Introduzione alla Fisica Moderna - a.a. 2016-17

12/06/2017

Nome Cognome Matricola:

1) Stabilire se un sistema meccanico è descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x} & = -y + x\left(1 - x^2 - y^2\right) \\ \dot{y} & = x + y\left(1 - x^2 - y^2\right) \end{cases} . \tag{1}$$

abbia dei punti di equilibrio ed eventualmente se stabili/instabili. Verificare che possiede il cerchio unitario come orbita periodica.

-

2) Un sistema meccanico è costituito da 2 punti materiali di uguale massa m, vincolati a muoversi su una parabola liscia di equazione $z = \frac{x^2}{\ell}$, con l'asse $\hat{z}$ verticale, rotante attorno ad esso con velocità angolare costante ω. Essi interagiscono tra di loro con una forza di richiamo elastica, che agisce lungo la congiungente, con costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Scrivere la Lagrangiana del sistema. Trovare le configurazioni di equilibrio.

-

3) Una particella di massa m è soggetta al potenziale $U = \frac{k}{2}(x^2 + y^2) + \frac{h}{2}\, z^2$, con $h \neq k > 0$. Scrivere la Lagrangiana del sistema in coordinate cilindriche e dire se sono ammesse coordinate cicliche. Dare l'espressione dei momenti coniugati. Quali integrali del moto ammette il sistema?

-

4) Un satellite viene posto lungo la congiungente Terra-Sole. Trascurando la rotazione del sistema, determinare se lungo questo asse ci sono delle posizioni di equilibrio per il suo moto e se esse sono stabili. ($M_T = 5.972 10^{24} kg$, $M_S = 1.98 10^{30} kg$, $G = 6.67428 \times 10^{-11} m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}$)

-

5) Si consideri l'Hamiltoniana $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{\ell^2}{2q^2}$ e si vuole applicare a tale sistema una trasformazione canonica della quale si conosce solo una parte : $P = p\ q$. Cercare una funzione generatrice di tipo $F_2 = F_2\,(q, P, t)$, che consente di completare la trasformazione canonica. Si calcoli l'Hamiltoniana trasformata.

-

6) Un sistema Hamiltoniano è definito da $H = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2\right) + x^2 y - \frac{1}{3} y^3$. Derivare

le equazioni del moto . Trovare i punti di equilibrio del sistema a 2 gradi di libertà .

-

7) Calcolare l'energia di un fotone deflesso a 45^o da un elettrone libero fermo, sul quale ha inciso un fotone di frequenza $\omega = 3 \times 10^{20}\ sec^{-1}$. ($\hbar = 1.054571800(13) \times 10^{-34}\ j\ sec$, $c = 299792458\ m/sec$, $m_e = 9.10938356(11) \times 10^{-31}$)

-

8) Nel sistema di riferimento dell'osservatore O, all'istante t_A viene sparato un missile dal punto x_A alla velocità v_M verso il punto x_B. Da questo punto, all'istante $t_B = t_A + \Delta T$ viene sparato un missile alla stessa velocità , ma nel verso opposto. Un altro osservatore O' si muove rispetto a O nel verso positivo dell'asse $\hat{x}$ alla velocità relativa $V > \frac{c^2 \Delta T}{(x_A - x_B)}$, in modo tale che per a $t_O = t_{O'} = 0$ si abbia $0_O = 0_{O'} = 0$. Quale sequenza di eventi viene descritta da O' ?. A quali velocità si muovono i missili secondo O' e a quali istanti di tempo raggiungono i loro obiettivi?

-