Introduzione alla Fisica Moderna - a.a. 2017-18

11/06/2018

Nome Cognome Matricola:

1) Si consideri il sistema dinamico nonlineare

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 4y,\\ \dot{y} &= -4\left(x-\frac{1}{2}\right)-2R\left(x+y\right),\end{aligned}$$

dove la funzione a rampa di saturazione R è definita da

$$R\left(z\right)=\begin{cases} z & \|z\|\leq 1\\ \mathrm{sign}\left(z\right) & \|z\|>1\end{cases} \tag{1}$$

Si determinino i punti di equilibrio, la loro stabilità lineare e se è asintoticamente stabile. Tracciare le linee diflusso del campo vettoriale.

-

2) Si consideri il sistema lagrangiano costituito da un punto materiale P di massa m , vincolato a muoversi su una superficie toroidale liscia descritta dalle equazioni parametriche

$$x=(R+r\cos\theta)\cos\phi,\qquad y=(R+r\cos\theta)\sin\phi,\qquad z=r\sin\theta,$$

con $0<r<R$ i raggi del toro e $(\theta,\phi)\in[0,2\pi]^2$. Il sistema non è soggetto a forze esterne.

(a) Si scriva la lagrangiana del sistema.
(b) Si determinino eventuali leggi di conservazione.
(c) Si riduca la lagrangiana rispetto al momento coniugato a ϕ.
(d) Si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange per il sistema ridotto.

-

3) Si scrivano l'Hamiltoniana e le equazioni del moto per un oscillatore armonico bi-dimensionale radiale, posto su una piattaforma rotante a velocità angolare costante Ω. La costante di richiamo elastica sia k e la posizione di equilibrio $r_0 > 0$

-

4) Una particella di massa unitaria è sottoposta all'azione del potenziale unidimensionale

$$V(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 4x.$$

Determinare le frequenze di oscillazione nel limite delle piccole oscillazioni. Determinare il valore di energia, diciamo E_s, che corrisponde alla separatrice dei moti. Calcolare il moto approssimato in un intorno del punto di equilibrio instabile.

-

5) Supponendo di avere un sistema hamiltoniano sia costituito da una particella nel piano, di massa m, immersa in un potenziale centrale αr^k con $\alpha \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$, dimostrare che

(a) il momento angolare e l'energia totale formano un sistema di integrali del moto in involuzione completo;

(b) scrivere l'equazione di Hamilton - Jacobi esiste e determinarne un suo integrale completo

-

6) Sapendo che l'effetto fotoelettrico sul sodio si interrompe per valori della frequenza inferiori a $\nu_0 = 5.6 \times 10^{14}\ Hz$, dire se un fotone di energia $E_f = 7.5\ eV$ può provocare l'emissione di elettroni dal sodio e con quale energia massima.

-

7) Un fotone di frequenza $\omega = 4 \times 10^{22}\ sec^{-1}$ viene deflesso a 45^o da un elettrone libero fermo. Calcolare l'energia del fotone diffuso ed il momento finale dell'elettrone. ($\hbar = 1.054571800(13) \times 10^{-34}\ j\ sec$, $c = 299792458\ m/sec$, $m_e = 9.10938356(11) \times 10^{-31}$)

-

8) Ricordando che la Lagrangiana per la particella libera relativistica è data da $L_0 = -m\ c^2\ \sqrt{1-\beta^2}$, scrivere la Lagrangiana per una carica q in un campo elettrostatico uniforme relativistico monodimensionale, derivare il momento coniugato e , effettuando una trasformazione di Legendre, calcolare l'Hamiltoniana. Stabilire se questa quantità si conservata e qual è in suo significato fisico.

-