Introduzione alla Fisica Moderna - a.a. 2017-18

11/06/2018

Nome Cognome Matricola:

1) Della radiazione visibile di lunghezza d'onda $\lambda = 500\ nm$ incide su degli elettroni liberi che viaggiano in senso contrario al fascio con velocità $v = 0.99\ c$. Calcolare la lunghezza d'onda della radiazione vista dagli elettroni.

- Effetto Doppler relativistico: $\lambda_O = \lambda_S \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$ dove λ_S è nel sistema di riferimento della sorgente, λ_O è nel sistema di riferimento dell'osservatore (il fascio di elettroni) e $\beta = \frac{v}{c}$ è la velocità relativa con segno, che nel nostro caso è -. Perciò

$$\lambda_{el} = 500\sqrt{\frac{0.01}{1.99}}\, nm = 354\, nm, \qquad \nu_{el} = 8.46 \times 10^{15}\, Hz$$

2) Calcolare l'energia di legame di un nucleo di elio ^4He, sapendo che la sua massa è $M_{He} = 3727\, MeV$, mentre la massa dei suoi componenti (2 protoni e 2 neutroni) sono $m_p = 938.3\, MeV$ e $m_n = 939.6\, MeV$, rispettivamente.

-

$$\Delta M = (2m_p + 2m_n - M_{He}) = 5.1234 \times 10^{-29}\, kg \to \Delta M = 28.7\, MeV$$

3) Si scrivano le equazioni del moto relativistiche per una particella di massa m e carica elettrica q in un campo magnetico uniforme $\vec{B} = B\,\hat{z}$. Supponendo che la particella abbia velocità iniziale $\vec{v} = v_0\,\hat{x}$, si calcoli la frequenza di ciclotrone e la si confronti con il corrispondente risultato classico.

-

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f}, \quad \vec{p} = m\gamma\vec{v}, \quad \vec{f} = q\,\vec{v} \times \vec{B},$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\gamma\left(\vec{a} + \frac{\gamma^2}{c^2}\vec{v}\cdot\vec{a}\,\vec{v}\right), \qquad \vec{v}\cdot\vec{a} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{f}}{m\,\gamma^3} = \frac{q}{m\,\gamma^3}\vec{v}\cdot\vec{v}\times\vec{B} = 0$$

$$m\gamma\vec{a} = q\vec{v}\times\vec{B}, \quad m\gamma\vec{v}\cdot\vec{a} = \frac{m\gamma}{2}\frac{d}{dt}v^2 = 0 \Rightarrow v = v_0 = cost. \Rightarrow \gamma = \gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}$$

$$\vec{v} = v_0\hat{\phi} \quad \hat{\phi}\times\hat{z} = \hat{\theta}, \quad \hat{\phi} = \cos\omega t\;\hat{x} + \sin\omega t\;\hat{y}$$

$$\omega = \frac{qB}{m\gamma_0} = \omega_{Cl}\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{v_0^2}{c^2} + O\left(\frac{v_0^4}{c^4}\right)\right),$$

4) Si consideri il sistema dinamico nonlineare

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \left(r - x^2\right) y - x, \end{aligned}$$

dove $r > 0$.

Si traccino le linee di flusso del campo vettoriale per un generico r.

Si determinino i punti di equilibrio e la loro stabilità lineare.

Si applichi il teorema di Lyapunov per stabilire il carattere globale della stabilità .

Supponendo che $r << 1$, si dimostri che esistono delle soluzioni approssimate della forma $x \approx X_0 \cos t$, trascurando le armoniche di ordine superiore, per un valore particolare X_0.

-

$$(\dot{x}, \dot{y}) = (0,0) \Rightarrow (x_{eq} = 0, y_{eq} = 0)$$

$$\frac{\partial(\dot{x},\dot{y})}{\partial(x,y)}|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & r \end{pmatrix}, \Rightarrow \lambda_\pm = \frac{1}{2}\left(r \pm \sqrt{r^2-4}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 0 < r < 2 & \text{nodo} \\ r \geq 2 & \text{sella} \end{array} \right. \text{instabile}$$

$$f_{Ly} = \tfrac{1}{2}\left(x^2+y^2\right), \quad L_{(\dot{x},\dot{y})} f_{Ly} = \left(r - x^2\right) y^2 = \left\{ \begin{array}{lll} < 0 & x^2 > r & \text{stabile} \\ > 0 & x^2 < r & \text{instabile} \end{array} \right. \Rightarrow \text{ciclo limite}$$

$$x = X_0 \cos t \Rightarrow \dot{x} = y = -X_0 \sin t \Rightarrow \dot{y} = -X_0 \cos t = -X_0 \sin(t)\left(r - X_0^2\cos^2(t)\right) - X_0\cos(t)$$

$$\left(r X_0 - \frac{X_0^3}{4}\right)\sin(t) - \frac{1}{4}X_0^3\sin(3t) = 0 \Rightarrow X_0 \approx 2\, r^{\frac{1}{2}}$$

5) Si consideri il sistema lagrangiano costituito da un punto materiale P di massa m, vincolato a muoversi su una superficie toroidale liscia descritta dalle equazioni parametriche

$$x = (R + r\cos\theta)\cos\phi, \qquad y = (R + r\cos\theta)\sin\phi, \qquad z = r\sin\theta,$$

con $0 < r < R$ i raggi del toro e $(\theta, \phi) \in [0, 2\pi]^2$. Il sistema non è soggetto a forze esterne.

(a) Si scriva la lagrangiana del sistema.

(b) Si determini la conservazione del momento coniugato a ϕ.

(c) Si riduca la lagrangiana rispetto a tale momento.

(d) Si scrivano le equazioni di Eulero - Lagrange per il sistema ridotto e si trovi la configurazione di equilibrio.

-

$$L = T = \frac{1}{2} m \left(\phi'(t)^2 (r\cos(\theta(t)) + R)^2 + r^2\theta'(t)^2\right)$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \phi'(t)} = m\,\phi'(t)(r\cos(\theta(t)) + R)^2, \qquad \phi'(t) = \frac{p_\phi}{m(r\cos(\theta(t)) + R)^2}$$

$$\text{Teor. Routh } \Rightarrow L_r = \frac{1}{2} m r^2 \theta'(t)^2 - \frac{p_\phi^2}{2m(r\cos(\theta(t)) + R)^2}$$

$$m\, r^2 \theta''(t) + \frac{r\, p_\phi^2 \sin(\theta(t))}{m(r\cos(\theta(t)) + R)^3} = 0$$

$$\theta''(t) = 0 \Rightarrow \theta(t) = 0\,(\text{stabile }), \pi\,(\text{instabile })$$

$$\text{analisi di stabilità } \lambda_{\theta=0} = \pm\,\imath\,\frac{p_\phi}{m\sqrt{r}(r+R)^{3/2}}, \quad \lambda_{\theta=\pi} = \pm\frac{p_\phi}{m\sqrt{r}(R-r)^{3/2}}$$

6) Ricordando che la Lagrangiana per la particella libera relativistica è data da $L_0 = -m\,c^2\,\sqrt{1-\beta^2}$, scrivere la Lagrangiana per una carica q in un campo magnetico uniforme linearmente dipendente dal tempo. Derivare il momento coniugato e, effettuando una trasformazione di Legendre, calcolare l'Hamiltoniana. Stabilire se questa quantità si conserva.

-

$$\vec{B} = b_0\,t\,\hat{z}, \quad \vec{A} = -b_0\,t\,y\,\hat{x}$$

(gauge di Coulomb asimmetrica)

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{q}{c}\vec{A}\,(\vec{r},t)\cdot\vec{v}, P_i = \frac{\partial\,L}{\partial\,v_i} = m\,\gamma\,v_i + \frac{q}{c}A_i\,(\vec{r},t) = p_i + \frac{q}{c}A_i\,(\vec{r},t) \quad i = 1,2,3$$

$$m\,\gamma\,\vec{v} = \left(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}\right) \Rightarrow m^2\,\gamma^2\,v^2 = \left(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2$$

$$H = \vec{v}\cdot\vec{P} - L = \vec{v}\cdot\left(m\,\gamma\,\vec{v} + \frac{q}{c}\vec{A}\right) + mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{q}{c}\vec{A} = m\,c^2\,\gamma = c\sqrt{m^2\,c^2 + \left(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2}$$

Poiché H dipende esplicitamente dal tempo non è conservata

7) Una particella di massa unitaria è sottoposta all'azione del potenziale unidimensionale

$$V\,(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 4x.$$

Determinare le frequenze di oscillazione nel limite delle piccole oscillazioni. Determinare il valore di energia, diciamo E_s, che corrisponde alla separatrice dei moti. Calcolare il moto approssimato in un intorno del punto di equilibrio instabile.

-

$$V' = x^3 + x^2 - 4x - 4 \Rightarrow x_{min} = \pm 2, x_{max} = -1$$

$$x = y \mp 2 \Rightarrow V \to V_d = \frac{y^4}{4} + \frac{7y^3}{3} + 6y^2 - \frac{28}{3}, \quad V_s = \frac{y^4}{4} - \frac{5y^3}{3} + 2y^2 + \frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$\omega_d = 2, \qquad \omega_s = 2\sqrt{3},$$

$$E_s = V\,(x_{max} = -1) = \frac{23}{12}, \qquad x\,(t) \approx -1 + a_\pm\,e^{\pm\sqrt{3}t}$$

8) Sapendo che la frequenza di soglia dell'effetto fotoelettrico sul sodio è $\nu_0 = 5.6\times 10^{14}\;Hz$, dire quanto vale l'energia cinetica massima di un fotoelettrone estratto da un fotone di energia $E_f = 7.5\;eV$. Valutare se è sufficiente utilizzare le espressioni meccaniche classiche o quelle relativistiche.

-

$$\Delta V = \frac{h}{e}\,(\nu - \nu_0) = 5.18\,V \Rightarrow T_{max} = 8.30\times 10^{-19}\,J$$

$$v = \sqrt{2e\Delta V/m_e} = 0.6\times 10^6\,m/sec, \qquad \frac{v}{c} = 2\times 10^{-3} << 1$$

1 Costanti e fattori di conversione

- Velocità della luce nel vuoto: $c = 299792458\, m/sec$
- Costante di Planck: $h = 6.63 \times 10^{-34}\, joule\, sec$
- $1\ eV = 1.60218 \times 10^{-19}\ joule$
- Costante di Wien: $b = 2.898 \times 10^{-3}\ m\ {}^oK$
- Costante di Stefan-Boltzmann : $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}\ \frac{W}{m^2\ {}^oK^4}$
- Costante di Boltzmann $k_B = 1.28 \times 10^{-23}\ \frac{joule}{{}^oK}$
- Numero di Avogadro : $N_A = 6,022 \times 10^{23}$
- Massa del protone : $m_p = 1.6726219 \times 10^{-27}\ kg$
- Massa dell'elettrone : $m_e = 9.10938 \times 10^{-31}\ kg$
- Massa del neutrone : $m_n = 939.6\, MeV$
- Lunghezza d'onda Compton per l'elettrone : $2.426 \times 10^{-12}\, m$