Soluzione della prova di Geometria e Algebra del 20 giugno 2019

1) (a) Le rette r ed s non sono né parallele né incidenti, pertanto esse sono sghembe.
(b) Il generico punto di r è della forma $P(t,-t,2)$ mentre quello di s è della forma $Q(t',t',t')$. Imponendo che il vettore $P-Q$ sia ortogonale ad entrambe le rette si ottiene $t=0$ e $t'=\frac{2}{3}$, dunque $P(0,0,2)$ e $Q(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$. La retta di minima distanza è dunque data dalla retta per tali punti, ossia $\hat{r}: x-y=2x+z-2=0$.
(c) Il piano contenente s e passante per l'origine è $\pi: x+y=0$; il piano ortogonale a s e passante per A è $\pi_1: x-y=0$; il piano assiale del segmento AO è $\pi_2: z-1=0$. L'intersezione di tali punti è il punto $C(0,0,1)$. La sfera di centro C e raggio $R=d(C,O)=1$ ha equazione $\Sigma: x^2+y^2+z^2-2z=0$. La circonferenza cercata è dunque

$$\mathcal{C}=\Sigma\cap\pi:\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2z &=0\\ x+y &=0\end{cases}$$

2) (a) Per ogni $k\in\mathbb{R}$, la matrice dell'equazione di $\mathcal{C}_k$ è

$$A=\begin{pmatrix} 5k & 3 & 0\\ 3 & 5k & 0\\ 0 & 0 & -8(k+1)\end{pmatrix}$$

la quale ha rango 3 per ogni $k\in\mathbb{R}\{-1,-\frac{3}{5},\frac{3}{5}\}$ e rango 2 per $k=-1,\pm\frac{3}{5}$. Pertanto $\mathcal{C}_k$ è generale per ogni $k\in\mathbb{R}\{-1,-\frac{3}{5},\frac{3}{5}\}$ e semplicemente degenere per $k=-1,\pm\frac{3}{5}$. Si ha poi $D_{33}=25k^2-9$ e dunque (per $k\neq-1,\pm\frac{3}{5}$):

$$\mathcal{C}_k \text{ ellisse} \Longleftrightarrow \quad k<-1 \text{ oppure } -1<k<-\frac{3}{5} \text{ oppure } k>\frac{3}{5};$$
$$\mathcal{C}_k \text{ iperbole} \Longleftrightarrow \quad -\frac{3}{5}<k<\frac{3}{5}.$$

(b) Il centro di $\mathcal{C}_1: 5x^2+5y^2+6xy-16=0$ è l'origine.
(c) Gli assi di $\mathcal{C}_1$ sono $a_1: x-y=0$ e $a_2: x+y=0$.
3) (a) La matrice dell'endomorfismo f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ 7/4 & 1/4 & -7/2\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Poiché $\det A=1$, f è un isomorfismo. Risulta

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0\\ -7/2 & 4 & 7\\ 0 & 0 & 1/2\end{pmatrix}$$

quindi

$$f^{-1}:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3, \qquad f^{-1}(x,y,z)=(\frac{1}{2}x,-\frac{7}{2}x+4y+7z,\frac{1}{2}z).$$

(b) Gli autovalori di f sono $\lambda_1=2$ (di molteplicità algebrica 2) e $\lambda_2=\frac{1}{4}$ (di molteplicità algebrica 1). I relativi autospazi sono $V(2)=\mathcal{L}((1,1,0)),(0,-2,1))$ e $V(\frac{1}{4})=\mathcal{L}((0,1,0)))$. Poiché $\dim V(2)=2$ e $\dim V(\frac{1}{4})=1$, f è semplice.
(c) Si ha $V=\mathcal{L}((1,1,0),(2,0,1))$ e quindi $f(V)=\mathcal{L}((2,2,0),(4,0,2))=V$.
4) (a) Per ogni $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ risulta

$$Q(x,y,z)=3x^2+y^2+2xy+2xz+z^2=x^2+(x+y)^2+(x+z)^2\geq 0;$$
$$Q(x,y,z)=0\Leftrightarrow \quad (x,y,z)=(0,0,0).$$

Pertanto g è un prodotto scalare.
(b) Partendo dalla base canonica di $\in\mathbb{R}^3$ e utilizzando il metodo di ortonormalizzazione di Gram- Schmidt si perviene alla seguente base ortonornale rispetto a g:

$$\vec{u}_1=\Big(\frac{\sqrt{3}}{3},0,0\Big),\ \ \vec{u}_2=\Big(-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{2},0\Big),\ \ \vec{u}_3=\Big(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\Big).$$

(c) Risulta

$$\cos\hat{\vec{v}\vec{w}}=\frac{g(\vec{v},\vec{w})}{||\vec{v}||_g\cdot||\vec{w}|_g}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

e dunque $\hat{\vec{v}\vec{w}}=\frac{\pi}{4}$.