Introduzione alla Fisica Moderna - a.a. 2015-16

18/3/2016

1) Si consideri il sistema di equazioni del primo ordine

$$\dot{x} = y, \dot{y} = -\eta^2\, y - a\, x + bx^3, \quad 0 < b < a \tag{1}$$

determinando i punti di equilibrio, il loro carattere e si traccino le traiettorie attorno a detti punti nel piano delle fasi

- Ponendo $\dot{x} = \dot{y} = 0$, si ottengono i punti di equilibrio, che sono $P_0 = (0,0)$ e $P_\pm = \left(\pm\sqrt{\frac{a}{b}}, 0\right)$. Per linearizzare il sistema attorno ai punti di equilibrio, si deve calcolare la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a + 3bx^2 & -\eta^2 \end{pmatrix}$ nei punti P_0 e $P_\pm$, ottenendo $A|_{P_0} \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & -\eta^2 \end{pmatrix}$ e $A|_{P_\pm} \begin{pmatrix} 0 & a \\ 2a & -\eta^2 \end{pmatrix}$, rispettivamente. I rispettivi autovalori sono $\sigma\left(P_0\right) = \left\{-\frac{\eta^2}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{a^2}{\eta^4}}\right)\right\}$ e $\sigma\left(P_\pm\right) = \left\{-\frac{\eta^2}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 + 8\frac{a^2}{\eta^4}}\right)\right\}$. Nel caso di P_0 gli autovalori sono sempre a parte reale negativa (essi sono complessi coniugati se $4\frac{a^2}{\eta^4} > 1$) quindi tale punto è un fuoco con traiettorie convergenti, quindi un punto di equilibrio stabile. Nel caso di $P_\pm$ si ha che il radicando nell'espressione degli autovalori è sempre positivo e > 1, quindi si hanno sempre due autovalori di segno opposto. Quindi i punti $P_\pm$ sono dei punti sella, ovvero punti di equilibrio instabile.

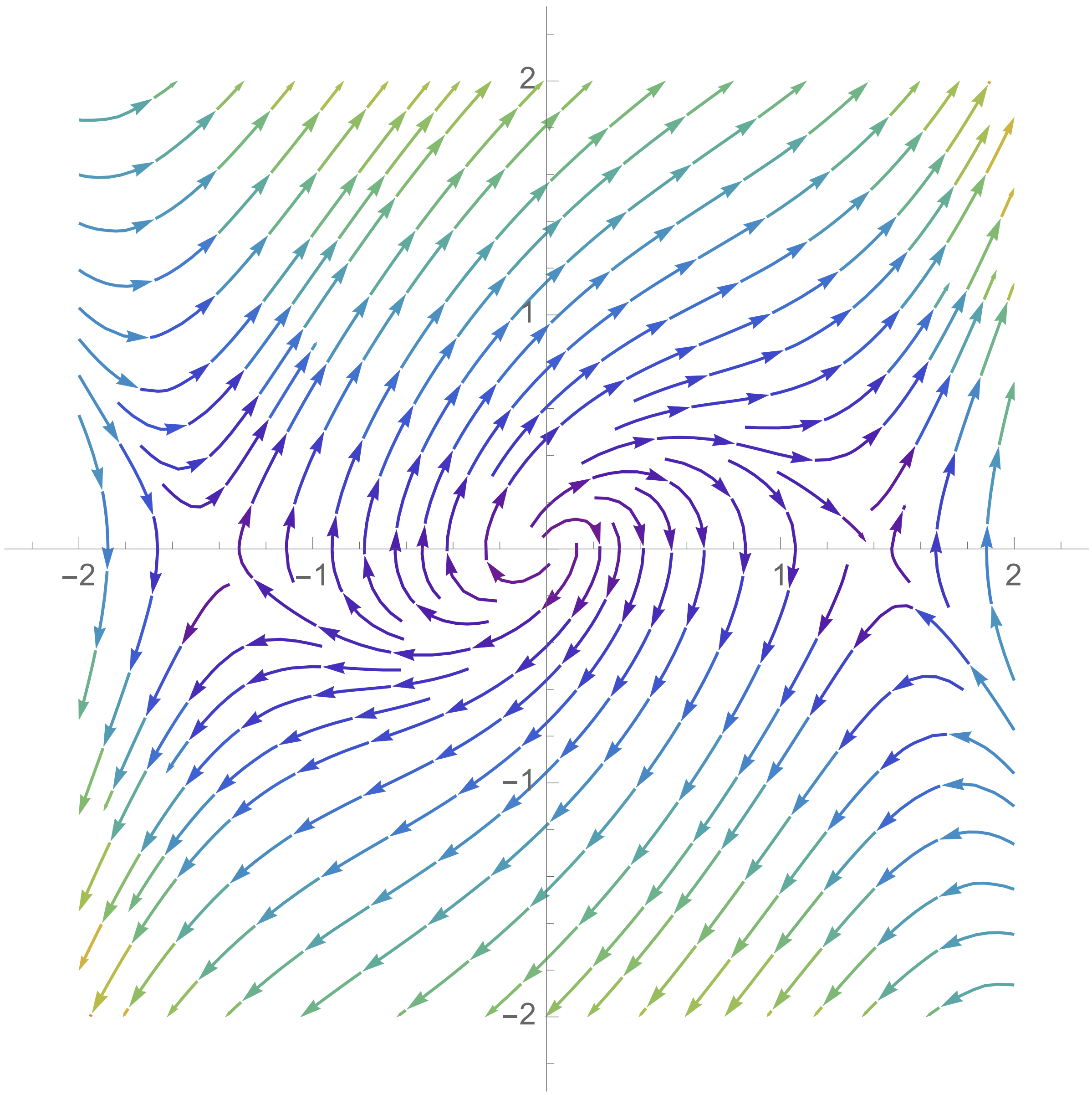

Figure 1: Ritrato di fase per il sistema (1), per una particolare scelta dei paramentri.