Soluzione della prova di Geometria e Algebra dell'11 luglio 2019

1) (a) La retta per P perpendicolare al piano α è $r : 12x + 5z - 60 = y = 0$. Il centro di Σ è dunque dato da $r \cap \beta = \{C\}$, dove $C(0, 0, 12)$. La sfera Σ ha inoltre raggio $R = d(C, P) = 13$ e dunque

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 24z - 25 = 0.$$

(b) La retta per C e perpendicolare a π è chiaramente l'asse z. Il centro C' della circonferenza $\mathcal{C}$ è dunque ottenuto intersecando tale retta con π, così C' coincide con l'origine O. Inoltre, il raggio di $\mathcal{C}$ è dato da $\sqrt{R^2 - d(C, C')^2} = 5$.
(c) La retta tangente a $\mathcal{C}$ in P è ovviamente $\bar{r} = \alpha \cap \pi : x - 5 = z = 0$.

2) (a) La conica $\mathcal{C}$ appartiene al fascio

$$\lambda(x + y - 2)(x + y + 2) + \mu(x - y)^2 = 0, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0).$$

Imponendo il passaggio per il punto P si ricava $\lambda = 4\mu$, da cui

$$\mathcal{C} : 5x^2 + 5y^2 + 6xy - 16 = 0$$

(b) La matrice dell'equazione di $\mathcal{C}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \end{pmatrix}$$

Poiché $\det A = -256 \neq 0$, $\mathcal{C}$ è una conica generale. Si ha poi $D_{33} = 16 > 0$, dunque $\mathcal{C}$ è un'ellisse.
(c) Il centro di $\mathcal{C}$ è l'origine e gli assi sono dati da $a_1 : x - y = 0$ e $a_2 : x + y = 0$.

3) (a) Rispetto alla base canonica $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ deve aversi:

$$\begin{cases} f(\vec{e}_1) - f(\vec{e}_2) & = (-1, 1, 0) \\ f(\vec{e}_1) - f(\vec{e}_3) & = (-1, 0, 1) \\ 2f(\vec{e}_1) + f(\vec{e}_2) & = (4, 5, 6) \end{cases}$$

da cui segue

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad f(x, y, z) = (x + 2y + 2z, 2x + y + 2z, 2x + 2y + z).$$

(b) La matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Poichè $\det A = 5 \neq 0$, A è invertibile e f è un isomorfismo.
(c) Poichè A è una matrice reale simmetrica essa è diagonalizzabile e dunque f è semplice.

4) (a) La matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Poiché $AA^T = I = A^T A$, A è ortogonale e f è un'isometria.
(b) Lo spazio dei punti fissi di f è $U = \mathcal{L}((0, 0, 1))$, pertanto f è una rotazione intorno all'asse z.
(c) Chiaramente risulta

$$U^\perp = \mathcal{L}((1, 0, 0), (0, 1, 0))).$$