Soluzione della prova di Geometria e Algebra del 10 settembre 2019

1) (a) Siano $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Per il Principio di Identità dei Polinomi, per ogni $t \in \mathbb{R}$ deve aversi

$$ax(t) + by(t) + cz(t) + d = 0 \Leftrightarrow (-a + c)\,t^3 + 3(b - c)t^2 + 3(-b + c)t + a + b - c + d = 0$$
$$\Leftrightarrow a = b = c = -d.$$

Pertanto $\mathcal{C}$ è una curva piana contenuta nel piano $\pi : x + y + z - 1 = 0$.
(b) Il punto P si ottiene in corrispondenza di $t = 1$. Risulta $(\dot{x}(1), \dot{y}(1), \dot{z}(1)) = (-3, 3, 0)$, dunque la retta tangente a $\mathcal{C}$ in P è $r : x + y - 1 = z = 0$.
(c) Poiché $P, Q \in r$ e, inoltre, il centro C della sfera appartiene alla stessa retta, è chiaro che C coincide col punto medio tra P e Q, dunque $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$. La sfera Σ cercata ha raggio $R = d(C, P) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e quindi ha equazione

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - x - y = 0.$$

2) (a) La conica $\mathcal{C}$ appartiene al fascio

$$\lambda x(x + 3y + 1) + \mu(y + 1)(3x + y + 1) = 0, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0).$$

Imponendo il passaggio per D si ricava $\mu = -\lambda$, da cui

$$\mathcal{C} : x^2 - y^2 - 2x - 2y - 1 = 0.$$

(b) La matrice dell'equazione di $\mathcal{C}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Poiché $\det A = 1 \neq 0$, $\mathcal{C}$ è una conica generale. Si ha poi $D_{33} = -1 < 0$, dunque $\mathcal{C}$ è un'iperbole.
(c) Il centro di $\mathcal{C}$ è $C(1, -1)$ e gli asintoti sono $a_1 : x + y = 0$ e $a_2 : x - y - 2 = 0$.

3) (a) Rispetto alla base canonica $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ deve aversi:

$$\begin{cases} f(\vec{e}_1) - f(\vec{e}_2) + 2f(\vec{e}_3) & = (0, 0, 0) \\ \qquad\qquad\qquad -f(\vec{e}_3) & = (1, -1, 0) \\ \qquad f(\vec{e}_1) + f(\vec{e}_2) + & = (2, 0, -4). \end{cases}$$

da cui segue

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad f(x, y, z) = (2x - z, -x + y + z, -2x - 2y)\,.$$

(b) Si ha $\ker f = \mathcal{L}((1, -1, 2))$. Per il Teorema Fondamentale dell'Algebra Lineare si ha $\dim \mathrm{Im}(f) = 2$, da cui concludiamo che

$$\mathrm{Im}(f) = \mathcal{L}((0, 1, -2), (-1, 1, 0)) = \{(x, y, z) \in R^3 |\, 2x + 2y + z = 0\}.$$

(c) f risulta essere semplice in quanto ha 3 autovalori distinti: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$.

4) (a) Considerati due generici vettori $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\vec{y} = (x_1, x_2, x_3)$ di $\mathbb{R}^3$ risulta

$$\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}\left(Q(\vec{x} + \vec{y}) - Q(\vec{x}) - Q(\vec{y})\right) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

(b) Una base di $\mathbb{R}^3$ coniugata rispetto a φ è costituita dai vettori

$$\vec{v}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \quad \vec{v}_2 = (0, 0, 1) \quad \vec{v}_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right).$$

Rispetto a tale base si ottiene la seguente forma canonica rispetto a φ:

$$Q(\vec{x}) = 2\tilde{x_1}^2 + \tilde{x_2}^2.$$

Posti

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\sqrt{2}},$$
$$\vec{E}_2 = \vec{v}_2,$$
$$\vec{E}_3 = \vec{v}_3,$$

si ottiene la forma normale rispetto alla base $\{\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3\}$:

$$Q(\vec{x}) = X_1^2 + X_2^2.$$

(c) La segnatura di Q è $(2, 0)$.