

Istruzioni:

- (1) Non è concesso l'utilizzo di dispositivi dotati di connessione ad internet.
- (2) Tutti i risultati devono essere giustificati con brevi e chiare spiegazioni.
- (3) Scrivete il vostro nome, cognome e numero di matricola su ognuno dei fogli protocollo che consegnerete.

Esercizio 1 (8 punti). Si studi la seguente funzione e scegli un grafico qualitativo:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+5}{1+|x-3|}\right).$$

Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

Esercizio 2 (4 punti). Si calcoli, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3(\cos x)(\sin x) - \sin(3x)}{(2x + 101x^5)e^{1+787x^2}(1 - \cos(3x))}.$$

Esercizio 3 (4 punti). Si determini, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni del seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x + \alpha y + 3z = \alpha - 1; \\ 2\alpha x + 2y + 6z = 0; \\ -\alpha x - y - 3z = 0. \end{cases}$$

Si determinino, se esistono, le soluzioni del precedente sistema nel caso $\alpha = 2$.

Esercizio 4 (5 punti). Al variare di $\beta \in \mathbb{R}$, la matrice A_β così definita

$$A_\beta = \begin{pmatrix} 1+2\beta & \beta & -1 \\ 0 & 3\beta & 3 \\ 0 & \beta^2 & \beta \end{pmatrix},$$

rappresenta un'applicazione lineare $S_\beta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^3 in partenza ed in arrivo. Si dica per quali $\beta \in \mathbb{R}$ l'applicazione S_β risulta diagonalizzabile. Si determini una base di autovettori per $\beta = 1$.

Esercizio 5 (5 punti). Si calcoli il seguente integrale definito

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)^2 - 3}{(\cos x)^3 + 2(\cos x)^2 - 4 \cos x - 8} \sin x dx.$$

Esercizio 6 (4 punti). Si determinino i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ che soddisfano la seguente equazione

$$(z^2 + 2z + 2) \operatorname{Im}(z^2 - 2z + 1) = 0.$$

①

Esercizio 1

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+5}{1+|x-3|}\right)$$

DOMINIO

$$\begin{cases} \frac{x+5}{1+|x-3|} > 0 \\ 1+|x-3| \neq 0 \end{cases}$$

SEMPRE POSITIVA

SEMPRE VERA

$$\Leftrightarrow x+5 > 0 \Leftrightarrow x > -5$$

$$D = (-5, +\infty)$$

SIMMETRIA

LA FUNZIONE NON È NÉ PARI
NÉ IMMERSA DISPARA SICCOME

D NON È SIMMETRICA RISPETTO ALL'ORIGINE
(INFATTI $6 \in D$, MA $-6 \notin D$)

$$\underline{\text{ZERI}} \quad f(0) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+5}{1+|x-3|}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -5 \\ \frac{x+5}{|x-3|+1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -5 \\ \frac{x+5 - |x-3| - 1}{|x-3| + 1} = 0 \end{cases}$$

②

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -5 \\ x+4 - |x-3| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -5 \\ |x-3| = x+4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -5 \\ x \geq 3 \\ x-3 = x+4 \end{cases} \text{ V } \begin{cases} x > -5 \\ x < 3 \\ 3-x = x+4 \end{cases}$$

IMPOSSIBILE

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5 < x < 3 \\ 2x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

PUNTO DI ZERO $x = -\frac{1}{2}$

SEGNO

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln \left(\frac{x+5}{1+|x-3|} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -5 \\ \frac{x+5}{1+|x-3|} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -5 \\ \frac{x+5 - 1 - |x-3|}{1+|x-3|} \geq 0 \end{cases}$$

(3)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -5 \\ \frac{x+4 - |x-3|}{1 + |x-3|} \geq 0 \end{cases}$$

POSITIVO

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -5 \\ x+4 - |x-3| \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -5 \\ |x-3| \leq x+4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -5 \\ -x-4 \leq x-3 \leq x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -5 \\ -x-4 \leq x-3 \\ x-3 \leq x+4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -5 \\ 2x \geq -1 \\ -3 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$

VERA

\neq E POSITIVA P IN $[-\frac{1}{2}, +\infty)$

(4)

LIMITI

$$\lim_{x \rightarrow (-5)^+} \ln \left(\frac{x+5}{1+|x-3|} \right) = -\infty$$

$x = -5$ È ASINTO
VORACO

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x+5}{1+|x-3|} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x+5}{x-2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x \left(1 + \frac{5}{x} \right)}{x \left(1 - \frac{2}{x} \right)} \right) = 0^+$$

$y = 0$ È ASINTO ORIZZONTALE

A $+\infty$

DERIVATA PRIMA

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(\frac{x+5}{x-2}\right) & x \geq 3 \\ \ln\left(\frac{x+5}{4-x}\right) & -5 < x < 3 \end{cases}$$

$x \geq 3$ $f'(x) = \frac{1}{\frac{x+5}{x-2}} \cdot \frac{x-2 - (x+5)}{(x-2)^2}$

$$= \frac{x-2}{x+5} \cdot \frac{-7}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{-7}{(x+5)(x-2)}$$

$-5 < x < 3$ $f'(x) = \frac{1}{\frac{x+5}{4-x}} \cdot \frac{4-x - (x+5)}{(4-x)^2}$

$$= \frac{4-x}{x+5} \cdot \frac{9}{(4-x)^2}$$

$$= \frac{9}{(x+5)(4-x)}$$

(6)

QUINDI

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{7}{(x+5)(x-2)} & x > 3 \\ \frac{9}{(x+5)(4-x)} & -5 < x < 3 \end{cases}$$

PUNTI DI NON DERIVABILITÀ $x=3$ $f(3) = \ln 8$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{9}{(x+5)(4-x)} = \frac{9}{8}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-7}{(x+5)(x-2)} = -\frac{7}{8}$$

$x=3$ È PUNTO ANGOLOSO CON

TANGENTE SINISTRA $y = \frac{9}{8}x + \ln 8$

E TANGENTE DESTRA $y = -\frac{7}{8}x + \ln 8$

PUNTI STAZIONARI

$$f'(x) = 0$$

MAI

(FRAZIONI CON NUMERATORO CHE NON SI ANNULLA)

MONOTONIA

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x > 3 \\ -\frac{x}{(x+5)(x-3)} \geq 0 \end{cases}$$

$\begin{matrix} >0 & >0 \end{matrix}$

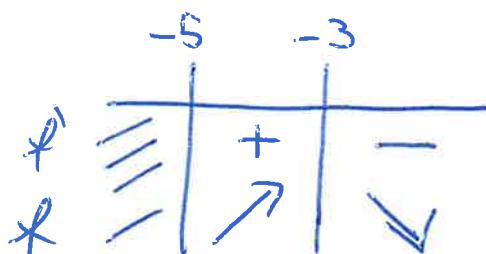
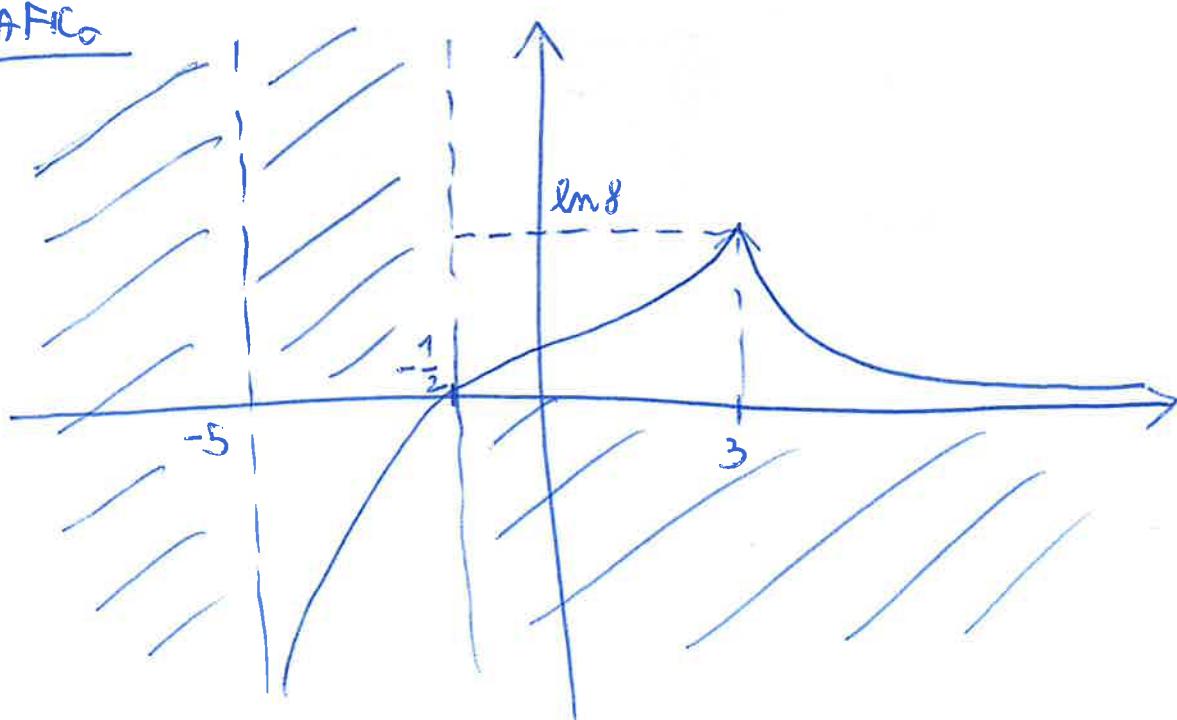
V

$$\begin{cases} -5 < x < -3 \\ \frac{9}{(x+5)(x-3)} \geq 0 \end{cases}$$

$\begin{matrix} >0 & >0 \end{matrix}$

MAI

$$\Leftrightarrow -5 < x < 3$$

GRAFICO

Esercizio 2

8

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3(\cos x)(\sin x) - \sin(3x)}{(2x + 101x^5) e^{1+787x^2} (1 - \cos(3x))}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$(\cos x)(\sin x) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \frac{x^3}{2}$$

$$= x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$3(\cos x)(\sin x) - \sin(3x) = 3x - 2x^3 + o(x^3) - 3x + \cancel{\frac{27x^3}{6}}$$

$$= \frac{9}{2}x^3 - 2x^3 + o(x^3) = \frac{5}{2}x^3 + o(x^3)$$



(9)

$$\frac{(2x+101x^5)}{2x} e^{1+787x^2} \left(1-\cos(3x)\right) \\ \sim e^{\frac{1}{2}(3x)^2}$$

$$\sim 2ex \frac{1}{2} 9x^2 = 9ex^3 \quad \boxed{ }$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3(\cos x)(\sin x) - \sin(3x)}{(2x+101x^5) e^{1+787x^2} (1-\cos(3x))}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{5}{2}x^3 + o(x^3)}{9ex^3} = \frac{5}{18e}$$

10

Esercizio 3

$$\begin{cases} x + \alpha y + 3z = \alpha - 1 \\ 2\alpha x + 2y + 6z = 0 \\ -x - y - 3z = \cancel{\alpha} \end{cases}$$

MATRICE DEI COEFFICIENTI

M

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 3 \\ 2\alpha & 2 & 6 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

MATRICE COMPLETA

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 3 & \alpha - 1 \\ 2\alpha & 2 & 6 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & \cancel{\alpha} \end{array} \right)$$

RK A

SOTTOGRADICOI 3×3

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} - 2\alpha \det \begin{pmatrix} \alpha & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} - \alpha \det \begin{pmatrix} \alpha & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= -6 + 6 - 2\alpha(-3\alpha + 3) - \alpha(6\alpha - 6)$$

$$= 6\alpha^2 - 6\alpha - 6\alpha^2 + 6\alpha = 0$$

SOTTOGRADICOI 2×2

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{\alpha & 3} \\ 2\alpha & \boxed{2 & 6} \\ -\alpha & -1 & -3 \end{pmatrix} \quad 6\alpha - 6$$

RK A = 2 $\forall \alpha \neq 1$

$$\boxed{\alpha = 1} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{TUTTI DEDONDI}$$

RK A = 1



$RK(A|b)$

(12)

Γ SISTEMA STANDARD 3×3 $\boxed{\alpha \neq 1}$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 3 & \alpha-1 \\ 2 & -\alpha & 6 & \alpha \\ -1 & -1 & -3 & \alpha \end{pmatrix} = (\alpha-1) \det \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$
$$= (\alpha-1) (-6+6) = 0$$

$$\Rightarrow RK(A|b) = 2$$

$$\boxed{\alpha = 1} \quad A|b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & \alpha \\ 2 & 2 & 6 & \alpha \\ -1 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow RK(A|b) = 1$$

DAL TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPÉLU

IL SISTEMA HA ∞^1 SOLUZIONI PER $\alpha \neq 1$

E ∞^2 SOLUZIONI PER $\alpha = 1$

(13)

SOLUZIONI PER $\alpha = 2$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 2y + 6z = 0 \\ -2x - y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4x - 6z + 3z = 1 \\ 4x - 4x - 6z + 6z = 0 \\ y = -2x - 3z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 3z = 1 \\ y = -2x - 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} - z \\ y = \frac{2}{3} + 2z - 3z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} - z \\ y = \frac{2}{3} - z \end{cases}$$

ESEMPIO 4

$$A_\beta = \begin{pmatrix} 1+2\beta & \beta & -1 \\ 0 & 3\beta & 3 \\ 0 & \beta^2 & \beta \end{pmatrix}$$

POLINOMIO CARATTERISTICO

$$P(\lambda) = \det(A_\beta - \lambda I_3)$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1+2\beta-\lambda & \beta & -1 \\ 0 & 3\beta-\lambda & 3 \\ 0 & \beta^2 & \beta-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1+2\beta-\lambda) \det \begin{pmatrix} 3\beta-\lambda & 3 \\ \beta^2 & \beta-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1+2\beta-\lambda) ((3\beta-\lambda)(\beta-\lambda) - 3\beta^2)$$

$$= (1+2\beta-\lambda) (3\beta^2 - 4\beta\lambda + \lambda^2 - 3\beta^2)$$

$$= (1+2\beta-\lambda) \lambda (\lambda - 4\beta)$$

AUTOVETTORI $\lambda_1 = 1+2\beta$ $\lambda_2 = 0$ $\lambda_3 = 4\beta$

COSTRUTTIVITÀ

AUTOVARI

$$\boxed{\lambda_1 = \lambda_2}$$

$$1+2\beta=0 \Leftrightarrow \beta = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\lambda_1 = \lambda_3}$$

$$1+2\beta=4\beta \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\lambda_2 = \lambda_3}$$

$$0=4\beta \Leftrightarrow \beta = 0$$

SB $\beta \neq \pm \frac{1}{2}$ e $\beta \neq 0$ È DIAGONALIZZABILE

(TUTTI GLI AUTOVARI HANNO MULTIPLICITÀ ALGO BICIA
E GEOMETRICA 1)

CASO $\beta = -\frac{1}{2}$

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 0 \quad \lambda_3 = -2$$

$$\mu_0 = 2$$

$$\mu_{-2} = 1$$

$$V_0 = \dim \ker \left(A_{-\frac{1}{2}} - 0 \text{Id} \right) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Im} \left(A_{-\frac{1}{2}} \right)$$

$$= 3 - \text{RK} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 3 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$$

NO DIAGONALIZZABILE

(16)

$$\underline{\text{CASO } \beta=0} \quad \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 0 \quad \lambda_3 = 0$$

$$\mu_1 = 1$$

$$\mu_0 = 2$$

$$Y_0 = \dim \text{Ker } (A_0 - \alpha \text{Id})$$

$$= \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Im}(A_0)$$

$$= 3 - \text{RK } A_0 = 3 - \text{RK} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ 0 & \alpha & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$$

NO DIAGONALIZZABILE

$$\underline{\text{CASO } \beta=\frac{1}{2}} \quad \lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 0 \quad \lambda_3 = 2$$

$$\mu_2 = 2$$

$$\mu_0 = 1$$

$$Y_2 = \dim \text{Ker } (A_{\frac{1}{2}} - 2 \text{Id}) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Im}(A_{\frac{1}{2}} - 2 \text{Id})$$

$$= 3 - \text{RK } (A_{\frac{1}{2}} - 2 \text{Id}) = 3 - \text{RK} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$$

NO DIAGONALIZZABILE

BASE DI AUTOVETTORI PER $\beta=1$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = \alpha \quad \lambda_3 = 4$$

BASE $V_3 = \text{Ker}(A_1 - 3\text{Id})$

$$(A_1 - 3\text{Id}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ 3z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = z = 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

BASE $V_0 = \text{Ker}(A_1 - \alpha\text{Id})$

$$A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 3y + 3z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2z = 0 \\ y = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}z \\ y = -z \end{cases}$$

(18)

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

BASIS $V_4 = \text{Ker } (A_1 - 4 \text{Id})$

$$(A_1 - 4 \text{Id}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x + y - z = 0 \\ -y + 3z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2z = 0 \\ y = 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = 3z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2z \\ 3z \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

BASIS DI AUSVECTOREN

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(19)

ESEMPIO 5

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)^2 - 3}{(\cos x)^3 + 2(\cos x)^2 - 4\cos x - 8} \sin x \, dx$$

$$= \begin{bmatrix} \cos x = t & t_{\text{ALTO}} = 0 \\ -\sin x \, dx = dt & t_{\text{BAJO}} = 1 \end{bmatrix}$$

$$= \int_0^1 \frac{t^2 - 3}{t^3 + 2t^2 - 4t - 8} dt$$

$$\Gamma \text{SCOMPOSIZIONE} P(t) = t^3 + 2t^2 - 4t - 8$$

POSSIBILI RADICI RAZIONALI $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

$$P(2) = 8 + 2 \times 4 - 4 \times 2 - 8 = 0$$

RUFFINI

	1	2	-4	-8
2		2	8	8
	1	4	4	0

$$\text{QUINDI } t^3 + 2t^2 - 4t - 8 = (t-2)(t^2 + 4t + 4)$$

$$= (t-2)(t+2)^2$$

]

$$= \int_0^1 \frac{t^2 - 3}{(t-2)(t+2)^2} dt$$

$$\frac{t^2 - 3}{(t-2)(t+2)^2} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t+2} + \frac{C}{(t+2)^2}$$

$$t^2 - 3 = A(t+2)^2 + B(t-2)(t+2) + C(t-2)$$

$$= A(t^2 + 4t + 4) + B(t^2 - 4) + C(t-2)$$

$$= t^2(A+B) + t(4A+C) + 4A - 4B - 2C$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 4A+C=0 \\ 4A-4B-2C=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1-B \\ 4-4B+C=0 \\ 4-4B-4B-2C=-3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A=1-B \\ -4B+C=-4 \\ -8B-2C=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1-B \\ C=-4+4B \\ -8B+8-8B=-7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A=1-B \\ C=-4+4B \\ -16B=-15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1+\frac{1}{16}=\frac{17}{16} \\ C=-4+\frac{15}{4}=-\frac{1}{16} \\ B=\frac{15}{16} \end{cases}$$

]

(21)

$$= \int_0^1 \frac{\frac{17}{16}}{t-2} + \frac{\frac{15}{16}}{t+2} + \frac{-\frac{1}{16}}{(t+2)^2} dt$$

$$= \frac{17}{16} \int_0^1 \frac{1}{t-2} dt + \frac{15}{16} \int_0^1 \frac{1}{t+2} dt - \frac{1}{16} \int_0^1 \frac{1}{(t+2)^2} dt$$

$$= \frac{17}{16} \ln|t-2| \Big|_0^1 + \frac{15}{16} \ln|t+2| \Big|_0^1 + \frac{1}{16} \frac{1}{t+2} \Big|_0^1$$

$$= -\frac{17}{16} \ln 2 + \frac{15}{16} \ln 3 - \frac{15}{16} \ln 2 + \frac{1}{16} \frac{1}{3} - \frac{1}{16} \frac{1}{2}$$

$$= \frac{15}{16} \ln 3 - 2 \ln 2 - \frac{1}{96}$$

Esercizio 6

(22)

$$(z^2 + 2z + 2) \operatorname{Im}(z^2 - 2z + 1) = 0$$

DATA L'EQ. DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO

$$z^2 + 2z + 2 = 0 \quad \vee \quad \operatorname{Im}(z^2 - 2z + 1) = 0$$

$$\textcircled{i} \quad z^2 + 2z + 2 = 0$$

$$\Delta = 4 - 8 = -4$$

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$$

$$\textcircled{ii} \quad \operatorname{Im}(z^2 - 2z + 1) = 0 \quad z = a + bi$$

$$\operatorname{Im}((a+bi)^2 - (a+bi) + 1) = 0$$

$$\operatorname{Im}(a^2 - b^2 + 2iab - a - bi + 1) = 0$$

$$2ab - b = 0$$

$$b(2a - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b=0 \quad \vee \quad a = \frac{1}{2}$$

SOLUTIONI Sono

(23)

$$z_1 = -1 + i \quad z_2 = -1 - i$$

$$z_a = a \quad z_b = \frac{1}{2} + i b$$

$$a \in \mathbb{R}$$

$$b \in \mathbb{R}$$