

**C.d.L. in Ingegneria dell'Informazione**  
**Prova di Geometria e Algebra - 24 gennaio 2019**  
**Tempo a disposizione: 3h 30min**

**1) Geometria Analitica dello Spazio.** Fissato nello spazio ordinario un sistema di riferimento cartesiano  $\mathcal{RC}(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ , siano date le rette:

$$r := \begin{cases} x = t \\ y = 4 - t \\ z = 0. \end{cases} \quad s := \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = t'. \end{cases}$$

- (a) Verificare che le rette  $r$  ed  $s$  sono sghembe.
- (b) Trovare la retta di minima distanza tra  $r$  ed  $s$ .
- (c) Determinare il piano parallelo ad  $r$  ed  $s$  equidistante da tali rette.

**2) Coniche.** Al variare di  $k \in \mathbb{R}$  si consideri la conica

$$\mathcal{C}_k : 4x^2 + ky^2 + 8x - 4y + 4 = 0.$$

- (a) Per ogni  $k \in \mathbb{R}$  si classifichi  $\mathcal{C}_k$  dal punto di vista proiettivo ed affine.
- (b) Determinare il centro della conica  $\mathcal{C}_1$ .
- (c) Trovare gli assi della conica  $\mathcal{C}_1$ .

**3) Funzioni Lineari.** Si consideri l'endomorfismo  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definito da

$$f(x, y, z) = (-3x + 2y, x - y + 2z, z).$$

- (a) Provare che  $f$  è un isomorfismo.
- (b) Trovare  $f^{-1}$ .
- (c) Determinare l'immagine tramite  $f$  del sottospazio  $V = \{(x, y, z) | 2x + y = 0\}$ .

**4) Spazi euclidei.** Si consideri la forma bilineare simmetrica  $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da:

$$g((x, y, z), (x', y', z')) = xx' - xy' - yx' + 2yy' - yz' - zy' + 2zz'.$$

- (a) Provare che  $g$  è un prodotto scalare.
- (b) Trovare una base di  $\mathbb{R}^3$  ortonormale rispetto a  $g$ .
- (c) Determinare l'angolo tra i vettori  $\vec{v} = (0, -1, 0)$  e  $\vec{w} = (0, 0, 1)$  rispetto a  $g$ .

**Quesiti di Teoria.**

1. Enunciare e dimostrare il Teorema della Disuguaglianza di Minkowski.
2. Provare che due matrici simili  $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$  hanno lo stesso determinante.

**N.B.:** La prova sarà superata se verrà raggiunta la sufficienza, separatamente, per la parte relativa agli esercizi e per quella relativa alla teoria. Tutti i procedimenti devono essere brevemente giustificati. Costituirà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.