Introduzione alla Fisica Moderna- a.a. 2014-15

1/7/2015

Nome Cognome Matricola

1) Qual è l'intersezione del Gruppo di Galilei con quello di Poincaré (Lorentz $\bigcup$ Traslazioni)

Il complemento tra il gruppo di Galilei e quello di Poincaé è costituito dalla sostituzione delle trasformazioni di Galilei proprie con quelle di Lorentz proprie. Quindi Galilei $\bigcap$ Poincaré $=$ Traslazioni $\bigcup$ Rotazioni Spaziali.

2) Determinare la Lagrangiana di un punto materiale soggetto alla forza peso, vincolato a muoversi lungo una parabola di equazione $y = a^2x^2$, posta verticalmente e rotante con velocità angolare costante ω.

Il punto materiale nello spazio è determinato dal vettore posizione $\vec{r} = \left(r\ \cos(\omega\ t + \varphi_0),\ r\ \sin(\omega\ t + \varphi_0),\ a^2r^2\right)$, dove $r = r(t) \geq 0$. Pertanto la sua velocità è $\vec{v} = \left(\dot{r}\ \cos(\omega\ t + \varphi_0) - \omega\ r\ \sin(\omega\ t + \varphi_0),\ \dot{r}\ \sin(\omega\ t + \varphi_0) + \omega\ r\ \cos(\omega\ t + \varphi_0),\ \dot{r}\ \sin(\omega\ t + \varphi_0),\ 2a^2r\ \dot{r}\right)$
La f. lagrangiana è

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \omega^2r^2 + 4a^4r^2\ \dot{r}^2\right) - mga^2r^2.$$

3) Stabilire se il sistema dinamico definito nel piano privato dell'origine e di equazioni in coordinate polari :

$$\begin{cases} \dot{r} &= 1 - r \\ \dot{\theta} &= 1 - \cos\theta \end{cases}$$

è Hamiltoniano

Se il sistema fosse hamiltoniano dovrebbe esistere una funzione $H(r,\theta)$ tale che $\dot{r} = \partial_\theta H,\quad \dot{\theta} = -\partial_r H$, quindi dovrebbe valere che $\partial_r\dot{r} = -\partial_\theta\dot{\theta}$. Ma dal sistema si ha $-1 \neq -\sin\theta$, quindi il sistema non è hamiltoniano.

4) Fissato il momento angolare ℓ_0 della particella ridotta, che interagisce con Il potenziale centrale $V(r) = \frac{a\ e^{-\alpha r}}{r}$, stabilire se esistono e per quali valori di energia orbite limitate.

Il potenziale efficace $U_{eff} = U(r) + \frac{\ell^2}{2\ m\ r^2}$ è sempre positivo e monotonamente decrescente se l'ampiezza $a > 0$. Quindi in questo caso non esistono moti limitati.
Viceversa, se $a < 0$ esiste uno zero r_0 per l'equazione trascendente $\ell^2 e^{a\alpha r} + 2amr = 0$, che non può essere espressa in termini di funzioni elementari.
Nel limite per $\frac{|a|m}{2\alpha\ell^2} >> 1$, si ottengono soluzioni approssimate $r_0 \approx \frac{\ell^2}{|a|\ m}$ In questo caso esistono dei moti limitati.
Nel limite precedente $\frac{|a|m}{2\alpha\ell^2} >> 1$, la posizione del minimo del potenziale U_{eff} è ben approssimato da $r_{min} \approx \alpha^{-1}$, che è il raggio delle orbite circolari.

5) Si consideri una particella di massa m e carica elettrica q sottoposta all'azione di un campo magnetico uniforme $= B\,\hat{z}$. Si scriva la lagrangiana nella gauge simmetrica. Si effettui una traslazione di coordinate e si spieghi perché le equazioni del moto restano invariate.

Nella gauge simmetrica il potenziale vettore è dato da $\vec{A} = -\frac{1}{2}B\,(y\hat{x} - x\hat{y})$.
La lagrangiana per la particella è $L_0\left(\vec{r}, \dot{\vec{r}}\right) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - \frac{1}{2}qB\,(y\dot{x} - x\dot{y})$.
Se si effettua una qualunque traslazione del piano $x' = x + x_0, \quad y' = y + y_0$, si ottiene la nuova lagrangiana

$$L' = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}'}^{\,2} - \frac{1}{2}qB\left(y'\dot{x}' - x'\dot{y}'\right) + \frac{1}{2}B\left(y_0\dot{x}' - x_0\dot{y}'\right) = L_0\left(\vec{r}', \dot{\vec{r}'}\right) + \frac{d}{d\,t}\frac{1}{2}B\left(y_0 x' - x_0 y'\right)$$

Ma lagrangiane che differiscono per la derivata totale di una funzione arbitraria danno luogo alle stesse equazioni del moto.

6) Un fascio omogeneo di proiettili puntiformi di massa m colpisce elasticamente una sfera dura di raggio 1 cm e massa $M >> m$. Sapendo che il flusso del fascio è $j = 10\ sec^{-1}m^{-2}$, quante particelle si osservano ad un angolo di deflessione di 45^o dopo 10 sec.

Il numero di eietti all'interno di un angolo solido in una certa direzione per unità di tempo è data da $\frac{d\,n}{d\,\Omega} = \sigma\,(\theta)\ J$, dove J è il flusso del fascio incidente e $\sigma\,(\theta)$ è la sezione d'urto differenziale. Nel caso della sfera dura essa vale $\sigma\,(\theta) = \frac{R_0^2}{4}$, dove R_0 è il raggio della sfera ed è indipendente dall'angolo di diffusione. Pertanto il numero di particelle che si osservano in per unità di angolo solido sono

$$\frac{d\,n}{d\,\Omega}\,\Delta t = \frac{10^{-4}\ m^2}{4} \times 10\ sec^{-1}m^{-2} \times 10\ sec = .25 \times 10^{-2}.$$

7) Due sbarrette di lunghezza a riposo ℓ_1 e ℓ_2 viaggiano parallelamente alle velocità v_1 nota e v_2, rispetto ad un osservatore O. A tale osservatore risultano di pari lunghezza. Qual è la relazione tra le loro velocità .

Per l'osservatore entrambe le sbarrette sono contratte $\ell_1 = \frac{\ell_1^0}{\gamma_1} = \ell_2 = \frac{\ell_2^0}{\gamma_2}$, da cui $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\ell_1^0}{\ell_2^0}$.
Elevando al quadrato si ottiene $\beta_2^2 = 1 - \left(\frac{\ell_1^0}{\ell_2^0}\right)^2\left(1 - \beta_1^2\right)$.

8) Un corpo nero emette alla temperatura di 5380 ^oK. Qual è la corrispondente frequenza di massima emissione?

Dalla legge di spostamento di Wien si ha $\lambda = 2.9\times10^{-3}/T m = 0.54\times10^{-6}m$, che corrisponde alla frequenza $\omega = \frac{2\pi\,c}{\lambda} = 3.5 \times 10^{15}\ sec^{-1}$.

*) E' vero che sulla Luna esiste un cratere intitolato a Jacobi per onorare la sua fama di matematico ?

Si, $56.7^o\ S\ \ 11.4^o\ E$