

Prova scritta di Algebra I

(durata: 2 ore)

17 giugno 2019

Esercizio 1.

Definiamo una relazione \sim su $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ponendo, per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$,

$$(a, b) \sim (c, d) : \iff ab + d = cd + b$$

Dimostrare che

- (1) \sim è un'equivalenza su $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,
- (2) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) / \sim$ è equipotente a \mathbb{Z} .

Determinare un sistema di rappresentanti per $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) / \sim$.

Esercizio 2. Dimostrare che, per ogni $z \in \mathbb{Z}$, vale

$$\text{mcd}(z^2 - 7, z + 2) \in \{1, 3\}$$

Determinare gli interi z tali che $\text{mcd}(z^2 - 7, z + 2) = 3$.

Esercizio 3. Siano G un gruppo e g_0 un elemento di G . Poniamo

$$C := \{g \mid g \in G, \quad gg_0 = g_0g\}.$$

- (1) Dimostrare che $C \leq G$.
- (2) Dimostrare che C contiene il sottogruppo generato da g_0 .
- (3) Dimostrare che, se $\langle g_0 \rangle \trianglelefteq G$, allora $C \trianglelefteq G$.