Fisica Matematica - a.a. 2014-15

26/10/2015

Nome Cognome Matricola:

1) Si consideri il sistema meccanico in figura 1, dove il pendolo ha lunghezza ℓ, massa m e la molla, libera di muoversi orizzontalmente, ha costante elastica k. Si scriva l'energia potenziale del sistema e si studino i punti di equilibrio, sotto la condizione che $\frac{g}{\ell} < \frac{k}{m}$ e si traccino le separatrici nel piano delle fasi.

   θ angolo con la verticale, $V = -\omega^2 \cos\theta + \frac{1}{2}\Omega^2 \cos^2\theta$, $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$, $\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. P. Eq. $x = 0$ (instabile), π(instabile), $\pm\theta^* = \pm \arccos \frac{\omega^2}{\Omega^2}$ (stabili). Vedasi fig. 2 e 3

2) Un punto materiale P di massa m è vincolato ad un piano cartesiano verticale (x, y), con asse y verticale ascendente, e mantiene distanza fissata L dalloriginе. Un secondo punto materiale Q di ugual massa è vincolato al medesimo piano e inoltre a mantenere distanza ℓ da P. Sul sistema agisce la gravità. Dopo una opportuna scelta delle coordinate lagrangiane , si scrivano la matrice cinetica e le equazioni del moto.

   Dalla Fig. 4 $x_P = L\sin\theta, \quad y_P = -L\cos\theta, \quad x_Q = x_P + \ell\sin\phi, \quad y_Q = y_P - \ell\cos\phi$
   $\dot{x}_P = L\cos\theta\,\dot{\theta}, \quad \dot{y}_P = L\sin\theta\,\dot{\theta}, \quad \dot{x}_Q = \dot{x}_P + \ell\cos\phi\,\dot{\phi}, \quad \dot{y}_Q = \dot{y}_P + \ell\sin\phi\,\dot{\phi}$
   $T = m\left(L^2\theta'(t)^2 + L\ell\theta'(t)\phi'(t)\cos(\theta(t)-\phi(t)) + \frac{1}{2}\ell^2\phi'(t)^2\right)$,
   $$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 2L^2 & L\ell\cos(\theta(t)-\phi(t)) \\ L\ell\cos(\theta(t)-\phi(t)) & \ell^2 \end{pmatrix}$$
   $V = -gm(2L\cos(\theta(t)) + \ell\cos(\phi(t)))$, $\quad \mathcal{L} = T - V$
   $$\begin{array}{l} \theta'' + \omega^2\sin(\theta) + \frac{1}{2}\epsilon\phi''\cos(\theta-\phi) + \frac{1}{2}\epsilon\left(\phi'\right)^2\sin(\theta-\phi) = 0 \\ \frac{\omega^2\sin(\phi)}{\epsilon} + \frac{\theta''\cos(\theta-\phi)}{\epsilon} - \frac{(\theta')^2\sin(\theta-\phi)}{\epsilon} + \phi'' = 0 \end{array} \quad \text{con } \omega^2 = g/L \text{ e } \epsilon = \ell/L.$$

3) Enunciare il principio dei lavori virtuali in presenza di forze di dissipazione.

   In generale le equazioni del moto si possono scrivere nella forma $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$ dove Q_k è la forza generalizzata corrispondente alla k-esima coordinata generalizzata q_k.
   Tuttavia non esistendo un potenziale per le forze, non è possibile scrivere una Lagrangiana $\mathcal{L} = T - V$.
   D'altra parte se alcune delle forze provengono da potenziali e altre da funzioni di dissipazione $D = D(\dot{q}_k)$, allora le equazioni di Lagrange prendono la forma $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k}$

4) Una particella di massa m è intrappolata in un potenziale sferico

$$V = \begin{cases} 0 & r \leq R \\ \infty & r > R \end{cases}$$

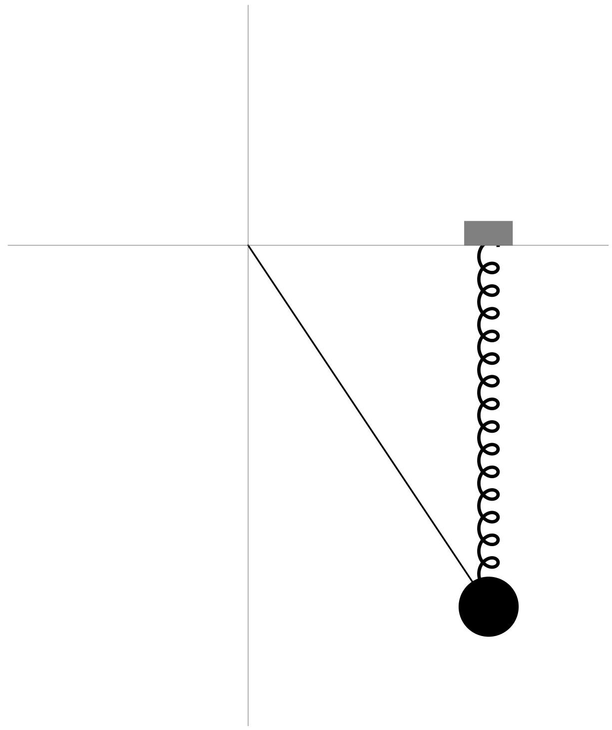

Figure 1:

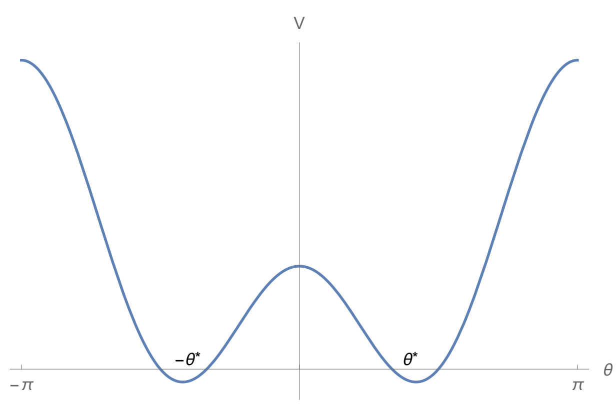

Figure 2:

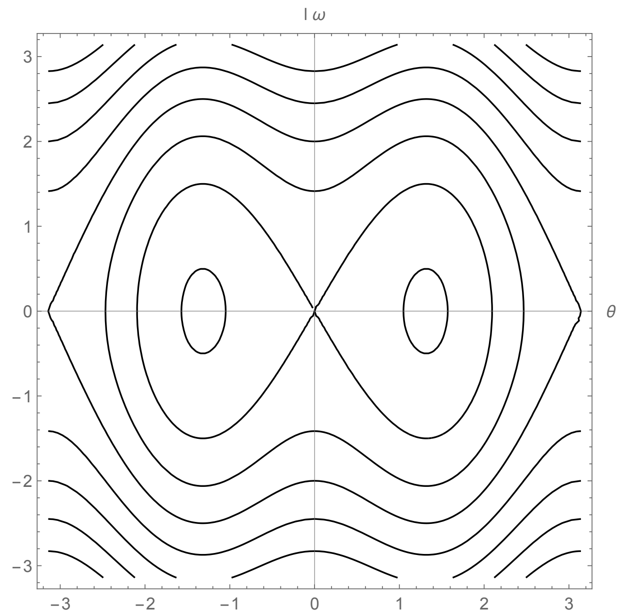

Figure 3:

esegue una traiettoria triangolare chiusa. Calcolare quanto vale il suo momento angolare al variare di massa e velocià e in quanto tempo percorre la traiettoria.

Data la simmetria sferica del sistema e il fatto che le forze sono centrali, deriva che tutte le traiettorie sono piane e quelle triangolari sono equilateri inscritti ad una circonferenza equatoriale. Quindi il lato è $\ell = \sqrt{3}R$. Quindi il modulo del momento angolare è $J = \frac{R}{2} m\, v = R\sqrt{\frac{m\,E}{2}}$
La particella si muove di moto rettilineo uniforme su ogni lato, quindi il periodo è $T = \frac{3\sqrt{3}R}{v} = \frac{3\sqrt{3}R\,m}{2J}$.

5) Sia dato il sistema hamiltoniano $H = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2} p_i^2 + g^2 a^2 \sum_{i=1}^{3} \csc\left[a\left(q_i - q_{i-1}\right)\right]^2$ con la condizione di periodicità $q_3 \equiv q_0$. Calcolare le frequenze dei modi normali attorno alla configurazione di equilibrio $\mathbf{q}_{eq} = \left(q_0 = 0,\ q_1 = \frac{2\pi}{3a},\ q_2 = -\frac{2\pi}{3a}\right)$.

$\partial_{q_i} H|_{\mathbf{q}_{eq}} \equiv 0$; Sostituzione : $q_2 \to -\frac{2\pi}{3a} + h_2 + q_0, q_1 \to \frac{2\pi}{3a} + h_1 + q_0,\ q_0 \to -\left(h_1 + h_2\right)$, $p_2 \to \dot{h}_2, p_1 \to \dot{h}_1, p(0) \to -\left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2\right)$. Approssimazione armonica per $\mathbf{h} = (h_1, h_2) \to 0$: $H_{arm} = \frac{16}{3}a^4 g^2\left(h_1^2 - h_2 h_1 + h_2^2\right) + 4a^2 g^2 + \dot{h}_1^2 + \dot{h}_2^2 + \dot{h}_1\dot{h}_2 = \dot{\mathbf{h}} \cdot \mathcal{T} \cdot \dot{\mathbf{h}} - \mathbf{h} \cdot \mathcal{V} \cdot \mathbf{h}$, dove $\mathcal{V} = \frac{16a^4g^2}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ e $\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. L'equazione secolare $\det\left[\mathcal{V} - \omega^2\mathcal{T}\right] = 0$ ha soluzioni positive $\omega_1 = \frac{4\,a^2\,g}{3}$ e $\omega_2 = 4\,a^2\,g$

6) Dare la definizione di tensore d'inerzia per un corpo continuo rispetto ad un sistema d'assi ortogonali $(O, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ e scrivere l'energia cinetica se il corpo ruota attorno ad un ulteriore asse $\hat{n}$.

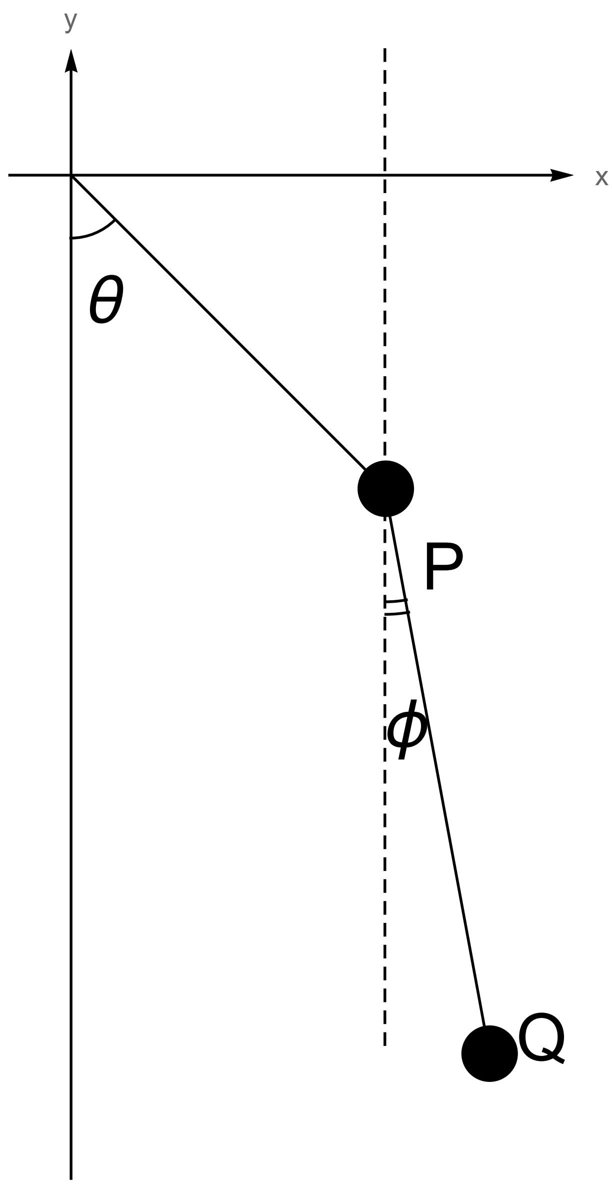

Figure 4:

Data una generica distribuzione di masse $\Delta m_i > 0$ nelle posizioni $\vec{r}_i = (x_1(i), x_2(i), x_3(i))$ nello spazio euclideo, il tensore d'inerzia del corpo è è dato dalle componenti

$$\mathcal{I}_{a,b} = \sum_i \Delta m_i \, x_a(i) \, x_b(i) \, .$$

Esso è un tensore simmetrico definito positivo, quindi è diagonalizzabile con autovalori reali positivi e i corrispondenti autovettori definiscono i corrispondenti assi principali d'inerzia.

Se il corpo rigido, fissato ad un punto, ruota attorno all'asse $\hat{n}$ con velocità angolare $\vec{\omega} = \omega\hat{n}$, allora la sua energia cinetica è

$$T = \tfrac{1}{2} \, \vec{\omega} \cdot \mathcal{I} \cdot \vec{\omega}.$$

6) Calcolare la parentesi di Poisson tra il vettore $\vec{P} = \vec{p} - \frac{q}{2} \, \vec{r} \times \vec{B}$, dove $\vec{B} = B \, \hat{z}$ e l'Hamiltoniana $H = \frac{1}{2m}\left[(p_x + qB/2\, y)^2 + (p_y - qB/2\, x)^2 + p_z^2\right] + \alpha L_z$, dove L_z è la terza componente del momento angolare.

$\{P_i, \ H\} = \alpha \, \epsilon_{i,j} \, P_j$ dove $\epsilon_{1,2} = -\epsilon_{2,1} = 1$ e 0 altrimenti.
Di conseguenza $\vec{P}$ sono quantità. conservate solo per $\alpha = 0$.

7) Mostrare per quali valori dei parametri la trasformazione

$$q' = a\, q + b\, p, \quad p' = c\, q + d\, p$$

è canonica.

La condizione di canonicità $\{q', \, p'\} = 1$ implica che il determinante della trasformazione sia $a\, d - b\, c = 1$.

8) Trovare le trasformazioni canoniche corrispondenti alla funzione generatirice $F(q, p') = (p' + a)^\alpha \, (q - b)^\beta$.

$p' = -\beta^{-1/\alpha} (q-b)^{-1/\alpha} \left[-p\,(q-b)^{-1/\alpha} + a\beta^{1/\alpha} (q-b)^{-\beta/\alpha}\right]$
$q' = \alpha\beta^{1/\alpha - 1} \, p^{\alpha-1} \, (q-b)^{(\alpha+\beta-1)/\alpha}$

*) Jacobi era un tedesco o un russo?

Nato 10/12/ 1804 Potsdam, Regno di Prussia
Morto 18/2/1851 Berlino, Regno di Prussia
Educazione Università di Knigsberg
Professore Università di Berlino
Noto per
Funzioni ellittiche di Jacobi, Jacobiano, Simbolo di Jacobi , Identità di Jacobi , operatori di Jacobi, equazione di xHamiltonJacobi