

C.d.L. in Ingegneria dell'Informazione
Prova di Geometria e Algebra - 20 giugno 2019
Tempo a disposizione: 3h 30min

1) Geometria Analitica dello Spazio. Fissato nello spazio ordinario un sistema di riferimento cartesiano $\mathcal{RC}(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, siano date le rette $r : x + y - 2z + 4 = z - 2 = 0$ ed $s : x - z = y - z = 0$.

- (a) Verificare che le rette r ed s sono sghembe.
- (b) Determinare la retta di minima distanza tra r ed s .
- (c) Determinare la circonferenza \mathcal{C} tangente a r nel punto $A(0, 0, 2)$ e passante per l'origine.

2) Coniche. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si consideri la conica

$$\mathcal{C}_k : 5kx^2 + 5ky^2 + 6xy - 8(k + 1) = 0.$$

- (a) Per ogni $k \in \mathbb{R}$ si classifichi \mathcal{C}_k dal punto di vista affine e proiettivo.
- (b) Determinare il centro della conica \mathcal{C}_1 .
- (c) Trovare gli assi della conica \mathcal{C}_1 .

3) Funzioni Lineari. Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito da

$$f(x, y, z) = \left(2x, \frac{7}{4}x + \frac{1}{4}y - \frac{7}{2}z, 2z\right).$$

- (a) Provare che f è un isomorfismo e trovare f^{-1} .
- (b) Stabilire se f è semplice.
- (c) Determinare l'immagine tramite f del sottospazio $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - 2z = 0\}$.

4) Spazi euclidei. Si consideri la forma bilineare simmetrica $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$g((x, y, z), (x', y', z')) = 3xx' + yy' + xy' + yx' + xz' + zx' + zz'.$$

- (a) Provare che g è un prodotto scalare.
- (b) Trovare una base ortonormale di \mathbb{R}^3 rispetto a g .
- (c) Determinare l'angolo tra i vettori $\vec{v} = (0, 1, 1)$ e $\vec{w} = (0, 1, 0)$.

Quesiti di Teoria.

1. Siano V e W spazi vettoriali di dimensione finita su un campo \mathbb{K} . Dimostrare che

$$V \cong W \iff \dim V = \dim W.$$

2. Siano $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ due matrici ortogonali. Provare che AB è ortogonale.

N.B.: La prova sarà superata se verrà raggiunta la sufficienza, separatamente, per la parte relativa agli esercizi e per quella relativa alla teoria. Tutti i procedimenti devono essere giustificati. Costituirà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.