

C.d.L. in Ingegneria dell'Informazione
Prova di Geometria e Algebra - 10 gennaio 2019
Tempo a disposizione: 3h 30min

1) Geometria Analitica dello Spazio. Fissato nello spazio ordinario un sistema di riferimento cartesiano $\mathcal{RC}(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, si considerino la retta $r : x + y - 3 = z = 0$ e il punto $P(2, 1, 0)$.

- (a) Determinare la sfera Σ tangente a r in P e avente centro sull'asse x .
- (b) Determinare la circonferenza massima di Σ tangente a r in P .
- (c) Trovare il piano tangente a Σ nel punto diametralmente opposto a P .

2) Coniche. Sia \mathcal{C} la conica tangente alla retta $r : y + 2 = 0$ nel punto $P(2, -2)$, tangente all'asse x nel punto $Q(2, 0)$ e passante per il punto $R(0, -1)$.

- (a) Determinare l'equazione di \mathcal{C} .
- (b) Classificare \mathcal{C} dal punto di vista proiettivo ed affine.
- (c) Determinare centro, assi e vertici di \mathcal{C} .

3) Funzioni Lineari. Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $f(1, -1, 0) = (0, -1, 0)$, $f(3, -1, 3) = (1, 0, 1)$ e $\vec{v} = (1, 1, 2)$ sia un autovettore per f associato all'autovalore 1.

- (a) Trovare l'espressione esplicita di f .
- (b) Stabilire se f è semplice.
- (c) Dire se f è un isomorfismo.

4) Spazi euclidei. Si consideri lo spazio vettoriale \mathbb{R}^3 con la struttura euclidea standard e l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito da

$$f(x, y, z) = \left(\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y, \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y, z \right).$$

- (a) Provare che f è un'isometria.
- (b) Determinare il sottospazio U dei punti fissi di f ed interpretare f geometricamente.
- (c) Determinare U^\perp .

Quesiti di Teoria.

1. Siano V e W spazi vettoriali su un campo K e sia $f : V \rightarrow W$ una funzione lineare. Dimostrare che

$$f \text{ è iniettiva} \iff \ker f = \{\vec{0}_V\}.$$

2. Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ una matrice ortogonale. Provare che $\det A = \pm 1$.

N.B.: La prova sarà superata se verrà raggiunta la sufficienza, separatamente, per la parte relativa agli esercizi e per quella relativa alla teoria. Tutti i procedimenti devono essere brevemente giustificati. Costituirà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.