

Prova scritta di Algebra I

(durata: 2 ore)

10 settembre 2019

Esercizio 1. Sia $z \in \mathbb{Z}$. Verificare che:

- (1) $\text{mcd}(4z + 3, 3z - 2) \in \{1, 17\}$;
- (2) se $17 \mid z$, allora $\text{mcd}(4z + 3, 3z - 2) = 1$.

Esercizio 2. Siano

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 4 & 3 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

due elementi di \mathcal{S}_7 .

- (1) Determinare l'inverso di $\alpha\beta$.
- (2) Determinare la struttura ciclica di α e $\alpha\beta$.
- (3) Determinare una permutazione γ di \mathcal{S}_7 tale che $\alpha\beta\gamma = \gamma\beta\alpha$.

Esercizio 3. Definiamo su $M := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la seguente operazione ponendo, per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

$$(a, b) * (c, d) := (ac - bd, ad + bc).$$

Dimostrare che:

- (1) $(M, *)$ è un monoide commutativo.
- (2) Determinare gli elementi invertibili di $(M, *)$.