C.d.L. in Ingegneria dell'Informazione
Prova di Geometria e Algebra - 11 luglio 2019
Tempo a disposizione: 3h 30min

1) Geometria Analitica dello Spazio. Fissato nello spazio ordinario un sistema di riferimento cartesiano $\mathcal{RC}(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, si considerino i piani $\alpha : 5x - 12z - 25 = 0$, $\beta : x + y - z + 12 = 0$ e $\pi : z = 0$.

(a) Trovare la sfera Σ tangente ad α nel punto $P(5, 0, 0)$ ed avente il centro sul piano β.

(b) Determinare il centro e il raggio della circonferenza $\mathcal{C} = \Sigma \cap \pi$.

(c) Trovare la retta tangente a $\mathcal{C}$ nel punto P.

2) Coniche. Sia $\mathcal{C}$ la conica tangente nel punto $A(1, 1)$ alla retta $r : x + y - 2 = 0$, tangente nel punto $B(-1, -1)$ alla retta $s : x + y + 2 = 0$ e passante per il punto $P(-2, 2)$.

(a) Determinare l'equazione di $\mathcal{C}$.

(b) Classificare $\mathcal{C}$ dal punto di vista affine e proiettivo.

(c) Trovare centro e assi di $\mathcal{C}$.

3) Funzioni Lineari. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo avente $\vec{v} = (1, -1, 0)$ e $\vec{w} = (1, 0, -1)$ come autovettori associati all'autovalore -1 e soddisfacente la condizione $f(2, 1, 0) = (4, 5, 6)$.

(a) Determinare f esplicitamente.

(b) Stabilire se f è un isomorfismo.

(c) Dire se f è semplice.

4) Spazi euclidei. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con la struttura euclidea standard e l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$f(x, y, z) = \Big(\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y, \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y, z\Big).$$

(a) Provare che f è un'isometria.

(b) Determinare il sottospazio U dei punti fissi di f ed interpretare f geometricamente.

(c) Determinare $U^\perp$.

Quesiti di Teoria.

1. Siano V, W, Z spazi vettoriali su un campo K e siano $f : V \longrightarrow W$ e $g : W \longrightarrow Z$ due funzioni lineari. Provare che la funzione composta $g \circ f : V \longrightarrow Z$ è lineare.

2. Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$. Dimostrare che gli autovalori di A sono le radici in $\mathbb{K}$ del polinomio caratteristico $P_A(\lambda)$ di A.

N.B.: La prova sarà superata se verrà raggiunta la sufficienza, separatamente, per la parte relativa agli esercizi e per quella relativa alla teoria. Tutti i procedimenti devono essere brevemente giustificati. Costituirà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.