Soluzione della prova di Geometria e Algebra del 7 febbraio 2019

1) (a) Siano $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Per il Principio di Identità dei Polinomi, per ogni $t \in \mathbb{R}$ deve aversi

$$\begin{aligned} ax(t) + by(t) + cz(t) + d = 0 &\Leftrightarrow \left(a - \frac{c}{3}\right) t^3 + (-3a + b)t^2 + (3a - c)t - a + d = 0 \\ &\Leftrightarrow b = 3a,\ c = 3a,\ d = a. \end{aligned}$$

Pertanto $\mathcal{C}$ è una curva piana contenuta nel piano $\pi : x + 3y + 3z + 1 = 0$.
(b) Il punto P si ottiene in corrispondenza di $t = 0$. Risulta

$$\dot{x}(t) = 3(t - 1)^2, \quad \dot{y}(t) = 2t, \quad \dot{z}(t) = -t^2 - 1$$

e dunque $(\dot{x}(0), \dot{y}(0), \dot{z}(0)) = (3, 0, -1)$. Pertanto la retta tangente a $\mathcal{C}$ è $r : x + 3z + 1 = y = 0$.
(c) La sfera Σ cercata ha raggio $R = d(C, \pi) = \frac{1}{\sqrt{19}}$ e quindi ha equazione

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - \frac{1}{19} = 0.$$

2) (a) La conica $\mathcal{C}$ appartiene al fascio

$$\lambda(x - y)(2x + 2y - 1) + \mu(x + 2y)(2x - y + 2) = 0, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0).$$

Imponendo il passaggio per P_4 si ricava $\mu = -\lambda$, da cui

$$\mathcal{C} : xy + x + y = 0.$$

(b) La matrice dell'equazione di $\mathcal{C}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Poiché $\det A = \frac{1}{4} \neq 0$, $\mathcal{C}$ è una conica generale. Si ha poi $D_{33} = -\frac{1}{4} < 0$, dunque $\mathcal{C}$ è un'iperbole.
(c) Il centro di $\mathcal{C}$ è $C(-1, -1)$ e gli asintoti sono $a_1 : x + 1 = 0$ e $a_2 : y + 1 = 0$.
3) (a) Per ogni $p(x), q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha

$$\begin{aligned} f(\lambda p(x) + \mu q(x)) &= \lambda p(x) + \mu q(x) + x(\lambda p(x) + \mu q(x))' - \frac{1}{2}x(\lambda p(x) + \mu q(x))'' \\ &= \lambda(p(x) + xp'(x) - \frac{1}{2}xp'') + \mu(q(x) + xq'(x) - \frac{1}{2}xq'') \\ &= \lambda f(p(x)) + \mu f(q(x)), \end{aligned}$$

pertanto f è lineare.
(b) La matrice di f rispetto alla base $\{1, x, x^2\}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Poiché $\det A = 6 \neq 0$, f è un isomorfismo.
(c) f è semplice in quanto ha 3 autovalori distinti.
4) (a) Considerati due generici vettori $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\vec{y} = (x_1, x_2, x_3)$ di $\mathcal{R}^3$ risulta

$$\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}\left(Q(\vec{x} + \vec{y}) - Q(\vec{x}) - Q(\vec{y})\right) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2 + x_3y_3.$$

(b) Una base di $\mathbb{R}^3$ coniugata rispetto a φ è costituita dai vettori

$$\vec{v}_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \quad \vec{v}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \vec{v}_3 = \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right).$$

Rispetto a tale base si ottiene la seguente forma canonica rispetto a φ:

$$Q(\vec{x}) = 3\tilde{x}_1{}^2.$$

Posti

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= \frac{\vec{v}_1}{\sqrt{3}}, \\ \vec{E}_2 &= \vec{v}_2, \\ \vec{E}_3 &= \vec{v}_3, \end{aligned}$$

si ottiene la forma normale rispetto alla base $\{\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3\}$

$$Q(\vec{x}) = X_1^2.$$

(c) La segnatura di Q è $(1, 0)$.