Prova scritta di Algebra I

(Durata: 2 ore)

14 gennaio 2019

Esercizio 1.
Sia m un numero naturale. Definiamo una relazione $\sim$ su $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ponendo, per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$,

$$(a, b) \sim (c, d) \iff m \mid ab - cd$$

Dimostrare che

(1) $\sim$ è un'equivalenza su $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,

(2) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\sim$ è equipotente a $\mathbb{Z}/\equiv_m$.

Determinare un sistema di rappresentanti di $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\sim$.

Esercizio 2.

(1) Dimostrare che, per ogni $z \in \mathbb{Z}$, vale

$$mcd(2z + 3, 3z - 2) \in \{1, 13\}.$$

(2) Determinare gli interi z tali che $mcd(2z + 3, 3z - 2) = 13$.

Esercizio 3. Siano in $\mathcal{S}_7$

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \beta := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Determinare una permutazione $\gamma \in \mathcal{S}_7$ tale che $\gamma\alpha\beta = \alpha^2\beta^{-1}$.

(2) Determinare una permutazione $\tau \in \mathcal{S}_7$ tale che $\alpha\tau = \tau\beta$.