Prova scritta di Algebra I

(durata: 2 ore)

18 febbraio 2019

Esercizio 1.
Definiamo una relazione $\sim$ su $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ponendo, per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$,

$$(a, b) \sim (c, d) :\Longleftrightarrow ab - cd = b^2 - d^2$$

Dimostrare che

(1) $\sim$ è un'equivalenza su $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,

(2) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\sim$ è equipotente a $\mathbb{Z}$.

Determinare un sistema di rappresentanti per $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\sim$.

Esercizio 2. Siano p e q due numeri primi dispari distinti.

(1) Dimostrare che $mcd(p + q, p - q) = 2$.

(2) Dimostrare che se $d := mcd(p^2 + q, p - q)$, allora d divide $p + 1$.

Esercizio 3. Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, sia $f_{a,b} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto ax + b$ e sia

$$G := \{f_{a,b} \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}\}.$$

(1) Dimostrare che G è un sottogruppo del monoide $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ delle funzioni da $\mathbb{R}$ in se stesso, rispetto all'usuale composione di funzioni.

(2) Dimostrare che $H := \{f_{1,b} \mid b \in \mathbb{R}\}$ è un sottogruppo normale di G.