Prova scritta di Algebra I

(durata: 2 ore)

11 luglio 2019

Esercizio 1.
Dimostrare che, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$, se $mcd(a, b) = 1$, allora

$$mcd(a - b,\ a^2 - b^2 + a + b) \in \{1, 2\}.$$

Esercizio 2.
Sia $\alpha := (2\ 4\ 6\ 8)(1\ 4\ 5\ 7)(1\ 3\ 2)$ una permutazione di $\underset{\sim}{8}$.

(1) Determinare 2 cicli disgiunti ζ_1 e ζ_2 tali che $\alpha = \zeta_1\zeta_2$.

(2) Determinare una trasposizione $\tau \in \mathcal{S}_8$ tale che $\zeta_1\tau\zeta_2$ sia un ciclo di lunghezza 8.

Esercizio 3.
Definiamo su $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ la seguente operazione ponendo, per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$,

$$(a, b) * (c, d) := (ac, ad + bc + 2bd)$$

e la seguente relazione ponendo, per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$,

$$(a, b) \sim (c, d) \Longleftrightarrow a - c = 2(d - b)$$

Dimostrare che

(1) $\sim$ è una congruenza di $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, *)$,

(2) $((\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\sim, \hat{*})$ è isomorfa a $(\mathbb{Z}, \cdot)$.