Introduzione alla Fisica Moderna - a.a. 2017-18

9/1/2019

Nome Cognome Matricola:

1) Si consideri il sistema dinamico per la coppia di variabili $\{x(t),\ x(t)\}$

$$\dot{x} = (1-y)\,x, \qquad \dot{y} = a\,(x-1)\,y, \qquad (a>0)\,.$$

Dire se il sistema è hamiltoniano. Trovare i punti di equilibrio e caratterizzare la loro stabilità . Dimostrare che la funzione $L(x,y) = aF[x] + F[y] + F_0$, dove $F[z] = z - \ln z$, è una costante del moto. Dimostrare che $L(x,y)$ possiede un solo minimo nel I quadrante $Q = \{(x,y)\,|\,x>0,\ y>0\}$.

Dimostrare che se il dato iniziale (x_0, y_0) è situato in Q, allora il suo moto si svolgerà in esso (Q è invariante sotto l'azione del flusso generato dalle precedenti equazioni).

Tracciare un grafico di fase limitatamente a Q.

-

2) Un pendolo semplice di massa m è sospeso ad un'asta, di massa nulla, avente lunghezza ℓ. La massa del pendolo è inoltre sospesa ad una molla, avente costante di richiamo elastica k, che può oscillare lungo la proiezione ortogonale verticale passante per il pendolo e con il punto di equilibrio che si muove, liberamente e senza attrito, lungo la retta orizzontale passante per il punto di sospensione del pendolo stesso.

Scrivere la Lagrangiana del sistema in coordinate polari, scrivere le equazioni del moto per la variabile angolare. Si scriva il corrispondente sistema di equazioni del primo ordine. Si determinino i punti di equilibrio. Determinare la condizione tra forza peso e forza di richiamo elastica affinché esistando dei punti di equilibrio differenti da quelli del pendolo semplice. Caratterizzare la stabilità di tali punti al variare dell'intensità della costante elastica.

-

3) In un modello semplificato di galassia si assume che una stella di massa m si trovi immersa in un campo gravitazionale medio della forma

$$\phi(r) = -\frac{G\,M_0}{2r_0^3}\begin{cases} 3r_0^2 - r^2 & 0 \le r \le r_0 \\ \frac{2r_0^3}{r} & r_0 \le r \end{cases} .$$

Scrivere la Lagrangiana del problema nelle coordinate generalizzate opportune, trovare le leggi di conservazione, scrivere l'Hamiltoniana, per le orbite circolari centrate nell'origine trovare la dipendenza, dalla distanza da essa, della velocità angolare e farne il grafico. Confrontare il risultato con la III legge di Keplero. Trovare la distribuzione di masse che determina il potenziale dato.

- -

4) Il nucleo dell'isotopo dell'iridio $^{77}Ir^{191}$ emette fotoni γ di energia 0.129 MeV, dovuti al decadimento da uno stato eccitato a quello fondamentale. Assumendo che il nucleo sia libero e applicando la conservazione del quadri-momento, determinare lo scarto relativo in frequenza dovuto all'effetto di rinculo del nucleo. Spiegare se è giustificato l'uso di espressioni classiche per l'energia cinetica del nucleo. Confrontare il risultato ottenuto in precedenza con quanto si otterrebbe usando l'effetto Doppler longitudinale

-

5) Ad una particella puntiforme di massa m viene associato un generico vettore $\vec{S}$ dello spazio ordinario. Si introduca una opportuna componente S^0, tale da costruire un quadrivettore S^α e che si annulli nel sistema di riferimento solidale con la particella. Usando le trasformazioni di Lorentz scrivere esplicitamente il vettore trasformato in ogni altro sistema di riferimento inerziale in termini di quello nel sistema della particella. Scrivere i possibili

quadrivettori che si possono ottenere combinando S^α, il quadri-vettore velocità u^α e il tensore E.M. $F^{\alpha\beta}$.

-

6) Ricordando che la Lagrangiana per la particella libera relativistica è data da $L_0 = -m\, c^2\, \sqrt{1-\beta^2}$, scrivere la Lagrangiana per una carica q in un campo magnetico uniforme dipendente quadraticamente dal tempo. Derivare il momento coniugato e, effettuando una trasformazione di Legendre, calcolare l'Hamiltoniana. Stabilire se questa quantità si conserva.

-

7) Una particella di massa unitaria è sottoposta all'azione del potenziale unidimensionale

$$V(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 4x.$$

Determinare le frequenze di oscillazione nel limite delle piccole oscillazioni. Determinare il valore di energia, diciamo E_s, che corrisponde alla separatrice dei moti. Calcolare il moto approssimato in un intorno del punto di equilibrio instabile.

-

8) Un fotone di frequenza $\omega = 3 \times 10^{25}\ sec^{-1}$ viene deflesso a 60^o da un elettrone libero fermo. Calcolare l'energia del fotone diffuso ed il momento finale dell'elettrone.

-

1 Costanti e fattori di conversione

- Velocità della luce nel vuoto: $c = 299792458\ m/sec$
- Carica elettrica elementare: $e = 1.60218 \times 10^{-19}\ C$
- Costante di Planck: $h = 6.63 \times 10^{-34}\ joule\, sec$ ($\hbar = 1.054571800(13) \times 10^{-34}\ j\ sec$)
- Costante di Boltzmann $k_B = 1.28 \times 10^{-23}\ \frac{joule}{{}^oK}$
- Numero di Avogadro : $N_A = 6,022 \times 10^{23}$
- Massa del protone : $m_p = 1.6726219 \times 10^{-27}\ kg$
- Massa dell'elettrone : $m_e = 9.10938 \times 10^{-31}\ kg$
- Massa del neutrone : $m_n = 939.6\, MeV/c^2$
- Costante dielettrica nel vuoto: $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{?12}\ F/m$
- Costante di Wien: $b = 2.898 \times 10^{-3}\ m\ {}^oK$
- Costante di Stefan-Boltzmann : $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}\ \frac{W}{m^2\ {}^oK^4}$
- Lunghezza d'onda Compton per l'elettrone : $2.426 \times 10^{-12}\, m$
- $1\ eV = 1.60218 \times 10^{-19}\ joule$
- $1\ u.m.a. = 931\ MeV/c^2$