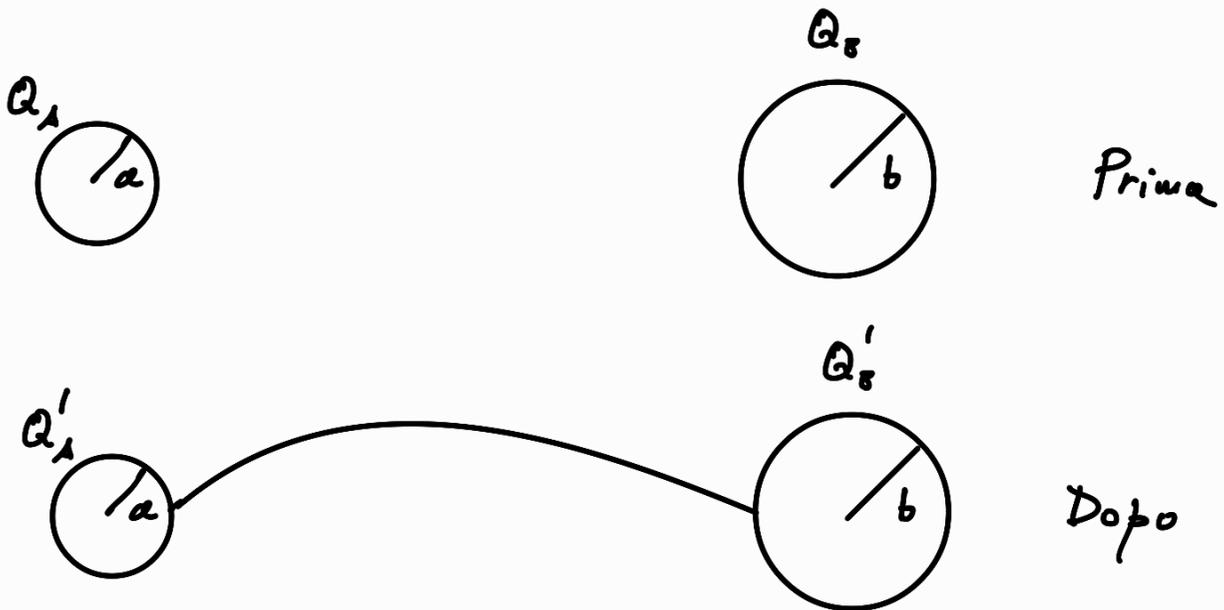


ESERCIZIO: Sia dato un conduttore sferico di raggio a carico con carica Q_A e un conduttore sferico di raggio b carico con carica Q_B , isolati. Dopo averli collegati con un cavo tutti e due conduttore quali saranno le cariche finali Q'_A e Q'_B ? Spiegare cosa accade quando si mette "a terra" un conduttore.



Prima $V_A = \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0 a}$ $V_B = \frac{Q_B}{4\pi\epsilon_0 b}$ rispetto all'infinito
 assunto come
 riferimento

Dopo $V'_A = V'_B \Rightarrow \frac{Q'_A}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{Q'_B}{4\pi\epsilon_0 b} \Rightarrow \boxed{Q'_A = \frac{a}{b} Q'_B}$ ①

La carica si conserva: $\boxed{Q'_A + Q'_B = Q_A + Q_B}$ ②

Ricavo $Q'_B = Q_A + Q_B - Q'_A$ e sostituisco in ①

$$\Rightarrow Q'_A = \frac{a}{b} (Q_A + Q_B) - \frac{a}{b} Q'_A$$

$$\Rightarrow Q'_A \left(1 + \frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b} (Q_A + Q_B)$$

$$\Rightarrow \boxed{Q'_A = \frac{a}{a+b} (Q_A + Q_B)} \quad \underline{\text{Carica su A}}$$

sostituisco in (4) $\Rightarrow Q'_B = \frac{b}{a} Q'_A = \frac{b}{a} \frac{a}{a+b} (Q_A + Q_B)$

$$\Rightarrow \boxed{Q'_B = \frac{b}{a+b} (Q_A + Q_B)} \quad \underline{\text{Carica su B}}$$

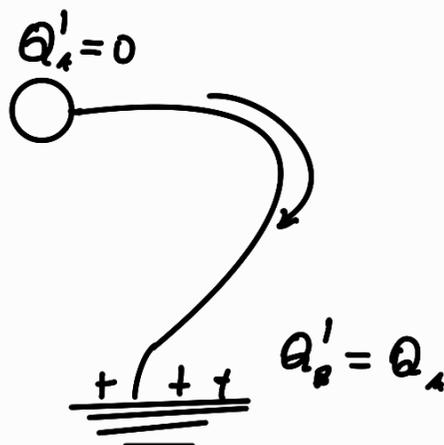
Se $b = \text{raggio della Terra } R_T \gg a \Rightarrow$

$$Q'_A \rightarrow 0 \quad Q'_B \rightarrow Q_A + Q_B = Q_{\text{TOT}}$$

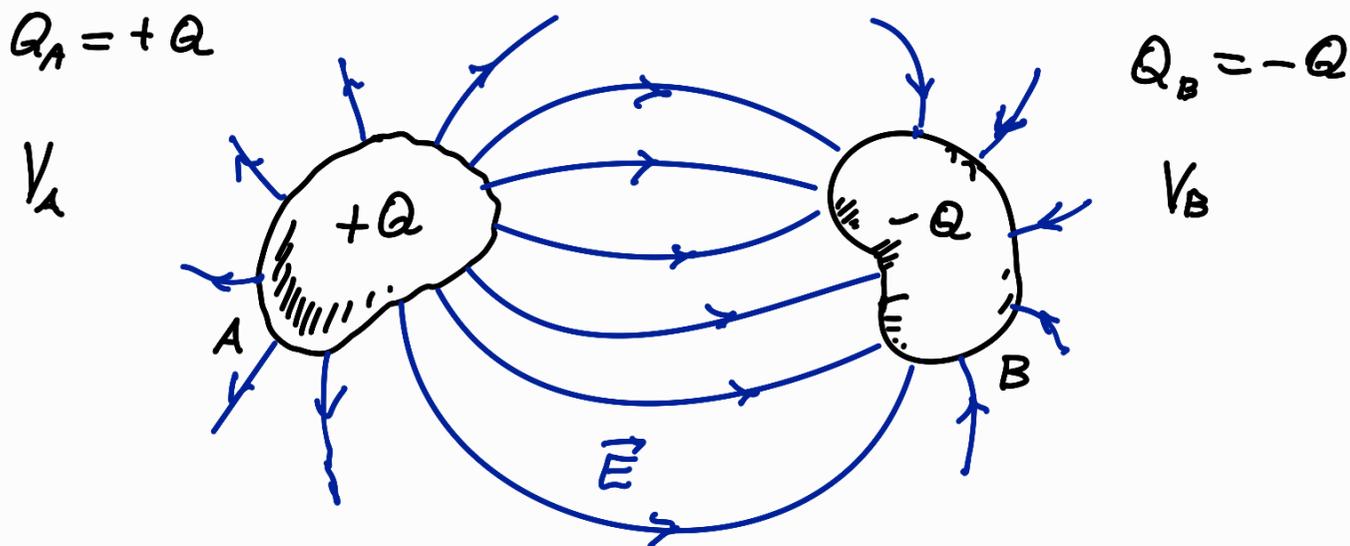
ovvero la carica su A, dopo il collegamento, si scarica praticamente tutta sulla Terra.

Ad esempio se $Q_B = 0 \Rightarrow Q'_A \rightarrow 0$ & $Q'_B \rightarrow Q_A$

la carica si scarica tutta da A a B (Terra)



CONDENSATORI

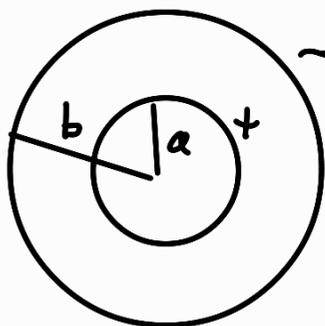


$$\text{Capacità } C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{V_A - V_B}$$

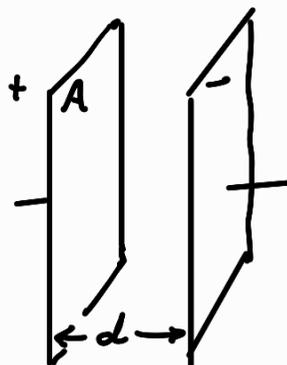
$$\text{Ricordiamo che } V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{e}$$

C dipende solo dalla geometria delle armature

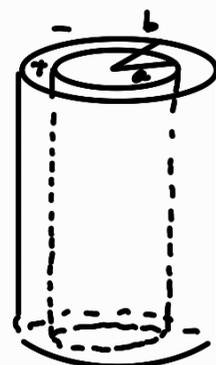
- ① Condensatori sferici
- ② Condensatori piani
- ③ Condensatori cilindrici



①



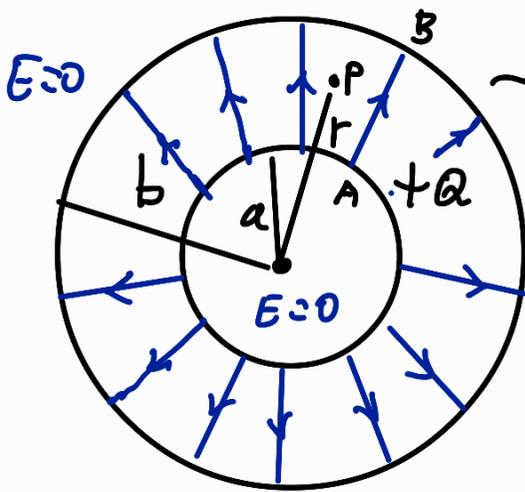
②



③

ESERCIZIO

① Condensatori sferici



$$\Delta V = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{E}(P) = \vec{E}_A(P) + \vec{E}_B(P) = \vec{E}_A(r)$$

Campo dovuto
alle cariche $+Q$
nel punto P

Campo dovuto alla
carica $-Q$ nel punto P
(è nullo perché dentro
il conduttore cavo B)

$$\vec{E}_A(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Come percorsi Γ scegliamo una linea di forza radiale
tale che $d\vec{l} = d\vec{r} \Rightarrow \vec{E} \parallel d\vec{r} \Rightarrow$

$$\Delta V = \int_a^b E dr = \int_a^b \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{\Delta V} = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$

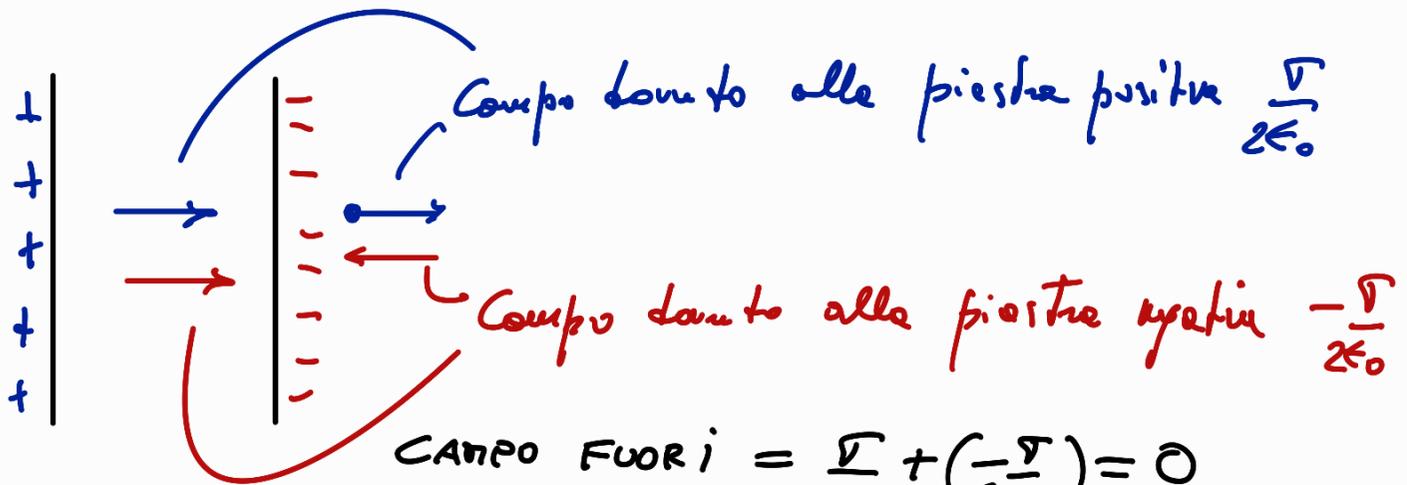
Possiamo definire una capacità di una sfera singola,
basta porre $b \rightarrow \infty \Rightarrow$

$$C_{\text{SFERA}} = 4\pi\epsilon_0 a$$

↓
Dipende solo dal raggio
della sfera

Esercizio

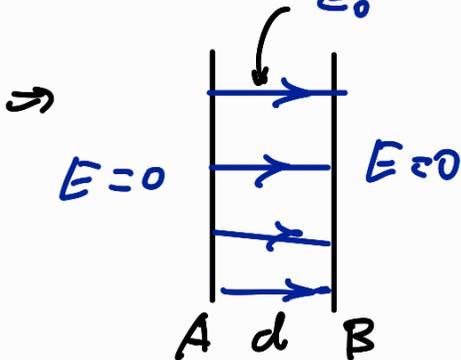
② Con densità di carica piani



$$\text{CAMPO FUORI} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \left(-\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\right) = 0$$

$$\text{CAMPO DENTRO} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ campo uniforme.



$$\Delta V = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int E dl = Ed$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta V = Ed}$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{Ed} = \frac{\sigma A}{\frac{\sigma}{\epsilon_0} d} = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

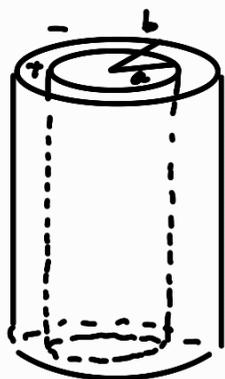
superficie piastra

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

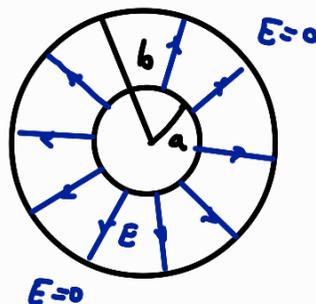
dipende dalla superficie e dalla distanza

ESERCIZIO

③ Condensatore Tori cilindrici:

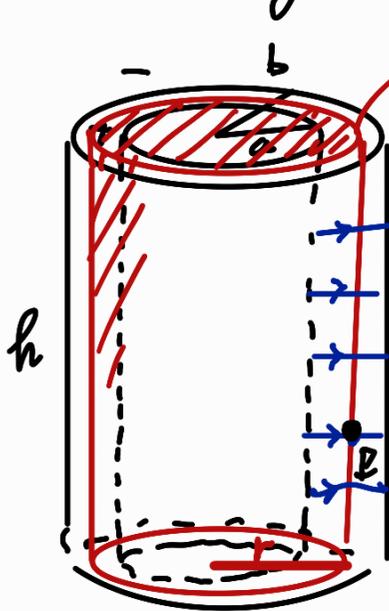


Vista dall'alto



Il campo elettrico è dovuto solo all'armatura interna.

Usando Gauss:



$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{A} = E 2\pi r h$$

Σ : cilindro di raggio r

$$Q_{in} = Q$$

$$\Rightarrow E 2\pi r h = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 h r}$$

$$\Delta V = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{e} = \int_a^b \frac{Q}{a 2\pi \epsilon_0 h r} dr$$

Su una linea
di forza da A a B

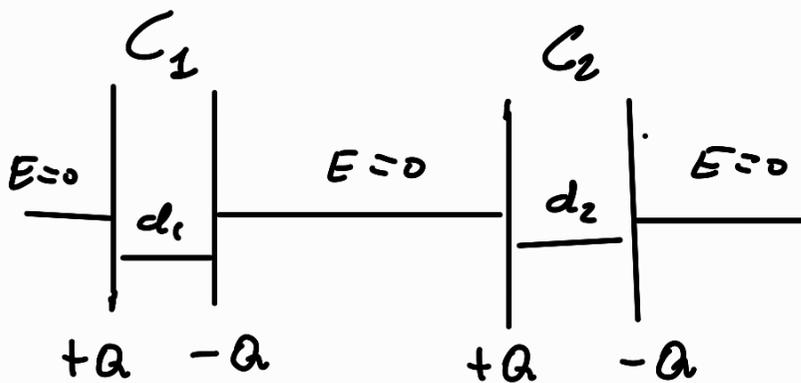
$$\Rightarrow \Delta V = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 h} \int_a^b \frac{1}{r} dr = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 h} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{2\pi \epsilon_0 h}{\ln(b/a)}$$



tipica forma
di un condensatore

CONDENSATORI IN SERIE: hanno la stessa carica



$$C_{\text{tot}}^{-1} = C_1^{-1} + C_2^{-1}$$

$$\text{ovvero } C_{\text{tot}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

$$C_{\text{tot}} < C_1 ; C_2$$

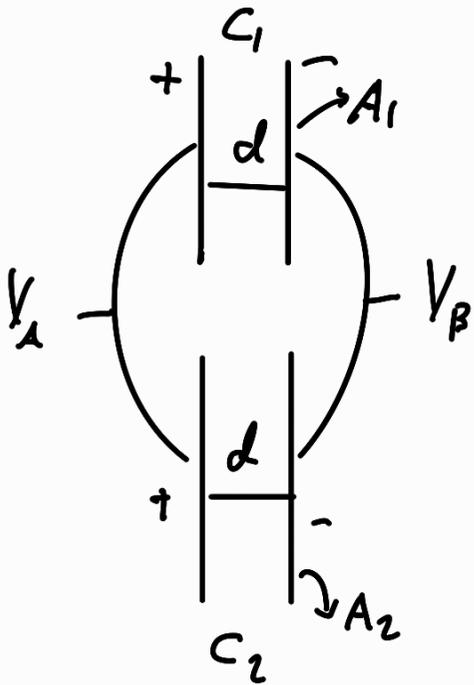
La dimostrazione è semplice: avvicinando i conduttori non succede nulla. Se si fanno le operazioni in termini di carica si annulla ed è come avere un unico condensatore di superficie A e distanza fra le piastre $d_1 + d_2$

$$\Rightarrow C_{\text{tot}} = \epsilon_0 \frac{A}{d_1 + d_2} \Rightarrow \frac{1}{C_{\text{tot}}} = \frac{d_1 + d_2}{\epsilon_0 A} = \frac{d_1}{\epsilon_0 A} + \frac{d_2}{\epsilon_0 A}$$

$$\text{Posso } C_1 = \epsilon_0 \frac{A}{d_1} \text{ e } C_2 = \epsilon_0 \frac{A}{d_2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C_{\text{tot}}} = \frac{1}{\epsilon_0 \frac{A}{d_1}} + \frac{1}{\epsilon_0 \frac{A}{d_2}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

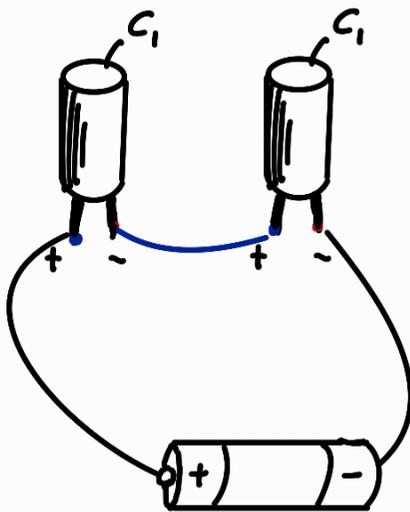
CONDENSATORI IN PARALLELO: collegati agli stessi potenziali



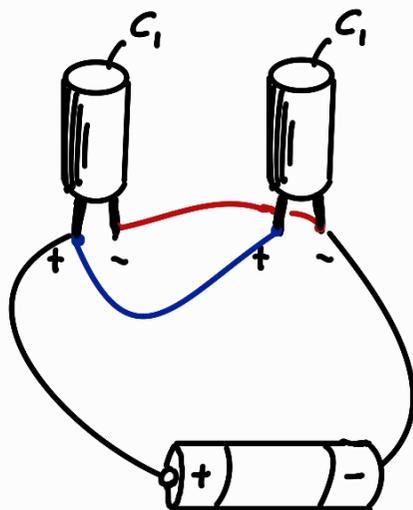
È come se fosse un unico condensatore con superficie $A_{TOT} = A_1 + A_2$

$$C_{TOT} = \frac{A_1 + A_2}{\epsilon_0 d} = \frac{A_1}{\epsilon_0 d} + \frac{A_2}{\epsilon_0 d}$$

$$\Rightarrow C_{TOT} = C_1 + C_2 > C_1; C_2$$

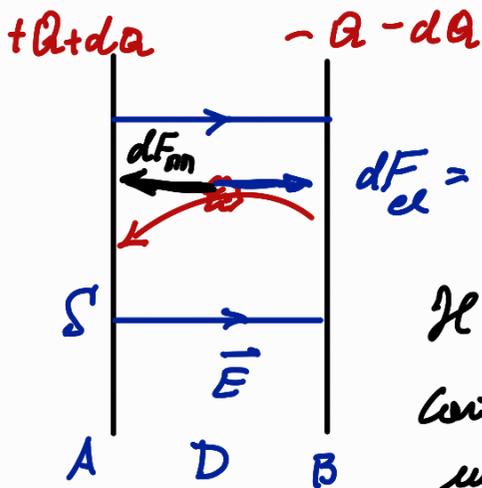


Collegamento in serie



Collegamento in parallelo

ENERGIA ACCUMULATA NEI CONDENSATORI



$$dF_{el} = dQ E = dQ \frac{V_A - V_B}{D} = dQ \frac{V}{D}$$

Il lavoro fatto da "mc" per portare una carica $+dQ$ dalla piastra negativa a una positiva va contro il campo e quindi devo compiere un lavoro infinitesimo (poiché la carica è infinitesima) pari a

$$dW_{B,A}^{me} = dF_{me} D = -dF_{el} D = -dQ V$$

↑
distanza piastre

Il lavoro totale si ha quando porto tutta la carica positiva da una piastra neutra (la B), che diventa negativa e un'altra piastra neutra (la A), che diventa positiva.

$$W_{B,A}^{me} = \int_B^A dW_{B,A}^{me} = \int_B^A dF_{me} D = - \int_0^Q dQ V$$

$$\text{Poiché } V = \frac{Q}{C} \Rightarrow W_{B,A}^{me} = - \int_0^Q \frac{Q}{C} dQ = - \frac{Q^2}{2C}$$

Quindi l'energia accumulata sarà

$$W_{B,A}^{me} = -W_{A,B}^{el} \Rightarrow W^{el} = \frac{Q^2}{2C} = \text{En. accumulata}$$

$$U = \frac{Q^2}{2C}$$

Energia accumulata tra le piastre del condensatore.

Poiché $C = \frac{Q}{V}$ $\Rightarrow Q = CV$
 V diff. di potenziale

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} CV^2$$

altro modo di scrivere
 (Simile alla energia potenziale di una molla $\frac{1}{2} k x^2$)

Poiché $E = V/d$ e $C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$ \rightarrow Superficie condensatore

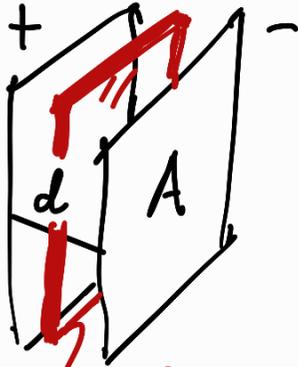
$$U = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A E^2 d^2}{d} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 (A d)$$

\uparrow
Volume

La densità di energia elettrica accumulata dal campo tra le piastre del condensatore sarà

$$u_E = \frac{U}{\text{Volume}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \Rightarrow u_{\text{TOT}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{\text{Volume}} E^2 dV$$

Quante è generata. In fatti se prendo
 un condensa con 2 facce piane cariche, QV_{10}



Volume
 infinitesimo $dV = A dx$

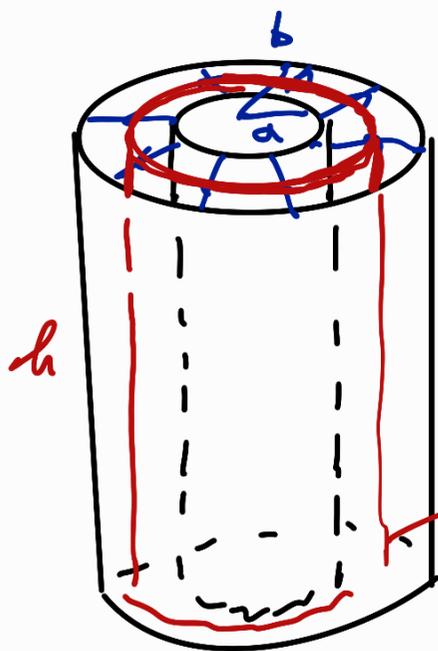
$$U_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{\text{Volume}} E^2 dV$$

$$E = \frac{V}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

$$U_{\text{TOT}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_0^d \frac{Q^2}{\epsilon_0^2 A^2} A dx = \frac{Q^2 d}{2 \epsilon_0 A} = \frac{Q^2}{2C}$$

Q.E.D.

Se prendo un condensatore cilindrico?



$$U_{\text{TOT}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{\text{Volumi fra le piastre}} E^2 dV =$$

$$dV = \text{cilindro} = (2\pi r h) \times dr$$

↓
Superficie cilindro
spessa di dr

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_a^b \left(\frac{Q}{2\pi \epsilon_0 h r} \right)^2 2\pi r h dr = \frac{Q^2}{4\pi \epsilon_0 h} \int_a^b \frac{1}{r} dr =$$

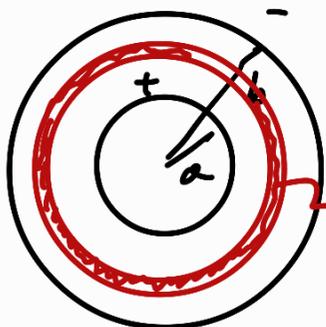
VEDI ESERCIZIO

$$= \frac{Q^2}{4\pi \epsilon_0 h} \ln \frac{b}{a}$$

Ricordiamo che $C = \frac{2\pi \epsilon_0 h}{\ln(b/a)} \Rightarrow U_{\text{TOT}} = \frac{Q^2}{2C}$ Q.E.D.

ENERGIA DI UN CONDENSATORE SFERICO

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a} \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$



$dV = 4\pi r^2 dr$ (Superficie sfera
Guscio sferico
spessore dr)

$$U_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{\text{Volume fra le armature}} E^2 dV = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_a^b \frac{Q^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 r^4} 4\pi r^2 dr$$

$$= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{1}{r^2} dr = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left. \frac{1}{r} \right|_b^a$$

$$= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{2} \frac{Q^2 (b-a)}{4\pi\epsilon_0 ab} = \frac{Q^2}{2C}$$

Q.E.D. !!!

L'energia accumulata da una singola sfera
isolata di raggio $a=R$ si calcola portando $b \rightarrow \infty$

Di modo che $C = 4\pi\epsilon_0 R$

$$\rightarrow U_{\text{sfera}} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \quad \text{ENERGIA DI UN CONDUTTORE SFERICO}$$

Pot. sulla superficie
d' sferica

ovviamente così $U_{\text{sfera}} = \frac{1}{2} Q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{1}{2} Q V(R)$

ESERCIZIO