Soluzione della prova di Geometria e Algebra del 24 gennaio 2019

1) (a) Le rette r ed s non sono né parallele né incidenti, pertanto esse sono sghembe.
(b) Il generico punto di r è $P(t, 4-t, 0)$ e quello di s è $Q(1, 1, t')$. Imponendo che il vettore $P-Q = (t-1, 3-t, -t')$ sia ortogonale sia a r che a s si ottiene $t = 2$ e $t' = 0$, dunque $P(2, 2, 0)$ e $Q(1, 1, 0)$. Pertanto la retta di minima distanza tra r e s è la retta passante per tali punti, ossia $\bar{r} : x - y = z = 0$.
(c) Il piano cercato è perpendicolare alla retta $\bar{r}$ e passante per il punto medio $M(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ tra P e Q, ossia $\pi : x + y - 3 = 0$.

2) (a) Per ogni $k \in \mathbb{R}$, la matrice dell'equazione di $\mathcal{C}_k$ è

$$A_k = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & k & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Risulta $\det A_k = -16 \neq 0$, dunque $\mathcal{C}_k$ è una conica generale per ogni $k \in \mathbb{R}$. Si ha poi $D_{33} = 4k$, da cui segue

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_k \text{ ellisse } &\Leftrightarrow k > 0; \\ \mathcal{C}_k \text{ iperbole } &\Leftrightarrow k < 0; \\ \mathcal{C}_k \text{ parabola } &\Leftrightarrow k = 0. \end{aligned}$$

(b) Il centro della conica $\mathcal{C}_1$ è $C(-1, 2)$.
(c) Gli assi di $\mathcal{C}_1$ sono $a_1 : x + 1 = 0$ e $a_2 : y - 2 = 0$.

3) (a) La matrice dell'endomorfismo f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Poiché $\det A = 1 \neq 0$, f è un isomorfismo.
(b) Risulta

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi

$$f^{-1} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad f^{-1}(x, y, z) = (-x - 2y + 4z, -x - 3y + 6z, z).$$

(c) Si ha $V = \mathcal{L}((1, -2, 0), (0, 0, 1))$ e quindi $f(V) = \mathcal{L}((-7, 3, 0), (0, 2, 1))$.

4) (a) Per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ risulta

$$\begin{aligned} &Q(x, y, z) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2yz + 2z^2 = (x - y)^2 + (y - z)^2 + z^2 \geq 0; \\ &Q(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0), \end{aligned}$$

pertanto g è un prodotto scalare.
(b) Partendo dalla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e utilizzando il metodo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt si perviene alla seguente base ortonornale rispetto a g:

$$\vec{u}_1 = (1, 0, 0), \qquad \vec{u}_2 = (1, 1, 0), \qquad \vec{u}_3 = (1, 1, 1).$$

(c) Si ha

$$\cos \widehat{\vec{v}\vec{w}} = \frac{g(\vec{v}, \vec{w})}{||\vec{v}||_g \cdot ||\vec{w}||_g} = \frac{1}{2},$$

dunque

$$\widehat{\vec{v}\vec{w}} = \frac{\pi}{3}.$$