Introduzione alla Fisica Moderna - a.a. 2016-17

15/11/2017

Nome Cognome Matricola:

1) Si consideri il sistema dinamico nonlineare

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -y - \sin x - 2R(x+y), \end{aligned}$$

dove la funzione a rampa di saturazione R è definita da

$$R(z) = \begin{cases} z & |z| \leq 1 \\ \mathrm{sign}(z) & |z| > 1 \end{cases} \tag{1}$$

Si dimostri che l'origine egli assi è l'unico punto di equilibrio e che è asintoticamente stabile.

- Ponendo nella prima equazione del sistema $\dot{x} = 0$ si ottiene che $y = 0$. Sostituendo nella seconda e imponendo $\dot{y} = 0$, ci si riduce all'equazione $\sin x + 2R(x) = 0$. Ricorrendo alla definizione (1) si ottengono i due casi : 1) $\sin x + 2x = 0$ per $|x| \leq 1$, 2) $\sin x + 2\mathrm{sign} x = 0$ per $|x| > 1$. Nel caso 1) si ha la soluzione $x = 0$, che è anche unica. Nel caso 2) non si hanno soluzioni. Quindi $(0,0)$ è il solo punto di equilibrio per il sistema.
Per dimostrare che tale punto sia anche asintoticamente stabile per $t \geq 0$ è sufficiente dimostrare che esso è stabile e che esiste un suo intorno B_0, tale che per ogni dato iniziale $(x_0, y_0) \in B_0$ la soluzione converga a $(0,0)$ per $t \to \infty$.
Per far questo studiamo il comportamento del sistema linearizzato attorno a $(0,0)$, che viene dato dallo studio della matrice $A = \begin{pmatrix} \partial_x v_x & \partial_y v_x \\ \partial_x v_y & \partial_y v_y \end{pmatrix}|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$.
Gli autovalori di questa matrice sono $\lambda_\pm = -\frac{1}{2}\left(3 \pm \imath\sqrt{3}\right)$. Quindi entrambe le parti reali sono negative: le soluzioni tendono asintoticamente a $(0,0)$ per $t \to \infty$, che è un fuoco stabile.
Una dimostrazione alternativa si può ottenere trovando una opportuna funzione di Lyapunov.

2) Si consideri il sistema lagrangiano costituito da un punto materiale P di massa m , vincolato a muoversi in un piano verticale (x,y), lungo il profilo di equazione $y = y0\left(1 + (x/x_0)^2\right)$, che ruota intorno all' asse verticale con velocità angolare costante $\omega \in \mathbb{R}^+$, è soggetto alla forza peso.

   (a) Si scriva la lagrangiana del sistema.
   (b) Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
   (c) Si determinino le eventuali posizioni di equilibrio come funzione dei parametri del sistema.

- Le coordinate cartesiane della particella sono espresse nella forma

$$\begin{cases} x &= \quad r(t)\cos(t\omega) \\ z &= \quad r(t)\sin(t\omega) \\ y &= \quad y_0\left[\left(\frac{r(t)}{x_0}\right)^2+1\right] \end{cases} . \tag{2}$$

L'energia cinetica è $T=\frac{1}{2}m\left(r(t)^2\left(\frac{4y_0^2r'(t)^2}{x_0^4}+\omega^2\right)+r'(t)^2\right)$, mentre l'energia potenziale è $U=gmy_0\left(\frac{r(t)^2}{x_0^2}+1\right)$, dalle quali deriva l'espressione della lagrangiana $L=T-U$. Essa dipende dalla sola coordinata generalizzata r e dalla sua velocità r'.
Passando alla equazione di Eulero-Lagrange per r , cioé $\frac{d}{dt}\partial_{r'}L-\partial_r L=0$, si ottiene

$$r''(t)\left(\frac{4y_0^2r(t)^2}{x_0^4}+1\right)+\frac{4y_0^2r(t)r'(t)^2}{x_0^4}+r(t)\left(\frac{2gy_0}{x_0^2}-\omega^2\right)=0. \tag{3}$$

Per trovare la posizione di equilibrio imponiamo che sia la derivata prima di r che la seconda si annullino. Questo impone due soluzioni : 1) $r(t)=0$, 2) $g=\frac{x_0^2}{2\,y_0}\,\omega^2$. Quindi il caso 1) si verifica per ogni valore dei parametri del sistema. D'altra parte se i parametri soddisfano la relazione in 2) , tutti i punti della curva sono di equilibreio.

3) Si scrivano le equazioni del moto per il sistema hamiltoniano definito da

$$H\left(q,p,t\right)=\tfrac{1}{2}\left(p^2+\omega^2q^2\right)+\frac{\alpha}{3}q^3+\frac{\beta}{4}q^4$$

. In corrispondenza della scelta dei parametri $\alpha=2,\beta=1\omega=1$ tracciare le linee di flusso sul piano delle fasi , indicare i punti di equilibrio e la loro stabilià .

- Le equazioni di Hamilton derivanti da H sono

$$\dot{q} \quad = \partial_p H \quad = p, \tag{4}$$
$$\dot{p} \quad = -\partial_q H \quad = -\omega^2 q-\alpha q^2-\beta q^3, \tag{5}$$

I punti di equilibrio sono determinati dalle equazioni $\dot{q}=\dot{p}=0$, che si riducono semplicemente a porre $p=0$ e alle soluzioni dell'equazione cubica $\beta q^3+\alpha q^2+q\omega^2=0$. Quindi $q_0=0$ è sempre una posizione di equilibrio. L'esistenza delle altre due dipende dal segno del determinante dell'equazione ridotta quadratica. Per la scelta di parametri fatta si ottiene che esso sia 0, quindi le radici coincidono e si ha una sola posizione di equilibrio ulteriore in $q_1=-1$.
Per studiare la stabilità dei punti di equilibrio si deve calcolare la matrice hessiana $J_i=\frac{\partial^2 H}{\partial(q,p)}|_{q_i,0}=\begin{pmatrix} 0 & -3\beta q_i^2-2\alpha q_i-\omega^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcolando i suoi autovalori e sostituendo i valori dei parametri adottati si ottiene che essi sono $\{i,-i\}$ per q_0 e $\{0,0\}$ per q_1, rispettivamente. Quindi entrambi sono punto di equilibrio stabile, ma non asintoticamente stabili.
Le linee di flusso sono tracciate in figura.

4) Una particella di massa unitaria è sottoposta all'azione del potenziale unidimensionale

$$V\left(x\right)=\frac{\omega^2}{8a^2}\left(x-a\right)^2\left(x-b\right)^2,$$

con $a,b>0$ e distinti. Determinare le frequenze di oscillazione nel limite delle piccole oscillazioni. Determinare il valore di energia, diciamo E_s, che corrisponde alla separatrice dei moti. Scrivere il periodo di un'orbita generica di energia $E > E_s$. Determinare una espressione approssimata del periodo per $E \to \infty$.

- il potenziale assume una forma simmetrica rispetto alla variabile indipendente se si esegue la traslazione $x = \frac{a+b}{2}$. Quindi nel limite delle piccole oscillazioni in entrambi i punti di equilibrio $y_\pm = \pm\frac{a-b}{2}$ si ha che la pulsazione vale $\Omega = \frac{\omega\,|a-b|}{2|a|}$.
L'energia corrispondente alla traiettroria separatrice tra i moti attorno ai due minimi è pari al velore $E_s = V|_{y=0} = \frac{\omega^2(a-b)^4}{128a^2}$.
Il periodo della generica orbita con energia superiore a E_s è fornito dalla formula integrale $T\,(E) = 2\int_{x_-(E)}^{y_+(E)} \frac{1}{\sqrt{2(E-V(y))}}$, dove $y_\pm\,(E) = \pm\sqrt{\frac{1}{4}(a-b)^2 + \frac{2\sqrt{2E}a}{\omega}}$ sono i punti di inversione del moto. L'integrale non è esprimibile in generale in termini di funzioni elementari. E' possibile dare una espressione di tale periodo per serie, nel limite delle alte energia, il che semplifica il potenziale alla forma quartica pura $V_\infty = \frac{\omega^2}{8a^2}x^4$. In tal limite, la serie per T si somma nell'espressione $T = 4\sqrt{\pi}\,a\frac{\Gamma(5/4)}{\Gamma(3/4)}\left(\frac{2}{\omega^2 E}\right)^{\frac{1}{4}}$, essendo Γ la funzione di Eulero..

5) Un sistema hamiltoniano è costituito da una particella, di massa m, libera nel piano.

(a) Scrivere la corrispondente equazione di Hamilton - Jacobi.

(b) Supporre che esista una soluzione dell'eq. di H-J che sia separabile nella somma di temini, ciascuno dipendente da una sola variabile spazio-temporale. Trovare la corrispondente equazione.

(c) Trovare esplicitamente tale soluzione.

(d) Usare tale funzione generatrice di trasformazioni canoniche per integrare le equazioni del moto corrispondente.

- L'Hamiltoniana del sistema è $H = \frac{1}{2\,m}\left[p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right]$. Cerchiamo la funzione generatrice della forma $S = S\left(P_i, x_i, t\right)$, tale da dar luogo alla trasformazione canonica $Q_i = \partial_{P_i} S$, $p_i = \partial_i S$ con $i = x, y, z$ e tale da annullare l'Hamiltoniana. Quindi la nuova Hamiltoniana è definita dall'equazione di Hamilton - Jacobi $H\left(x_i,\, \partial_{x_i} S\right) + \partial_t S = 0$, che nel caso in esame diventa

$$\frac{1}{2\,m}\left[\left(\partial_x S\right)^2 + \left(\partial_y S\right)^2 + \left(\partial_z S\right)^2\right] + \partial_t S = 0 \tag{6}$$

Una soluzione completamente separabile di questa equazione è della forma $S = X\left(x\right) + Y\left(y\right) + Z\left(z\right) + T\left(t\right)$. Sostituendo questa espressione nell'eq. di H-J si ottiene l'equazione richiesta in b)

$$\frac{1}{2\,m}\left[\left(\partial_x X\right)^2 + \left(\partial_y Y\right)^2 + \left(\partial_z Z\right)^2\right] + \partial_t T = 0. \tag{7}$$

Eseguendo delle ulteriori derivate rispetto alle variabili indipendenti si ottengono le condizioni

$$\partial_x^2 X = \partial_y^2 Y = \partial_z^2 Z = 0,$$

quindi anche

$$\partial_x X = \alpha_x,\ \partial_y Y = \alpha_y,\ \partial_z Z = \alpha_z.$$

Sostituendo nell'eq. (7) si ottiene pure $\partial_t\, T = \frac{-1}{2\,m}\left[\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2\right]$, dove α_i sono costanti arbitrarie.
La soluzione esplicita completamente separata per S è quindi data da

$$S = \alpha_x\, x + \alpha_y\, y + \alpha_z\, z - \frac{1}{2\,m}\left[\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2\right] + S_0,$$

con S_0 costante arbitraria.
Usando la funzione generatrice $S\left(P_i = \alpha_i,\, x_i,\, t\right)$, la corrispondente trasformazione canonica è data da

$$\begin{array}{lll} p_x = \partial_x\, S = \alpha_x, & p_y = \partial_y\, S = \alpha_y, & p_z = \partial_z\, S = \alpha_z, \\ Q_x = \partial_{P_x}\, S = x - \frac{\alpha_x}{2} t, & Q_y = \partial_{P_y}\, S = y - \frac{\alpha_y}{2} t, & Q_z = \partial_{P_z}\, S = z - \dfrac{\alpha_z}{2} t. \end{array}$$

Poiché le $Q_i = \beta_i$ sono costanti, dovendo soddisfare le equazioni del moto $\dot{Q}_i = 0$, allora la soluzione del moto nelle coordinate originarie si esprime come

$$i = \beta_i + \frac{\alpha_i}{2} t, \quad i = x, y, z. \tag{8}$$

6) Sapendo che l'effetto fotoelettrico sul sodio si interrompe per valori della frequenza inferiori a $\nu_0 = 5.6 \times 10^{14}\ Hz$, dire se un fotone di energia $E_f = 5.5\ eV$ può provocare l'emissione di elettroni dal sodio e con quale energia massima.

- L'energia del fotone corrispondente alla frequenza di soglia è $E_0 = h\,\nu_0 = 6.63 \times 10^{-34}$joules sec $\times\ 5.6 \times 10^{14}$ $\mathrm{sec}_{-1} = 37.1 \times 10^{-20}$joules = 2.32 eV. Poiché $E_f > E_0$, il fotone di tale energia può provocare fotoemissione nel sodio.

7) Un fotone di frequenza $\omega = 3 \times 10^{22}\ sec^{-1}$ viene deflesso a 30^o da un elettrone libero fermo. Calcolare l'energia del fotone diffuso ed il momento finale dell'elettrone. $\hbar = 1.054571800 \times 10^{-34}\ j\ sec$, $c = 299792458\ m/sec$, $m_e = 9.10938356 \times 10^{-31}$

- Ricorrendo alla formula di Compton $\Delta\lambda = \lambda_C\,(1-\cos\theta)$, essendo θ l'angolo di deflessione, che nel caso in esame vale $30^o = \frac{\pi}{6}$, e con $\lambda_C = \frac{h}{m_e\,c} = 2.42631 \times 10^{-12}$ m la lunghezza Compton per l'elettrone. Quindi $\Delta\lambda = 0.32506 \times 10^{-12}$ m .
l'energia del fotone deflesso è data quindi da $E_f = \frac{h\,c\,\omega}{2\,\pi\,c+\Delta\lambda\,\omega} = 5.1277 \times 10^{-13}$ joules $=$ $3.20482\ MeV$.

8) Ricordando che la Lagrangiana per la particella libera relativistica è data da $L_0 = -m\ c^2\ \sqrt{1-\beta^2}$, scrivere la Lagrangiana per un oscillatore armonico relativistico monodimensionale, derivare il momento coniugato e , effettuando una trasformazione di Legendre, calcolare l'Hamiltoniana. Stabilire se questa quantità si conserva e qual è in suo significato fisico.

- La lagrangiana del sistema è

$$L = -m\ c^2\sqrt{1-\frac{q'(t)^2}{c^2}} - \frac{1}{2}kq(t)^2. \tag{9}$$

Il momento coniugato alla coordinata generalizzata q è

$$p(t) = \partial_{q'}L = \frac{m\ q'(t)}{\sqrt{1-\frac{q'(t)^2}{c^2}}}. \tag{10}$$

La trasformazione di Legendre porta all'Hamiltoniana

$$H = c\sqrt{c^2m^2+p(t)^2} + \frac{1}{2}kq(t)^2 \tag{11}$$

L'Hamiltoniana è conservata, in quanto non dipende dal tempo e la sua parentesi di Poisson con se stessa è nulla. Essa è la somma dell'energia totale della particella libera con l'energia potenziale elastica. Bisogna concludere che esa rappresenta l'energia totale del sistema.