Soluzione della prova di Geometria e Algebra del 6 giugno 2019

1) (a) Il parallelo descritto dal generico punto $R(t,t,t)$ di r è dato da

$$\mathcal{P} = \Sigma \cap \pi : \begin{cases} x^2+y^2+z^2 &= 3t^2 \\ z &= t \end{cases}$$

Pertanto l'equazione della superficie Σ è

$$\Sigma : x^2+y^2-2z^2=0.$$

(b) Il piano cercato è chiaramente $\pi : z-1=0$.
(c) Il piano tangente a Σ in P è $\alpha : x+y-2z=0$, dunque la retta tangente a $\mathcal{C}$ in P è

$$t = \alpha \cap \pi : x+y-2z = z-1 = 0.$$

2) (a) La conica $\mathcal{C}$ appartiene al fascio

$$\lambda(x+y)(2x+2y-1)+\mu(x+2y)(2x+y)=0, \qquad \lambda,\mu \in \mathbb{R}, \quad (\lambda,\mu)\neq(0,0).$$

Imponendo il passaggio per P_3 si ricava $\mu=-\lambda$, da cui

$$\mathcal{C} : xy+x+y=0.$$

(b) La matrice dell'equazione di $\mathcal{C}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Poiché $\det A = \frac{1}{4} \neq 0$, $\mathcal{C}$ è una conica generale. Si ha poi $D_{33} = -\frac{1}{4} < 0$, dunque $\mathcal{C}$ è un'iperbole.
(c) Il centro di $\mathcal{C}$ è $C(-1,-1)$ e gli assi sono $a_1 : x-y=0$ e $a_2 : x+y+2=0$.
3) (a) La matrice dell'endomorfismo f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} -3/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Poiché $\det A = \frac{1}{8}$, f è un isomorfismo.
(b) Risulta

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 8 \\ -2 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

quindi

$$f^{-1} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad f^{-1}(x,y,z) = (-2x-4y+8z, -2x-6y+12z, 2z).$$

(c) Si ha $V = \mathcal{L}((1,0,1),(0,1,0))$ e quindi $f(V) = \mathcal{L}((-\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}),(1,-\frac{1}{2},0))$.
4) (a) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 0 & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha & 0 \\ \alpha & \alpha & -1 \end{pmatrix}$$

Poiché deve aversi $AA^T = I = A^TA$ segue immediatamente $\alpha=0$.
(b) Lo spazio dei punti fissi di f è

$$U = \mathcal{L}((1,0,0),(0,1,0)),$$

pertanto f è la simmetria rispetto al piano $z=0$.
(c) Chiaramente si ha

$$U^{\perp} = \mathcal{L}((0,0,1)).$$