Introduzione alla Fisica Moderna - a.a. 2017-18

17/09/2018

Nome Cognome Matricola:

1) Si devono caratterizzare le proprietà di un impulso di particelle cariche, considerato come un segmento rigido di lunghezza $\ell_0 = 2,000\,\mathrm{cm}$, che deve attraversare la zona di interazione, solidale con il laboratorio, in un intervallo di tempo $\Delta\, t = 2,000\, psec$.

   Calcolare il valore di β con cui viaggia il fascio rispetto al laboratorio.

   - La lunghezza di un segmento va misurata tra gli estremi a tempo fissato, cioé nel suo sistema di riferimento. Quindi ℓ_0 è la lunghezza propria dell'impulso di particelle. esso quindi nel sistema del laboratorio è visto di lunghezza $\ell = \frac{\ell_0}{\gamma}$. In tale sistema però il passaggio nella zona di interazione deve essere tale che $\ell = v\,\Delta\, t$, cioé anche $\beta = \frac{v}{c} = \frac{\ell}{c\,\Delta\, t} = \frac{\ell_0}{c\,\gamma\,\Delta\, t}$. Conviene quadrare l'espressione e tener conto della dipendenza di γ da β, ottenendo

   $$\beta = \frac{\ell_0}{\sqrt{\ell_0^2 + c^2\,(\Delta\, t)^2}} \approx 0.9995.$$

2) Il campo elettrostatico prodotto da una distribuzione filiforme rettilinea di carica, con densità di carica lineare λ, è dato da $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r}$. Se un osservatore si muove con velocità v parallelamente rispetto al filo. Quale campo elettrico e campo magnetico osserverà ?

- Osservato che nel nostro sistema di riferimento il campo magnetico è nullo, le trasformazioni dei campi si riducono alle seguenti:

$$\vec{E}' = \gamma\,\vec{E} - \frac{\gamma^2\,\vec{\beta}\cdot\vec{E}}{\gamma+1}\,\vec{\beta}, \quad \vec{B}' = -\gamma\,\vec{\beta}\times\vec{E},$$

dove i campi accentati sono quelli misurati dall'osservatore in moto e $\vec{\beta} = \frac{v}{c}\hat{z}$, diretto come l'asse fissato dal filo.
In primo luogo è presente un campo magnetico le cui linee di flusso sono circonferenze concentriche con il filo di carica, avente l'espressione

$$\vec{B}' = \frac{\lambda\,\gamma\,\beta}{2\sqrt{2}\pi\epsilon_0}\frac{\hat{\phi}}{r},$$

in modo che $\hat{z}$, $\hat{r}$, $\hat{\phi}$ formino un sistema di mano destra.
Il campo elettrico possiede la componente radiale rispetto all'asse del filo

$$E'_r = \frac{\gamma\lambda}{2\pi\,\epsilon_0\,r},$$

ma non una una parallela, in quanto $\vec{\beta}\cdot\vec{E} = 0$.

3) Un elettrone viene accelerato da un campo elettrico uniforme di intensità $E_0 = 10KVolt/m$ per un intervallo di tempo 10^{-6} sec. Usando le leggi della dinamica relativistica calcolare lo spazio che percorre e con quale velocit finale.

- E' noto dalle leggi del moto relativistico (componente 0) che vale l'equazione

$$m\,\gamma^3\vec{v}\cdot\vec{a} = \vec{f}\cdot\vec{v},$$

che ridotta alla sola direzione $x^1 \equiv x$ diventa

$$\frac{f}{m} = \frac{\ddot{x}}{\left(1-\left(\frac{\dot{x}}{c}\right)^2\right)^{3/2}}$$

con le condizioni iniziali $x\,(0) = \dot{x}\,(0)$ e dove f è costante pari a $f = e\,E_0$. Effettuando la sostituzione $\dot{x} = v$, l'equazione diventa di primo ordine in v e può essere integrata una volta, dando luogo all'espressione

$$v = c\left[1+\left(\frac{f}{m\,c}\,t\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{f}{m\,c}\,t\right).$$

Integrando ulteriormente in $0 \le t \le T$ si ottiene lo spazio percorso

$$L = \frac{fT^2}{m\left(\sqrt{\frac{f^2T^2}{c^2m^2}+1}+1\right)} = 253.0\,\mathrm{m}$$

4) Un sistema meccanico è descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x} & = k\,x - x\,y \\ \dot{y} & = -y + h\,x\,y \end{cases}. \tag{1}$$

Si individuino tutti i punti di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità al variare di $k,\ h \in \mathbf{R}^+$. Si tracci un grafico delle linee di flusso nel piano delle fasi.

- I punti di equilibrio sono $p_1 = \{0, 0\}$ e $p_2 = \left\{\frac{1}{h}, k\right\}$.
I relativi valori della matrice jacobiana sono $j_1 = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $j_2 = \begin{pmatrix} 0 & hk \\ -\frac{1}{h} & 0 \end{pmatrix}$.
I rispettivi autovalori sono: $\{-1, k\}$ per p_1, mentre per p_2 sono $\pm\imath\sqrt{k}$. Questo significa che p_1 è un punto di sella, quindi di equilibrio instabile, mentre p_2 è un centro, quindi stabile, ma non asintoticamente stabile.

5) Si consideri il sistema costituito da due corpi rigidi uguali a forma di sbarra, che interagiscono tra loro con un momento torcente della forma $\tau \sin\left(\theta_{rel}/2 - \theta_0\right)$ e sono collegati in catena con delle pareti fisse, con le quali interagiscono ancora con dei momenti torcenti relativi (in verso opposto) della forma $\tau \sin(\theta)$, dove θ è l'angolo che ciascuna sbarra forma con la parete adiacente.

(a) Si scriva la lagrangiana del sistema.
(b) Si determinino le posizioni di equilibrio
(c) Si scriva la lagrangiana nell'approssimazione delle piccole oscillazioni
(d) Si scrivano le equazioni di Eulero - Lagrange per il sistema approssimato.
(e) Si calcolino le frequenze dei modi normali.

-

6) Ricordando che l'Hamiltoniana Lagrangiana per una particella relativistica di massa a riposo m e carica q in un campo magnetico uniforme è

$$H = c\sqrt{m^2\, c^2 + \left(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2},$$

scrivere le equazioni del moto nella gauge simmetrica e studiare le eventuali leggi di conservazione.

-

7) Usando le parentesi di Poisson fondamentali per (q, p) la trovare per quali valori di a, b, c, d la trasformazione è canonica

$$Q = q^a \ \cos b\, p, \qquad P = q^c \ \sin d\, p \tag{2}$$

e trovare una funzione generatrice di tipo F_3 .

-

8) Sapendo che la frequenza di soglia dell'effetto fotoelettrico di un metallo è $\nu_0 = 6.5 \times 10^{14}\ Hz$, dire quanto vale l'energia cinetica massima di un fotoelettrone estratto da un fotone di energia $E_f = 7.5\ eV$. Valutare se è sufficiente utilizzare le espressioni meccaniche classiche o quelle relativistiche.

```
-
```

1 Costanti e fattori di conversione

- Velocità della luce nel vuoto: $c = 299792458 \; m/sec$
- Costante di Planck: $h = 6.63 \times 10^{-34} \; joule\, sec$
- $1 \; eV = 1.60218 \times 10^{-19} \; joule$
- Costante di Wien: $b = 2.898 \times 10^{-3} \; m \; {}^oK$
- Costante di Stefan-Boltzmann : $\sigma = 5.670 \times 10^{-8} \; \frac{W}{m^2 \; {}^oK^4}$
- Costante di Boltzmann $k_B = 1.28 \times 10^{-23} \; \frac{joule}{{}^oK}$
- Numero di Avogadro : $N_A = 6,022 \times 10^{23}$
- Massa del protone : $m_p = 1.6726219 \times 10^{-27} \; kg$
- Massa dell'elettrone : $m_e = 9.10938 \times 10^{-31} \; kg$
- Massa del neutrone : $m_n = 939.6 \, MeV$
- Lunghezza d'onda Compton per l'elettrone : $2.426 \times 10^{-12} \, m$