Soluzione della prova di Geometria e Algebra del 10 gennaio 2019

1) (a) Il piano per P perpendicolare alla retta r è $\alpha : x - y - 1 = 0$. Intersecando α con la retta r si ottiene il centro $C(1,0,0)$ della sfera Σ. Il raggio di Σ è dato da $R = d(C,P) = \sqrt{2}$, dunque la sfera cercata è

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 1 = 0.$$

(b) Il centro della circonferenza $\mathcal{C}$ richiesta coincide con C. Il piano contenente la retta r e passante per C è $\pi : z = 0$ e quindi la circonferenza richiesta è

$$\mathcal{C} = \Sigma \cap \pi : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 1 & = 0 \\ z = 0 & = 0 \end{cases}$$

(c) Il punto diametralmente opposto a P è il simmetrico di tale punto rispetto a C, ossia $Q(0,-1,0)$. Poiché $\vec{CP} = (1,1,0)$, il piano tangente a Σ in Q è $\beta : x + y + 1 = 0$.

2) (a) La conica $\mathcal{C}$ appartiene al fascio

$$\lambda(y+2)y + \mu(x-2)^2 = 0, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad (\lambda, \mu) \neq (0,0).$$

Imponendo il passaggio per il punto R si ricava $\lambda = 4\mu$, da cui

$$\mathcal{C} : x^2 + 4y^2 - 4x + 8y + 4 = 0$$

(b) La matrice dell'equazione di $\mathcal{C}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Poiché $\det A = -16 \neq 0$, $\mathcal{C}$ è una conica generale. Si ha poi $D_{33} = 4 > 0$, dunque $\mathcal{C}$ è un'ellisse.
(c) Il centro di $\mathcal{C}$ è $C(2,-1)$ e gli assi sono dati da $a_1 : x - 2 = 0$ e $a_2 : y + 1 = 0$. Infine, i vertici di $\mathcal{C}$ sono $V_1(2,0)$, $V_2(2,-2)$, $V_3(0,-1)$ e $V_4(4,-1)$.

3) (a) Rispetto alla base canonica $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ deve aversi:

$$\begin{cases} f(\vec{e}_1) - f(\vec{e}_2) & = (0,-1,0) \\ 3f(\vec{e}_1) - f(\vec{e}_2) + 3f(\vec{e}_3) & = (1,0,1) \\ f(\vec{e}_1) + f(\vec{e}_2) + 2f(\vec{e}_3) & = (1,1,2) \end{cases}$$

da cui segue

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y, -x + z, 2x + 2y - z\right).$$

(b) f è semplice in quanto ha 3 autovalori distinti: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{-3+\sqrt{17}}{4}$, $\lambda_3 = \frac{-3-\sqrt{17}}{4}$.
(c) Per il punto precedente f non ammette l'autovalore nullo, dunque $\ker f = \{\vec{0}\}$ e f è iniettiva. Poiché f è un endomorfismo di uno spazio di dimensione finita, segue che f è un isomorfismo.

4) (a) La matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 & 0 \\ 4/5 & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Poiché $AA^T = I = A^T A$, A è ortogonale e f è un'isometria.
(b) Lo spazio dei punti fissi di f è

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\, x - 2y = 0\} = \mathcal{L}((2,1,0),(0,0,1)),$$

pertanto f è una simmetria.
(c) Risulta

$$U^{\perp} = \mathcal{L}((1,-2,0))).$$