ldots$ e pertanto è trascurabile rispetto al termine precedente, tuttavia se il termine $n-$esimo è nullo, allora diventa significativo il temine $(n+1)-$esimo; in particolare,

[6] I polinomi di Legendre sono definiti attraverso la relazione:

$$P_n\left(\cos\vartheta\right)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d\left(\cos\vartheta\right)^n}\left(\cos^2\vartheta-1\right)^n$$

e, in particolare, i primi 6 polinomi sono:

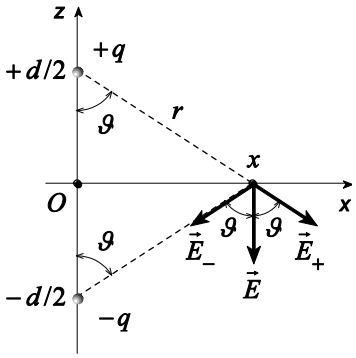
n	$P_n\left(\cos\vartheta\right)$
0	1
1	$\cos\vartheta$
2	$\frac{3\cos^2\vartheta-1}{2}$
3	$\frac{5\cos^3\vartheta-3\cos\vartheta}{2}$
4	$\frac{35\cos^4\vartheta-30\cos^2\vartheta+3}{8}$
5	$\frac{63\cos^5\vartheta-70\cos^3\vartheta+15\cos\vartheta}{8}$

il primo termine, corrispondente a $n=0$, è detto termine di *monopolo*, il secondo, con $n=1$, è detto termine di *dipolo*, il terzo, con $n=2$, termine di *quadrupolo*, il successivo, termine di *ottupolo*, e così via.

Il numeratore del termine di monopolo rappresenta la carica totale Q della distribuzione, quindi, se $Q \neq 0$, tutti gli altri termini dello sviluppo diventano trascurabili per punti sufficientemente lontani dall'origine O e la distribuzione determina un potenziale uguale a quello prodotto da una carica puntiforme situata nell'origine O.

Se il sistema di cariche è neutro, $Q=0$, il termine di monopolo è nullo ed il termine dominante dello sviluppo è quello di dipolo $\left(1/4\pi\varepsilon_0 r^2\right)\sum_{i=1}^{N} q_i d_i \cos\vartheta_i$. Questa quantità può essere riguardata come la componente del vettore $\left(1/4\pi\varepsilon_0 r^2\right)\sum_{i=1}^{N} q_i \vec{d}_i$ della direzione di $\vec{r}$, cioè $\left(1/4\pi\varepsilon_0 r^2\right)\sum_{i=1}^{N} q_i \vec{d}_i \cdot \hat{r}$. La circostanza non banale più semplice in cui $Q=0$ è quella in cui la distribuzione di carica è costituita da sole due cariche di uguale intensità ma una di segno opposto rispetto all'altra. Tale distribuzione prende il nome di *dipolo elettrico*.

Esempio: (*Campo prodotto da un dipolo elettrico*) Stabiliamo il campo elettrico in un punto situato lungo la linea mediana perpendicolare alla congiungente le cariche del dipolo e posto alla distanza x dalla congiungente (si veda la figura). Indicando con $\vec{E}_-$ e $\vec{E}_+$ i campi prodotti da ciascuna carica, per il principio di sovrapposizione si ha:



$$\vec{E} = \vec{E}_- + \vec{E}_+ ,$$

dove:

$$E_+ = E_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{x^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2} .$$

D'altra parte risulta:

$$\left(E_-\right)_x = -\left(E_+\right)_x ,$$

così il campo sarà diretto lungo l'asse z e varrà:

$$E = \left(E_-\right)_z + \left(E_+\right)_z = E_- \cos\vartheta + E_+ \cos\vartheta = 2E_+ \cos\vartheta ,$$

dove:

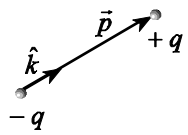
$$\cos\vartheta = \frac{\frac{d}{2}}{r} = \frac{\frac{d}{2}}{\sqrt{x^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}} .$$

Pertanto, sostituendo si ha:

$$E = 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{x^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}\frac{d}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qd}{\left[x^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{\left[x^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2\right]^{3/2}} , \tag{1.27}$$

avendo posto:

$$\vec{p} \equiv qd\,\hat{k}\,,$$



dove $\hat{k}$ è un versore orientato dalla carica negativa a quella positiva (si veda la figura). Il vettore così definito prende il nome di *momento di dipolo elettrico* e, in modulo, è pari al prodotto qd.

Esempio: (*Momento di dipolo elettrico di una molecola*) Il momento di dipolo elettrico è una proprietà di numerose molecole ed è dovuto ad una distribuzione non uniforme delle cariche elettriche degli elementi che le compongono. Ad esempio la molecola di cloruro di sodio (*NaCl*) può essere rivista come l'insieme di uno ione Na^+ ed uno Cl^- separati da una certa distanza d_{NaCl} e rispettivamente di cariche $+e$ e $-e$. Dalle misure si evince che:

$$d_{NaCl} \approx 0.236\,nm\,,$$

così il relativo momento di dipolo dovrebbe essere:

$$p_{NaCl} = ed_{NaCl} = \left(1.6\times10^{-19}\,C\right)\cdot\left(0.236\times10^{-9}\,m\right) = 3.78\times10^{-29}\,C\cdot m\,.$$

Tuttavia il valore misurato è:

$$p_{NaCl} \approx 3.00\times10^{-29}\,C\cdot m\,;$$

ciò evidenzia che l'elettrone del sodio non è completamente ceduto all'atomo di cloro ma risulta condiviso tra questi due atomi.

Esempio: (*Campo elettrico asintotico di un dipolo*) In applicazioni come quella mostrata nell'esempio precedente risulta utile stabilire il campo elettrico a grande distanza dal dipolo, ossia per:

$$x \gg d\,.$$

Dalla relazione (1.27) segue:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{\left[x^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{x^3}\left[1+\left(\frac{d}{2x}\right)^2\right]^{-3/2}\,,$$

facendo uso dell'espressione dello sviluppo in serie del binomio (si veda la nota 5) con $n=-3/2$ e $y=\left(d/2x\right)^2$, si ha:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{x^3}\left[1+\left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{d}{2x}\right)^2+\ldots\right]$$

ed arrestando lo sviluppo al primo termine segue:

$$E \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{x^3}\,. \tag{1.28}$$

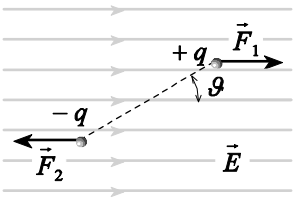
Analogamente si prova che per un punto posto lungo l'asse *z*, a grande distanza da dipolo, si ha:

$$E \approx \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{p}{z^3}\,. \tag{1.29}$$

I due risultati[7] appena riportati costituiscono l'indicazione di una caratteristica generale del dipolo; proveremo infatti nel seguito che a distanza *r* dal dipolo, con $r \gg d$, il campo elettrico varia come $1/r^3$.

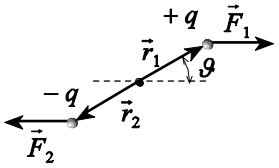
Esempio: (*Azione di un campo elettrico su un dipolo*) Supponiamo che un dipolo elettrico sia immerso in un campo elettrico esterno uniforme $\vec{E}$ e supponiamo inoltre che il dipolo non perturbi significativamente le linee di forza del campo. Le forze $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ agenti sulle due cariche valgono, in modulo:

$$F_1 = F_2 = qE\,.$$



Tali forze, sebbene abbiano la stessa direzione, sono opposte in verso (si veda la figura) così il centro di massa del dipolo non è soggetto a movimento. Nondimeno le forze esercitano una coppia sul dipolo che tende pertanto a ruotare per allinearsi con la direzione del campo. Se $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ sono i raggi vettori delle due cariche rispetto al centro di massa del dipolo, con

$$r_1 = r_2 = \frac{d}{2}\,,$$



i momenti $\vec{\tau}_1$ e $\vec{\tau}_2$ delle due forze, rispetto al centro di massa del dipolo, hanno moduli:

$$\tau_1 = \left|\vec{r}_1 \times \vec{F}_1\right| = \frac{d}{2} qE \sin\vartheta = \left|\vec{r}_2 \times \vec{F}_2\right| = \tau_2\,;$$

inoltre $\vec{\tau}_1$ e $\vec{\tau}_2$ sono uguali sia in direzione che in verso, così risulta:

$$\vec{\tau}_1 = \vec{\tau}_2$$

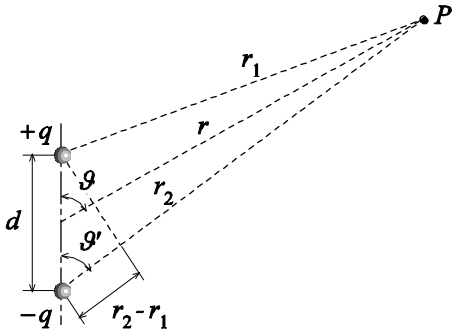
pertanto il momento totale delle forze ha modulo:

$$\tau = 2\tau_1 = 2\frac{d}{2} qE \sin\vartheta = qdE \sin\vartheta = pE \sin\vartheta$$

e vettorialmente:

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}\,.$$

Fisicamente ciò significa che il dipolo elettrico è indotto dal campo a raggiungere una posizione di equilibrio tale che $\vec{p}$ si disponga parallelo ad $\vec{E}$; in tale condizione infatti $\vec{\tau} = \vec{0}$. Questo corrisponde sia a $\vartheta = 0$ che a $\vartheta = \pi$; nel seguito proveremo che mentre il primo valore di ϑ corrisponde ad una posizione di equilibrio stabile, il secondo valore è relativo ad una posizione di equilibrio instabile.



Esempio: (*Potenziale ed energia potenziale di un dipolo elettrico*) Consideriamo un dipolo il cui momento ha intensità

$$p = qd\,;$$

il potenziale in un punto *P* posto a distanze r_1 e r_2, rispettivamente, dalla carica positiva e da quella negativa, vale:

---

[7] Si osservi che, siccome nell'esempio considerato il versore $\hat{k}$ associato al dipolo coincide col versore dell'asse *z*, è possibile esprimere il vettore campo elettrico lungo la direzione di tale asse attraverso la relazione (1.29) come:

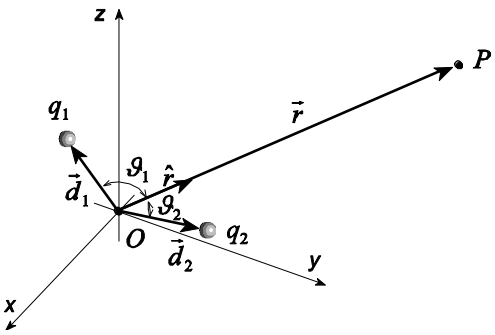
$$\vec{E} \approx \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{p\hat{k}}{z^3} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}}{z^3}\,.$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(r_2 - r_1)}{r_1 r_2}.$$

Questa espressione può essere valutata nel caso in cui il punto P sia molto distante dal dipolo, ovvero, con riferimento alla figura, per $r_1, r_2 \gg d$; in questo caso risulta:

$$r_1, r_2 \approx r,$$
$$\vartheta \approx \vartheta';$$

con tali approssimazioni il prodotto $r_1 r_2$ è circa uguale a r^2 e la differenza $r_2 - r_1$, pari a $d\cos\vartheta'$, è circa uguale a $d\cos\vartheta$. Pertanto, sostituendo nella precedente espressione, si ha:



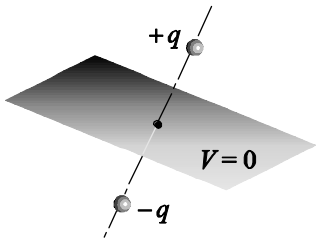
$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qd\cos\vartheta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\vartheta}{r^2}. \tag{1.30}$$

Questa espressione coincide col termine di dipolo dello sviluppo (1.26) per $N = 2$, infatti, con riferimento alla figura, in tale circostanza, si ha:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sum_{i=1}^{N} q_i d_i \cos\vartheta_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 d_1 \cos\vartheta_1 + q_2 d_2 \cos\vartheta_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1\vec{d}_1\cdot\hat{r} + q_2\vec{d}_2\cdot\hat{r}}{r^2},$$

dove $\hat{r}$ è pari a $\vec{r}/r$; se $q_1 \equiv q$ e $q_2 \equiv -q_1$, segue:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sum_{i=1}^{N} q_i d_i \cos\vartheta_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1\vec{d}_1\cdot\hat{r} + q_2\vec{d}_2\cdot\hat{r}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\vec{d}_1\cdot\hat{r} - q\vec{d}_2\cdot\hat{r}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\left(\vec{d}_1 - \vec{d}_2\right)\cdot\hat{r}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2} =$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\vartheta}{r^2},$$



essendo $\vec{p} = q\left(\vec{d}_1 - \vec{d}_2\right)$ e ϑ l'angolo tra la direzione di $\vec{r}$ e quella di $\vec{p}$. Dalla relazione (1.30) segue che il potenziale è nullo per $\vartheta = \pi/2$, ovvero nel piano equatoriale del dipolo, pertanto il campo elettrico del dipolo non compie lavoro quando una carica viene portata dall'infinito ad un punto su questo piano, attraverso un qualsiasi percorso. Infine, siccome:

$$\frac{\hat{r}}{r^2} = -\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right),$$

(si veda l'Appendice B), la relazione (1.30) può anche esprimersi come:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\vartheta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{p}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right). \tag{1.31}$$

A partire dalla relazione (1.30), facendo uso della (1.20), è possibile ricavare l'espressione generale del campo elettrico asintotico, prodotto dal dipolo in tutto lo spazio. Allo scopo risulta opportuno adoperare l'espressione del gradiente in coordinate sferiche (si veda l'Appendice B); le componenti del campo elettrico sono quindi:

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\vartheta}{r^2} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\vartheta}{r^3};$$
$$E_\vartheta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\vartheta} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\vartheta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\sin\vartheta}{r^3};$$
$$E_\phi = -\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial V}{\partial\phi} = 0.$$

Dal fatto che la componente E_ϕ del campo elettrico è nulla segue che il campo ha simmetrica cilindrica, come poteva dedursi dalla forma della distribuzione di cariche. Il modulo del campo elettrico vale pertanto:

$$E=\sqrt{E_r^{\,2}+E_\vartheta^{\,2}+E_\phi^{\,2}}=\sqrt{\left(\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\vartheta}{r^3}\right)^2+\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\sin\vartheta}{r^3}\right)^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\sqrt{4\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta}=$$
$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\sqrt{3\cos^2\vartheta+1}\,;$$

si osservi che lungo una direzione perpendicolare all'asse del dipolo e passante per il suo punto medio, corrispondente a $\vartheta=\pi/2$, l'espressione del campo è uguale alla (1.28) mentre, lungo l'asse del dipolo, per $\vartheta=0$, l'espressione è uguale alla (1.29). Consideriamo un dipolo di momento $\vec{p}$ immerso in un campo elettrico esterno $\vec{E}$; per ruotare tale dipolo di un dato angolo rispetto al campo è necessario compiere del lavoro. Tale lavoro accrescerà l'energia potenziale del sistema. Il lavoro elementare dL necessario per ruotare un momento meccanico $\vec{\tau}$ di un angolo $d\vartheta$ è pari a $\tau\, d\vartheta$ così, siccome il momento del dipolo vale in modulo $pE\sin\vartheta$ e poiché il lavoro viene trasformato in energia potenziale, si ha che per una rotazione finita da ϑ_0 a ϑ, la variazione di energia potenziale è:

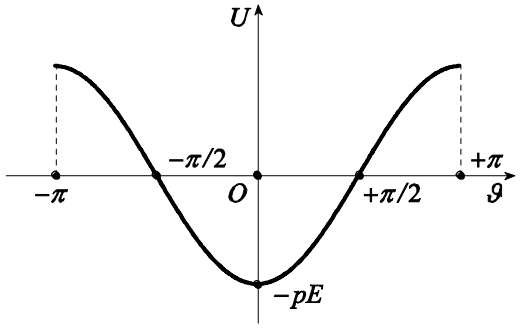
$$U-U_0=\int_{\vartheta_0}^{\vartheta}\tau d\vartheta'=\int_{\vartheta_0}^{\vartheta}pE\sin\vartheta' d\vartheta'=-pE\cos\vartheta'\Big|_{\vartheta_0}^{\vartheta}=-pE\left(\cos\vartheta-\cos\vartheta_0\right).$$

La costante ϑ_0 dipende dall'orientazione iniziale del dipolo per cui, assumendo ϑ_0 pari a $\pi/2$ e ponendo quale riferimento per l'energia potenziale $U_0=0$ per $\vartheta_0=\pi/2$, si ha:

$$U=-pE\cos\vartheta\,,$$

ovvero:

$$U=-\vec{p}\cdot\vec{E}\,.$$



Il grafico dell'energia potenziale in funzione dell'angolo ϑ mostra la presenza di un minimo per $\vartheta=0$, per cui tale angolo corrisponde ad una posizione di equilibrio stabile del dipolo nel campo elettrico.

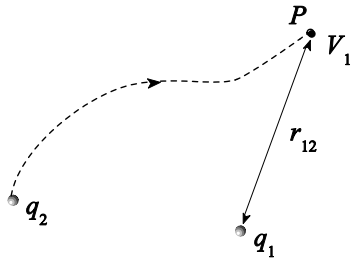
L'espressione dello sviluppo in serie di multipoli (1.26) può essere generalizzata al caso di una distribuzione continua di carica. In tale circostanza alla sommatoria sul numero di particelle della distribuzione corrisponde un integrale calcolato sul volume $\mathcal{V}$ contenente la carica con densità ρ, cioè:

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_{\mathcal{V}}\rho\, dv+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int_{\mathcal{V}}\rho d\cos\vartheta\, dv+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\int_{\mathcal{V}}\rho d^2\frac{3\cos^2\vartheta-1}{2}dv+\ldots=$$
$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r^n}\int_{\mathcal{V}}\rho d^n P_n\left(\cos\vartheta\right)dv\,.$$

in cui ρ dipende, in generale, dal punto all'interno della distribuzione di carica.

1.11 Energia del campo elettrico

Sia V_1 il potenziale determinato dalla carica q_1 nel punto P distante r_{12} da q_1. Il lavoro necessario per portare una seconda carica, q_2, dall'infinito a P vale $q_2 V_1$. Poiché per definizione tale lavoro è pari all'energia potenziale U_e del sistema quando le due cariche sono separate dalla distanza r_{12}, allora:



$$U_e = q_2 V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}} . \tag{1.32}$$

E' possibile generalizzare questa espressione ad un sistema di più cariche trovando, ad esempio, per tre cariche:

$$U_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right),$$

ovvero, per N cariche:

$$U_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N}\frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{q_j}{r_{ij}}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V_i , \tag{1.33}$$

in cui

$$V_i \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{q_j}{r_{ij}}$$

è il potenziale generato da tutte le cariche nel punto in cui si trova la carica $i-\text{esima}$, eccetto quello della carica $i-\text{esima}$ stessa. Si noti che l'energia U_e risulta indipendente dal modo in cui le cariche sono state trasportate dall'infinito alle loro posizioni finali. La relazione (1.33) può essere ulteriormente generalizzata a distribuzioni continue di carica facendo uso dello stesso approccio seguito per il potenziale. Pertanto, indicando con V il potenziale nel punto in cui è situato un elemento di carica dq di una distribuzione Q, l'energia potenziale infinitesima dovuta all'interazione di tale carica con le cariche che determinano il potenziale V risulta:

$$dU_e = \frac{1}{2} V\, dq$$

e, integrando su tutta la carica Q che costituisce la distribuzione, segue:

$$U_e = \frac{1}{2}\int_Q V\, dq . \tag{1.34}$$

Come in analoghe circostanze, il differenziale dq può essere opportunamente esplicitato in relazione al tipo di distribuzione di carica; così, se ad esempio la carica è distribuita in un volume $\mathcal{V}$ con densità ρ, risulta:

$$U_e = \frac{1}{2}\int_Q V\, dq = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}} V\rho\, dv\,. \tag{1.35}$$

La relazione (1.35) esprime l'energia potenziale di una distribuzione volumetrica continua di cariche attraverso la densità di carica e il potenziale prodotto in tutto lo spazio da tale distribuzione; d'altra parte, essendo entrambe queste quantità legate al campo elettrostatico, è possibile fornire un'espressione dell'energia potenziale attraverso il campo stesso. Dall'equazione di Poisson (1.23) segue:

$$\rho = -\varepsilon_0 \nabla^2 V$$

così, sostituendo nella (1.35) si ha:

$$U_e = \frac{1}{2}\int_Q V\, dq = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\mathcal{V}} V\,\nabla^2 V\, dv\,.$$

La funzione integranda in questa relazione può essere espressa attraverso l'identità vettoriale[8]:

$$V\nabla^2 V = \vec{\nabla}\cdot\left(V\vec{\nabla}V\right) - \left(\vec{\nabla}V\right)\cdot\left(\vec{\nabla}V\right),$$

pertanto, applicando il teorema della divergenza, si ottiene:

$$\begin{aligned} U_e &= -\frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\mathcal{V}} V\,\nabla^2 V\, dv = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\mathcal{V}}\left(\vec{\nabla}V\right)\cdot\left(\vec{\nabla}V\right) dv - \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\mathcal{V}}\vec{\nabla}\cdot\left(V\vec{\nabla}V\right) dv = \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\mathcal{V}}\left(\vec{\nabla}V\right)\cdot\left(\vec{\nabla}V\right) dv - \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\mathcal{S}}\left(V\vec{\nabla}V\right)\cdot d\vec{s}\,, \end{aligned}$$

infine, dalla (1.20) segue:

$$U_e = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\mathcal{V}} E^2\, dv - \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\mathcal{S}}\left(V\vec{\nabla}V\right)\cdot d\vec{s}\,. \tag{1.36}$$

Valutiamo gli integrali che compaiono in questa somma nel limite in cui la superficie $\mathcal{S}$ viene fatta tendere all'infinito e, di conseguenza, $\mathcal{V}$ rappresenta il volume di tutto lo spazio; supponiamo inoltre che le cariche siano localizzate a distanze reciproche finite. Per tale calcolo assumiamo, per semplicità, che $\mathcal{S}$ sia la superficie di una sfera di raggio R il cui centro è situato nell'origine del sistema di riferimento adottato. A grande distanza dalla distribuzione di carica, dalla (1.26) segue che, al primo ordine, il potenziale varia come $1/R$ e il temine $\vec{\nabla}V$, che può essere dedotto dall'applicazione del gradiente alla (1.26), varia come $1/R^2$. Per cui la funzione integranda $V\vec{\nabla}V$ varia complessivamente come $1/R^3$. Naturalmente la rapidità di diminuzione di $V\vec{\nabla}V$ sarebbe

[8] Si veda l'Appendice B per la sua dimostrazione.

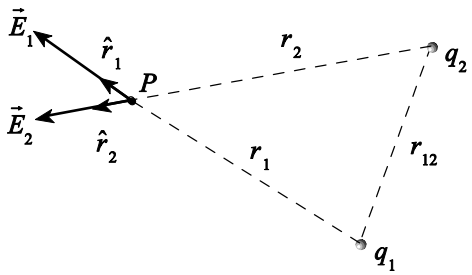
anche maggiore se il termine di monopolo dello sviluppo (1.26) fosse nullo. Poiché l'area della superficie della sfera aumenta con R^2, il secondo integrale della (1.36) diminuisce almeno come $(1/R)(1/R^2)R^2 = 1/R$. Pertanto, estendendo l'integrazione a tutto lo spazio, il secondo integrale della (1.36) si annulla e tale relazione si scrive come:

$$U_e = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{tutto\ lo\ spazio} E^2\, dv\,. \tag{1.37}$$

Questa espressione ha carattere generale e permette di associare a ciascun punto dello spazio in cui il campo elettrico assume il valore $\vec{E}$ una densità di energia pari a $\varepsilon_0 E^2/2$. L'introduzione del concetto di densità spaziale dell'energia consente un'estensione del principio di conservazione dell'energia, attribuendogli un valore *locale*. Cioè, attraverso tale estensione è possibile assumere che l'energia si conservi localmente, nel senso che ogni variazione dell'energia all'interno di una regione dello spazio deve corrispondere ad un flusso di energia attraverso i confini di tale regione.

Sebbene la relazione (1.37) risulti formalmente dedotta a partire dalla (1.33), è facile osservare che tra le due espressioni dell'energia esiste una contraddizione dovuta al fatto che, mentre la (1.37) fornisce un risultato che è sempre positivo, la (1.33) può anche fornire un risultato negativo, come accade ad esempio quando viene applicata al sistema di due cariche di segno opposto. Il motivo di tale contraddizione deriva dal fatto che le relazioni (1.36) o (1.37) contengono dei termini non dovuti all'interazione tra cariche, detti di *self–energy*, che sono assenti nella relazione (1.33).

Esempio: Per illustrare questo fatto consideriamo due cariche puntiformi q_1 e q_2 poste ad una certa distanza r_{12} (si veda la figura). Il campo elettrico nel punto P situato a distanze r_1 e r_2 rispettivamente da q_1 e q_2 vale:



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1^2}\hat{r}_1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2^2}\hat{r}_2\,.$$

Pertanto la densità di energia elettrostatica vale:

$$u_e \equiv \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}\cdot\vec{E} = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1^2}\right)^2 + \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2^2}\right)^2 + \varepsilon_0\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{q_1 q_2}{r_1^2 r_2^2}\hat{r}_1\cdot\hat{r}_2\,,$$

In questa somma, i primi due addendi sono contributi di self–energy, mentre è possibile provare che il terzo termine fornisce l'energia di interazione (1.32).

Per un sistema di cariche puntiformi, l'espressione dell'energia elettrostatica dedotta dalla (1.37) contiene, in generale, due tipi di termini: Quelli di self–energy, indipendenti dalle posizioni relative delle cariche, ed i termini corrispondenti all'interazione tra le cariche. Per tale motivo, i termini di self–energy si annullano nella determinazione di variazioni di energia corrispondenti a cambiamenti della configurazione spaziale del sistema di cariche.

Esempio: Attraverso la relazione (1.37) è possibile stabilire l'energia elettrostatica per una carica q uniformemente distribuita in una sfera di raggio R. Dalle (1.7) e (1.9) segue:

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{tutto\ lo\ spazio} E^2\, dv = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^R\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^3}r\right)^2 4\pi r^2 dr + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_R^\infty\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr = \\ &= \frac{1}{5}\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} + \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = \frac{3}{5}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}\,. \end{aligned} \tag{1.38}$$

Si noti che nel limite di una carica puntiforme, $R \to 0$, questa relazione fornisce un valore infinito. Tale risultato deriva dalla pretesa errata di costruire una carica puntiforme come aggregazione di altre cariche. Ne segue che la possibilità di attribuire una localizzazione all'energia risulta incompatibile col concetto di carica puntiforme; per risolvere tale difficoltà si può o rigettare il concetto di carica puntiforme e assumere che tutte le cariche siano distribuite in regioni spaziali estese oppure rimuovere la possibilità di una localizzazione dell'energia alle piccole scale. Entrambe le soluzioni tuttavia risultano insoddisfacenti.

Esempio: Se si ritiene che l'elettrone abbia una estensione spaziale finita, lo si può ricondurre ad una distribuzione di carica a simmetria sferica, la cui energia elettrostatica è determinabile attraverso la relazione (1.38). Assumendo che tale energia sia pari al valore dell'energia a riposo per un corpo, fornito dalla Relatività, $m_e c^2$, in cui m_e è la massa dell'elettrone e c è la velocità della luce nel vuoto, è possibile dedurre un valore per il raggio dell'elettrone:

$$\frac{3}{5}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R} = m_e c^2 ,$$

da cui segue:

$$R = \frac{3}{5}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2} .$$

Sostituendo alle differenti quantità le loro espressioni si trova per R il valore di circa $1.69\times10^{-15}\ m$. Allo stato attuale non è possibile accedere sperimentalmente a distanze inferiori a questo valore all'interno dell'elettrone e si ritiene plausibile che tale particella sia realmente fondamentale e pertanto priva di struttura. Il raggio stabilito, a meno del fattore $3/5$, viene chiamato *raggio classico* dell'elettrone, vale:

$$R_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2} \approx 2.817\times10^{-15} m$$

e viene spesso utilizzato nell'ambito della fisica atomica come unità di misura delle lunghezze.

1.12 Equazioni di Maxwell per il campo elettrostatico

Assegnata una certa distribuzione statica di carica nello spazio vuoto, di densità descritta dalla funzione $\rho = \rho(x, y, z)$, il campo elettrico soddisfa le equazioni integrali:

$$\int_{\mathcal{S}} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\mathcal{V}} \rho\, dv,$$
$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0;$$

nella prima $\mathcal{S}$ è una superficie chiusa contenente il volume $\mathcal{V}$; nella seconda $\mathcal{C}$ è una generica curva chiusa. La prima equazione è l'espressione della legge di Gauss mentre la seconda è conseguenza della conservatività del campo elettrostatico. In forma puntuale queste equazioni si scrivono:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{0}.$$

Queste relazioni sono dette equazioni di Maxwell per il campo elettrostatico. La conservatività del campo elettrostatico ne permette la sua deduzione da un potenziale V attraverso la relazione $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$; con l'introduzione del potenziale elettrostatico, entrambe le proprietà del campo elettrostatico, cioè la Legge di Gauss e la conservatività possono essere compendiate dall'equazione di Poisson:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

che, in assenza di cariche diventa l'equazione di Laplace:

$$\nabla^2 V = 0 .$$