

C.d.L. in Ingegneria dell'Informazione
Prova di Geometria e Algebra - 10 Settembre 2019
Tempo a disposizione: 3h 30min

1) Geometria Analitica dello Spazio. Fissato nello spazio ordinario un sistema di riferimento cartesiano $\mathcal{RC}(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, si consideri la curva:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = 1 - t^3 \\ y = 3t^2 - 3t + 1 \\ z = (t - 1)^3. \end{cases}$$

- (a) Verificare che \mathcal{C} è una curva piana e trovare il piano π che la contiene.
- (b) Determinare la retta r tangente a \mathcal{C} nel punto $P(0, 1, 0)$.
- (c) Determinare la sfera passante per P e per il punto $Q(1, 0, 0)$ e avente centro sulla retta r .

2) Coniche. Sia \mathcal{C} la conica tangente all'asse y nel punto $A(0, -1)$ e passante per i punti $B(2, -1)$, $C(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ e $D(\frac{9}{4}, -\frac{7}{4})$.

- (a) Determinare l'equazione di \mathcal{C} .
- (b) Classificare \mathcal{C} dal punto di vista affine e proiettivo.
- (c) Trovare centro ed eventuali asintoti di \mathcal{C} .

3) Funzioni Lineari. Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo tale che $\vec{v} = (1, -1, 2)$ appartenga a $\ker f$ e, inoltre, $f(0, 0, -1) = (1, -1, 0)$ e $f(1, 1, 0) = (2, 0, -4)$.

- (a) Determinare l'espressione esplicita di f .
- (b) Determinare $\ker f$ e $\text{Im} f$.
- (c) Stabilire se f è semplice.

4) Spazi euclidei. Sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica la cui forma quadratica associata è $Q(\vec{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2$.

- (a) Trovare φ .
- (b) Determinare una forma canonica e la forma normale di Q .
- (c) Determinare la segnatura di Q .

Quesiti di Teoria.

1. Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ una matrice nilpotente. Provare che $\det A = 0$.
2. Enunciare e dimostrare il Teorema dell'Identità di Grassmann.

N.B.: La prova sarà superata se verrà raggiunta la sufficienza, separatamente, per la parte relativa agli esercizi e per quella relativa alla teoria. Tutti i procedimenti devono essere brevemente giustificati. Costituirà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.