Introduzione alla Fisica Moderna - a.a. 2016-17

27/06/2017

Nome Cognome Matricola:

1) Usando una appropriata funzione di Lyapunov, stabilire la stabilità del punto di equilibrio del seguente sistema

$$\begin{cases} \dot{x} & = y + \alpha x \left(x^2 + y^2\right) \\ \dot{y} & = -x + \alpha y \left(x^2 + y^2\right) \end{cases} , \tag{1}$$

trovando le opportune condizioni per il parametro reale α, affinché il punto sia asintoticamente stabile.

-

2) Un sistema meccanico è costituito complessivamente da 2 punti materiali di uguale massa m. Uno di tali punti è vincolato a muoversi su una parabola liscia di equazione $z = -\frac{x^2}{\ell}$ $(\ell > 0)$, rotante attorno all'asse $\hat{z}$ verticale con velocità angolare costante ω. L'altro può invece muoversi sull'asse orizzontale, solidale con la parabola rotante. Trascurando la gravità , i due punti interagiscono tra di loro con una forza di richiamo elastica, che agisce lungo la congiungente, con costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Scrivere la Lagrangiana del sistema. Trovare le configurazioni di equilibrio.

-

3) Si scrivano in forma compatta le equazioni del moto del seguente sistema hamiltoniano a 3 gradi di libertà

$$H = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} p_i^2 + \sum_{i=1}^{2} \exp\left(q_i - q_{i+1}\right).$$

Inoltre si consideri la matrice

$$L = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 \\ a_1 & b_2 & a_2 \\ 0 & a_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

con $a_i = \frac{1}{2}\exp\frac{1}{2}\left(q_i - q_{i+1}\right)$ e $-\frac{1}{2}p_i$. Si calcoli $I_k = \mathrm{tr}\left(L^k\right),\ k = 1, 3$ e si dimostri che sono integrali del moto del sistema

4) Una particella è sottoposta all'azione del potenziale unidimensionale

$$V(x) = \frac{\omega^2}{8a^2}\left(x-a\right)^2\left(x+a\right)^2.$$

Tracciare il grafico delle fasi. Determinare le frequenze di oscillazione nel limite delle piccole oscillazioni. Determinare, anche solo in via approssimata per grandi energie, il periodo delle oscillazioni dei moti generici, lontano dalla zona del massimo locale.

5) Si consideri il sistema hamiltoniano a 2 gradi di libertà

$$H = \tfrac{1}{2}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \tfrac{1}{2}\left(Ax^2 + By^2\right) + x^2 y - \frac{C}{3}y^3.$$

Si completi canonicamente la trasformazione $X = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \quad X = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$ e si trovino la condizioni sui parametri A, B e C affinché il sistemi si separi in due ottosistemi indipendenti.

-

6) Sapendo che un corpo nero emette al picco $\lambda = 10\ \mu m$ un flusso di potenza $w_{max} = 1.0\ watt m^{-2}$. Calcolare il flusso di fotoni a $\lambda_1 = 1\ \mu m$.

-

7) Calcolare l'energia di un fotone deflesso a 30^o da un elettrone libero fermo, sul quale ha inciso un fotone di frequenza $\omega = 3 \times 10^{21}\ sec^{-1}$. ($\hbar = 1.054571800(13) \times 10^{-34}\ j\ sec$, $c = 299792458\ m/sec$, $m_e = 9.10938356(11) \times 10^{-31}$)

-

8) Nel sistema di riferimento dell'osservatore O, all'istante t_A viene sparato un missile dal punto x_A alla velocità v_M verso B nel punto x_B. Da questo punto, all'istante $t_B = t_A + \Delta T$ viene sparato un missile alla stessa velocità , ma verso A. Un altro osservatore O' si muove rispetto a O nel verso positivo dell'asse $\hat{x}$ alla velocità relativa $V > \frac{c^2 \Delta T}{(x_A - x_B)}$, in modo tale che per a $t_O = t_{O'} = 0$ si abbia $0_O = 0_{O'} = 0$. Quale sequenza di eventi viene descritta da O' ?. A quali velocità si muovono i missili secondo O' e a quali istanti di tempo raggiungono i loro obiettivi? Rappresentare quanto ottenuto nel piano dello spazio-tempo.

-