

**C.d.L. in Ingegneria dell'Informazione**  
**Prova di Geometria e Algebra - 7 Febbraio 2019**  
**Tempo a disposizione: 3h 30min**

**1) Geometria Analitica dello Spazio.** Fissato nello spazio ordinario un sistema di riferimento cartesiano  $\mathcal{RC}(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ , si consideri la curva:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = (t - 1)^3, \\ y = t^2, \\ z = -t \left( \frac{t^2}{3} + 1 \right). \end{cases}$$

- (a) Verificare che  $\mathcal{C}$  è una curva piana e trovare il piano  $\pi$  che la contiene.
- (b) Determinare la retta  $r$  tangente a  $\mathcal{C}$  nel punto  $P(-1, 0, 0)$ .
- (c) Trovare la sfera con centro nell'origine e tangente al piano  $\pi$ .

**2) Coniche.** Sia  $\mathcal{C}$  la conica passante per l'origine e per i punti  $P_1(-2, -2)$ ,  $P_2(1, -\frac{1}{2})$ ,  $P_3(-\frac{1}{2}, 1)$ ,  $P_4(-\frac{2}{3}, 2)$ .

- (a) Determinare l'equazione di  $\mathcal{C}$ .
- (b) Classificare  $\mathcal{C}$  dal punto di vista proiettivo e affine.
- (c) Trovare centro ed eventuali asintoti di  $\mathcal{C}$ .

**3) Funzioni Lineari.** Si consideri la funzione

$$f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x], \quad p(x) \mapsto p(x) + xp'(x) - \frac{1}{2}xp''(x).$$

- (a) Dimostrare che la funzione  $f$  è lineare.
- (b) Stabilire se  $f$  è un isomorfismo.
- (c) Stabilire se  $f$  è semplice.

**4) Spazi euclidei.** Sia  $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  la forma bilineare simmetrica la cui forma quadratica associata è  $Q(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$ .

- (a) Determinare  $\varphi$ .
- (b) Trovare una forma canonica e la forma normale di  $Q$ .
- (c) Determinare la segnatura di  $Q$ .

**Quesiti di Teoria.**

1. Enunciare e dimostrare il Teorema Fondamentale dell'Algebra Lineare.
2. Sia  $A \in \mathbb{K}^{n,n}$  una matrice invertibile. Provare che  $A^T$  è invertibile e  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .

**N.B.:** La prova sarà superata se verrà raggiunta la sufficienza, separatamente, per la parte relativa agli esercizi e per quella relativa alla teoria. Tutti i procedimenti devono essere brevemente giustificati. Costituirà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.