Prova scritta di Algebra I

(durata: 2 ore)

29 gennaio 2019

Esercizio 1.
Definiamo una relazione $\sim$ su $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ponendo, per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$,

$$(a, b) \sim (c, d) :\Longleftrightarrow ab + d = cd + b$$

Dimostrare che

(1) $\sim$ è un'equivalenza su $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,

(2) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\sim$ è equipotente a $\mathbb{Z}$.

Determinare un sistema di rappresentanti per $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\sim$.

Esercizio 2. Sia $p \in \mathbb{P}$.

(1) Dimostrare che $mcd(z^2 + p, z - p)$ divide $p(p + 1)$, per ogni $z \in \mathbb{Z}$.

(2) Dimostrare che $mcd(z^2 - p, z + p)$ divide $p(p - 1)$, per ogni $z \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 3. Sia X un insieme finito e sia $\mathcal{S}_X$ il gruppo simmetrico su X.

(1) Dimostrare che per ogni $Y \subseteq X$, l'insieme

$$H_Y := \{\sigma \in \mathcal{S}_X | \forall y \in Y \quad y\sigma \in Y\}$$

è un sottogruppo di $\mathcal{S}_X$.

(2) Dimostrare, inoltre, che se $A \subseteq X$ e $B = X \setminus A$, then $H_A = H_B$.