Introduzione alla Fisica Moderna - a.a. 2016-17

04/06/2017

Nome Cognome Matricola:

1) Dimostrare che $(0,0)$ è un punto di equilibrio del seguente sistema

$$\begin{cases} \dot{x} & = y + \alpha\left(x^2 + y^3\right) \\ \dot{y} & = -x + \alpha\left(x^3 + y^2\right) \end{cases}, \tag{1}$$

enunciare il teorema di Lyapunov sulla stabilità e usare la funzione $F = x^2 + y^2$ per determinare le opportune condizioni sul parametro reale α, affinché il punto sia asintoticamente stabile.

-

2) Un sistema meccanico è costituito da un unto materiale di massa m vincolato a muoversi su una iperbole liscia di equazione $z^2 - \frac{x^2}{\ell^2} = f^2$, rotante attorno all'asse $\hat{z}$ verticale con velocità angolare costante ω. La particella è soggetta alla forza peso ed è sottoposta ad una forza di richiamo elastica, che agisce perpendicolarmente all'asse $\hat{z}$, con costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo pari alla distanza focale. Scrivere la Lagrangiana del sistema. Trovare le configurazioni di equilibrio al variare del parametro ω.

-

3) Si scrivano in forma compatta le equazioni del moto del seguente sistema hamiltoniano a 2 gradi di libertà

$$H = \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} p_i^2 + \exp\left(q_1 - q_2\right).$$

Si consideri la matrice

$$L = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 \\ a_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

con $a_i = \frac{1}{2} \exp \frac{1}{2} \left(q_i - q_{i+1}\right)$ e $b_i = -\frac{1}{2} p_i$ e si esprima la sua derivata temporale in termini di H. Si dimostri quindi che $I_k = \operatorname{tr}\left(L^k\right),\ k = 1, 2$ sono integrali del moto del sistema

-

4) Una particella di massa unitaria è sottoposta all'azione del potenziale unidimensionale

$$V\left(x\right) = \frac{\omega^2}{8a^2} \left(x - a\right)^2 \left(x + a\right)^2.$$

Tracciare il grafico delle fasi. Determinare le frequenze di oscillazione nel limite delle piccole oscillazioni. Determinare, anche solo in via approssimata per grandi energie, il periodo delle oscillazioni dei moti generici, lontano dalla zona del massimo locale.

-

5) Si consideri il sistema hamiltoniano a 2 gradi di libertà

$$H = \tfrac{1}{2} \left(p_x^2 + p_y^2\right) + \tfrac{1}{2} \left(Ax^2 + By^2\right) + x^2 y - \frac{C}{3} y^3.$$

Si completi canonicamente la trasformazione $X = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \quad X = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$ e si trovino la condizioni sui parametri A, B e C affinché il sistemi si separi in due ottosistemi indipendenti.

-

6) Sapendo che un corpo nero emette al picco $\lambda = 10\ \mu m$ un flusso di potenza $w_{max} = 1.0\ watt\ m^{-2}$, calcolare il flusso di fotoni a $\lambda_1 = 1\ \mu m$ usando la distribuzione do Planck.

-

7) Un fotone di frequenza $\omega = 3 \times 10^{22}\ sec^{-1}$ viene deflesso a 30^o da un elettrone libero fermo. Calcolare l'energia del fotone diffuso ed il momento finale dell'elettrone. ($\hbar = 1.054571800(13) \times 10^{-34}\ j\ sec$, $c = 299792458\ m/sec$, $m_e = 9.10938356(11) \times 10^{-31}$)

-

8) Nel sistema di riferimento dell'osservatore O, all'istante t_A viene sparato un missile dal punto A, di coordinata spaziale x_A, alla velocità v_M verso B di coordinata x_B. Da questo punto, all'istante $t_B = t_A + \Delta T$ viene sparato un missile alla stessa velocità , ma verso A. Un altro osservatore O' si muove rispetto a O nel verso positivo dell'asse $\hat{x}$ alla velocità relativa $V = 2\frac{c^2 \Delta T}{(x_A - x_B)}$, in modo tale che per a $t_O = t_{O'} = 0$ si abbia $0_O = 0_{O'} = 0$. Quale sequenza di eventi viene descritta da O' ? A quali velocità si muovono i missili secondo O' e a quali istanti di tempo raggiungono i loro obiettivi? Rappresentare quanto ottenuto nel piano dello spazio-tempo.

-