Introduzione alla Fisica Moderna - a.a. 2015-16

18/3/2016

Nome Cognome Matricola:

1) Si consideri il sistema di equazioni del primo ordine

$$\dot{x} = -y, \dot{y} = \eta\, y + \sin x$$

determinando i punti di equilibrio, il loro carattere e si traccino le traiettorie attorno a detti punti nel piano delle fasi

- Imponendo $\dot{x} = \dot{y} = 0$ si trovano i punti di equilibrio $\mathbf{e_1} = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ e $\mathbf{e_2} = (\pi, \mathbf{0})$. La linearizzazione del sistema attorno ai punti di equilibrio e i corrispondenti autovalori sono rispettivamente: $L_{\mathbf{e_1}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \eta \end{pmatrix}$, $\left\{\frac{1}{2}\left(\eta - \sqrt{\eta^2 - 4}\right), \frac{1}{2}\left(\sqrt{\eta^2 - 4} + \eta\right)\right\}$ e $L_{\mathbf{e_2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & \eta \end{pmatrix}$, $\left\{\frac{1}{2}\left(\eta - \sqrt{\eta^2 + 4}\right), \frac{1}{2}\left(\sqrt{\eta^2 + 4} + \eta\right)\right\}$. Gli autovalori di $L_{\mathbf{e_2}}$ sono reali e di segno opposto per ogni valore del parametro η, quindi $\mathbf{e_2}$ è sempre instabile . Invece gli autovalori di $L_{\mathbf{e_1}}$ sono reali per $|\eta| > 2$ e complessi coniugati altrimenti. Le parti reali hanno sempre il segno di η, pertanto per $\eta < 0$ il punto $\mathbf{e_1}$ è stabile, altrimenti instabile. (vedi Fig. 1 e 2)

2) Un triangolo rettangolo ABC, di massa M, può scivolare senza attrito lungo il cateto AB, poggiato su una guida orizzontale. Sull'ipotenusa AC si muove senza attrito una massa m. Si scriva la Lagrangiana del sistema e si determinino le costanti del moto. Come si scriverebbero le equazioni del moto se esistessero degli attriti radenti tra cateto e guida e tra massa e ipotenusa?

-
$$\mathcal{L} = -gm\sin(\alpha)\mathrm{s}(t) + \frac{1}{2}m\left(2\cos(\alpha)\mathrm{s}'(t)\mathrm{x}'(t) + \mathrm{s}'(t)^2 + \mathrm{x}'(t)^2\right) + \frac{1}{2}\mathrm{M}\mathrm{x}'(t)^2$$

Poiché $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$ la componente orizzontale del momento è

$$(m + \mathrm{M})\mathrm{x}'(t) + m\cos(\alpha)\mathrm{s}'(t) = cost$$

3) Due masse uguali possono scorrere senza attrito lungo due guide rettilinee che formano un angolo $0 < \alpha < \pi/2$ con la retta verticale, in ciascuno dei semi-piani. Sulle particelle agisce la gravità , verso il basso, ed una forza di richiamo elastica lungo la loro congiungente.

Si dimostri che il sistema ha una sola configurazione di equilibrio stabile e si calcolino le piccole oscillazioni attorno ad essa.

- -

4) Un satellite orbitante attorno alla Terra, una volta giunto al perigeo subisce una accelerazione radiale dovuta ad una forza impulsiva. Il momento radiale viene incrementato di un impulso π. Determinare di quanto cambiano il momento angolare totale, l'energia meccanica totale ed il vettore di Runge-Lenz. Datene una interpretazione fisica.

- -

5) Mostrare che la trasformazione

$$p = m\omega q\ \cot Q, \qquad q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q$$

è canonica.

- -

6) Si determini per quali valori delle costanti α e β il sistema

$$\dot{p}_1 = 0, \quad \dot{p}_2 = 0, \quad \dot{q}_1 = p_1 + p_2, \quad \dot{q}_2 = \alpha\, p_1 - 2\, p_2 + \beta\, q_2^4$$

è hamiltoniano. Si determinino una Hamiltoniana e una corrispondente Lagrangiana. Infine si dica se una funzione della forma $F = q_1 + f\,(p_1, p_2)\ t$ può essere una costante del moto.

-

7) Un corpo, considerato nero, viene mantenuto alla temperatura costante di $T_c = 2000\ ^oK$. Calcolare la potenza netta emessa dal corpo, sapendo che la sua superficie totale è $A = 0.20\ m^2$. Calcolare la lunghezza d'onda massima di emissione e stabilire se essa è nel visibile.

- -

8) Nel sistema di riferimento del laboratorio una particella di massa a riposo m_1 collide con velocità $v\ \hat{x}$ su un'altra particella ferma di massa m_2. Calcolare le componenti del quadrimomento totale e il suo modulo.

E' possibile trovare un sistema di riferimento nel quale annullare tutte le componenti spaziali del quadrimomento? E se si, quale deve essere la trasformazione di Lorentz da applicare?

- -

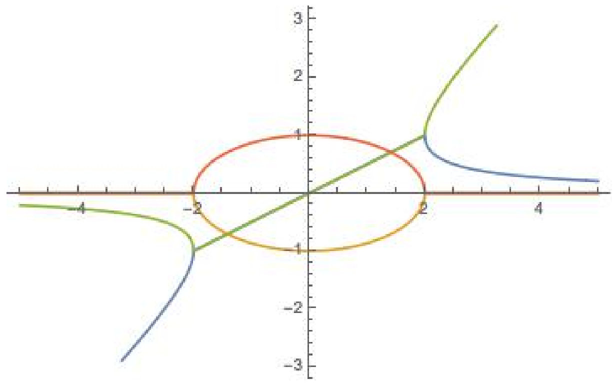

Figure 1: Esercizio 1): Parte reale (blu e verde) e immaginaria (gialla e arancio) dei due autovalori di $L_{\mathbf{e_1}}$

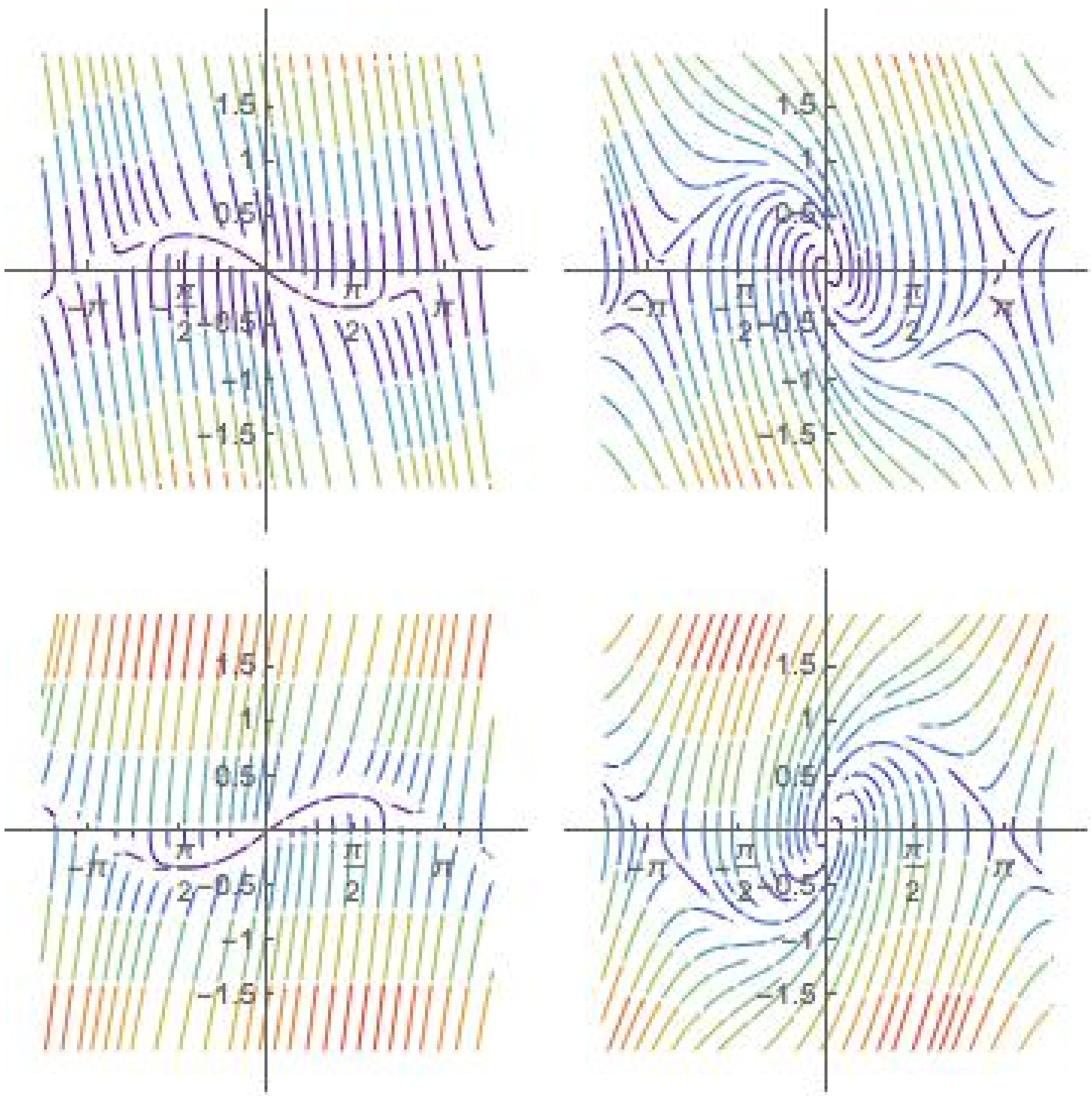

Figure 2: Esercizio 1): Le traiettorie nel piano delle fasi al variare del parametro $\eta = 3, 1, -3, -1$, da sinistra a destra e dall'alto in basso.

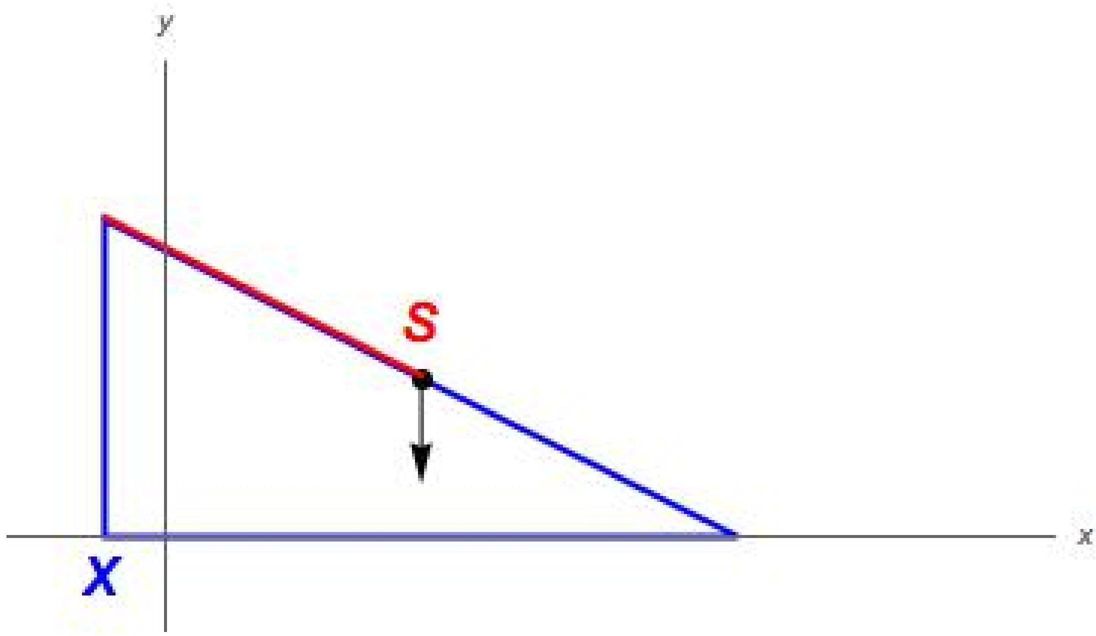

Figure 3: Esercizio 2):