# C.d.L. in Ingegneria dell'Informazione
# Prova di Geometria e Algebra - 6 Giugno 2019
# Tempo a disposizione: 3h 30min

**1) Geometria Analitica dello Spazio.** Fissato nello spazio ordinario un sistema di riferimento cartesiano $\mathcal{RC}(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, si consideri la retta $r : x - y = x - z = 0$.

(a) Determinare la superficie $\Sigma$ generata dalla rotazione di $r$ intorno all'asse $z$.

(b) Trovare il piano $\pi$ perpendicolare all'asse $z$ e passante per il punto $P(1, 1, 1)$.

(c) Trovare la retta tangente alla curva $\mathcal{C} = \Sigma \cap \pi$ nel punto $P$.

**2) Coniche.** Sia $\mathcal{C}$ la conica tangente nell'origine alla retta $r : x + y = 0$ e passante per i punti $P_1(1, -\frac{1}{2})$, $P_2(-\frac{1}{2}, 1)$ e $P_3(-2, -2)$.

(a) Determinare l'equazione di $\mathcal{C}$.

(b) Classificare $\mathcal{C}$ dal punto di vista proiettivo e affine.

(c) Trovare centro ed assi di $\mathcal{C}$.

**3) Funzioni Lineari.** Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$f(x, y, z) = (-\frac{3}{2}x + y, \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + z, \frac{1}{2}z).$$

(a) Provare che $f$ è un isomorfismo.

(b) Trovare $f^{-1}$.

(c) Determinare l'immagine tramite $f$ del sottospazio $V = \{(x, y, z) | x - z = 0\}$.

**4) Spazi euclidei.** Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con la struttura euclidea standard e, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da

$$f(x, y, z) = \big((1 - \alpha)x + \alpha z, \alpha x + (1 - \alpha)y, \alpha x + \alpha y - z\big).$$

(a) Determinare l'unico valore di $\alpha$ per cui $f$ è un'isometria.

(b) Per il valore di $\alpha$ trovato nel punto precedente, trovare il sottospazio $U$ dei punti fissi di $f$ ed interpretare $f$ geometricamente.

(c) Determinare $U^{\perp}$.

**Quesiti di Teoria.**

1. Enunciare e dimostrare il Teorema della Disuguaglianza di Schwarz.
2. Provare che due matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.

**N.B.: La prova sarà superata se verrà raggiunta la sufficienza, separatamente, per la parte relativa agli esercizi e per quella relativa alla teoria. Tutti i procedimenti devono essere brevemente giustificati. Costituirà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.**