Introduzione alla Fisica Moderna - a.a. 2015-16

21/02/2017

Nome Cognome Matricola:

1) Un sistema meccanico è descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x} & = k\,x + x\,y^2 \\ \dot{y} & = -y^3 - x^2\,y \end{cases}, \qquad k \neq 0. \tag{1}$$

Si individuino tutti i punti di equilibrio del sistema e se ne studi la stabilità al variare di $k \in \mathbf{R}$. Si tracci un grafico delle linee di flusso nel piano delle fasi.

- C'è l'unico punto fisso $(0,0)$. La linearizzazione attorno ad esso è data dalla matrice $A = \frac{\partial(\dot{x},\dot{y})}{\partial(x,y)}|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Gli autovalori di A sono ovviamente a e 0 e pertanto il punto di equilibrio è instabile per $k > 0$, mentre non è definito per $k < 0$.
Per studiare la stabilità in asintotica si può considerare la funzione positiva $V_L = x^2 + y^2$, che ha un minimo assoluto in $(0,0)$. La sua derivata temporale è $\dot{V_L} = 2kx(t)^2 - 2y(t)^4$, che pertanto è negativa per $k < 0$. Quindi in questo caso il moto è asintoticamente stabile. Le linee di flusso sono riportate in Fig. 1

2) Un sistema meccanico è costituito da 5 punti materiali di uguale massa , diciamo m, vincolati come segue. P_1 e P_2 si muovono su una guida circolare di raggio $r = 1$ posta nel piano verticale. P_3 e P_4 possono scorrere lungo la retta orizzontale tangente alla circonferenza nello stesso piano. P_5 invece può muoversi solo lungo la retta verticale passante per il centro della circonferenza. P_1 e P_3, P_2 e P_4, P_4 e P_5 e infine P_3 e P_5 sono tra di loro collegati da una molla armonica di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Tutte avviene sotto l'azione della forza peso e in assenza attriti. Scrivere la Lagrangiana del sistema.

-

3) Si trovi se la Lagrangiana $L = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - k^2y^2$ ammetta coordinate cicliche, quali siano i momenti coniugati, se esistono punti di equilibrio per il moto, qual è l'espressione dell'energia meccanica.

-

4) Un satellite orbitante attorno alla Terra, una volta giunto al perigeo subisce una accelerazione radiale dovuta ad una forza impulsiva. Il momento radiale viene incrementato di un impulso P_0. Determinare di quanto cambiano il momento angolare totale, l'energia meccanica totale ed il vettore di Runge-Lenz. Datene una interpretazione fisica.

- Il momento cambia radialmente secondo $\vec{p} \to \vec{p}\,' = \vec{p} + P_0 \hat{r}$, pertanto il momento angolare $\vec{L}' = \vec{r} \times \vec{p}\,' = \vec{L}$ non cambia.
D'altra parte l'energia meccanica $\mathcal{E}' = \frac{(\vec{p}\,')^2}{2m} - \frac{k}{r} = \mathcal{E} + \frac{P_0^2}{2m}$, dove si è tenuto conto dell'ortogonalità tra $\vec{p}$ ed $\hat{r}$ al perigeo.
Infine il vettore di Runge-Lenz $\vec{A}\,' = \vec{p}\,' \times \vec{L}\,' - mk\hat{r} = \vec{A} + P_0 \hat{r} \times \vec{L} = \vec{A} - P_0 r \vec{p}$.
Quindi l'energia del satellite aumenta, con un cambio dell'orbita, di nuovo semiasse maggiore $a' = \frac{k}{2|\mathcal{E}'|} \approx a\left(1 + \frac{p_0^2}{2m|\mathcal{E}|}\right)$ ed eccentricità $e' = \sqrt{1 - \left(\frac{2\mathcal{E}'}{A'}\right)^2}$. Inoltre il nuovo semiasse maggiore punterà nella direzione di $\vec{A}\,'$.

5) Siano (q, p) e (Q, P) due coppie di coordinate canoniche, collegate tra loro da una trasformazione lineare $(q, p) = A\,(Q, P)$, dove A è una opportuna matrice. Trovare tutte le possibili trasformazioni di questo tipo.

- - Tutte le matrici reali a determinante 1

6) Un sistema Hamiltoniano è descritto da $H = \frac{1}{1+x}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + (1-x)\,(p_x + p_y + 1)$. Dimostrare che l'energia e il momento lineare p_y sono costanti del moto. Esiste un terzo integrale del moto non banale?

-

7) Un corpo, considerato nero, viene mantenuto alla temperatura costante di $T_c = 2000\ {}^oK$. Calcolare la potenza netta emessa dal corpo, sapendo che la sua superficie totale è $A = 0.20\ m^2$. Calcolare la lunghezza d'onda massima di emissione e stabilire se essa è nel visibile.

- La potenza raggiante emessa dal corpo è data dalla legge derivata da quella di Stefan-Boltzmann $P = A\sigma T^4$, dove $\sigma = 5.7 \times 10^{-8}\ W\ m^{-2}\ K^{-4}$ è la costante di Stefan. I dati conducono al valore di potenza irraggiata $P = 0.18 \times 10^6\ W$. Per quanto riguarda la lunghezza d'onda di picco si utilizza la legge dello spostamento di Wien, che conduce al valore $\lambda_{max} = 0.0029\ m\ K/2000K = 1.45 \times 10^{-6} m$. Quindi il picco di emissione è nelle microonde-infrarosso, quindi non visibile.

8) Nel sistema di riferimento del laboratorio una particella di massa a riposo m_1 collide con velocità $v\ \hat{x}$ su un'altra particella ferma di massa m_2. Calcolare le componenti del quadrimomento totale e il suo modulo.

E' possibile trovare un sistema di riferimento nel quale annullare tutte le componenti spaziali del quadrimomento? E se si, quale deve essere la trasformazione di Lorentz da applicare?

-Si ha che $p_1^\mu = m_1\gamma_1 (c, v_1, 0, 0)$ dove $\gamma_1 = \left[1-(v_1/c)^2\right]^{-1/2}$ e $p_2^\mu = m_2 (c, 0, 0, 0)$. Quindi $p_{tot}^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu = ((m_1\gamma_1 + m_2) c, m_1\gamma_1 v_1, 0, 0)$, inoltre $p_{tot} = \left[(m_1\gamma_1 + m_2)^2 c^2 - (m_1\gamma_1 v_1)^2\right]^{-1/2} = c\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2\gamma_1}$.
Per annullare la componente spaziale del quadrimomento totale dobbiamo effettuare una trasformazione di Lorentz, che ponga il centro di massa a riposo in detto sistema. Questo comporta che bisogna trovare quella trasformazione , individuata dalla velocità $\beta\hat{x}$, tale che le nuove velocità delle particelle siano : $\beta_1' = \frac{\beta_1-\beta}{1-\beta_1\beta}$ e $\beta_2' = -\beta$. Inoltre deve valere la relazione sulla parte spaziale del momento $m_1\gamma_1'\beta_1' + m_2\gamma_2'\beta_2' = 0$. Infine il quadrimomento quadro deve essere uguale a quello calcolato precedentemente. Quindi deve essere $(m_1\gamma_1' + m_2\gamma_2')^2 c^2 = p_{tot}^2$. Dalla relazione sul momento spaziale si può ricavare $m_1\gamma_1'$ e sostituire la sua espresssione nella precedente formula per il quadrimomento quadro, poi utilizzare le espressioni di β_1' e di β_2', ottenendo un'equazione di 2^o grado per β. La radice $\beta = \frac{\beta_1\left(2\gamma^3 m_1 m_2 + \gamma^2 m_1^2 + m_2\left(\gamma^2 m_2 - \sqrt{(\gamma m_2 + m_1)^2}\right)\right)}{(\gamma m_1 + m_2)((2\gamma^2-1)m_2 + \gamma m_1)}$ fornisce la velocità del sistema di riferimento solidale con il centro di massa del sistema.

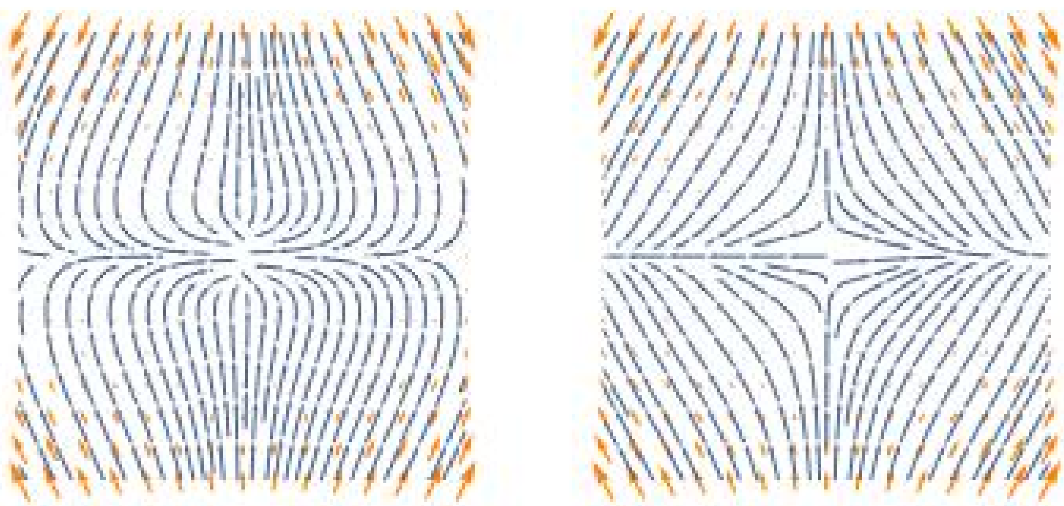

Figure 1: A sinistra $k < 0$, a destra $k > 0$