Introduzione alla Fisica Moderna - a.a. 2016-17

18/12/2017

Nome Cognome Matricola:

1) Si consideri il sistema dinamico nonlineare

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - x^2, \\ \dot{y} &= -x + y^2, \end{aligned}$$

Si determinino i punti di equilibrio, si caratterizzi la loro stabilità e si traccino le linee di flusso. Dire se il sistema sia hamiltoniano.

- Ponendo a 0 le componenti del campo vettoriale si ottiene un sistema algebrico di IV grado, le cui soluzioni sono

$$\left\{ (0,0)\,,(1,1)\,,\left(\exp\left(\pm\imath\frac{2\pi}{3}\right),\,\exp\left(\mp\imath\frac{2\pi}{3}\right)\right)\right\}. \tag{1}$$

chiaramente solo i primi due punti sono di equilibrio, in quanto gli altri hanno componenti complesse.
Per studiarne la stabilità si calcola in primo luogo la matrice differenziale della trasformazione, cioé

$$A = \frac{\partial\,(\dot{x},\,\dot{y})}{\partial\,(x,\,y)} = \begin{pmatrix} -2x & 1 \\ -1 & 2y \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad A|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A|_{(1,1)} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Gli autovalori corrispondenti ad $A|_{(0,0)}$ sono $\pm\imath$, mentre quelli di $A|_{(1,1)}$ sono $\pm\sqrt{3}$.
Quindi $(0,0)$ è un punto di equilibrio stabile, ma non asintoticamente stabile ed è un centro.
Invece il punto $(1,1)$ è un punto sella e quindi è di equilibrio instabile.
Calcolando la Traccia di A si ottiene la divergenza del campo vettoriale: $Tr\,(A) = \mathrm{div}\,(\dot{x},\,\dot{y}) = -2\,(x-y) \neq 0$. Quindi il sistema non è hamiltoniano.
Le linee di flusso del campo vettoriale sono riportate in figura 1.

2) Si scriva la Lagrangiana di un sistema costituito da due particelle aventi la stessa massa e la stessa carica elettrica, soggettta a muoversi su una sfera di raggio fissato R e interagenti solo attraverso la forza coulombiana. Si dimostri che la quantità

$$l = mR^2\left(\phi_1'\,\sin^2(\theta_1\,) + \phi_2'(t)\sin^2(\theta_2\,)\right),$$

dove si sono usate coordinate polari, è conservata. Se ne dia una interpretazione fisica.

- Le coordinate cartesiane di due particelle su una sfera di raggio R si possono determinare dalle relazioni

$$\begin{aligned} x_i &= R\sin(\theta_i)\cos(\phi_i), && (3)\\ y_i &= R\sin(\theta_i)\sin(\phi_i), && (4)\\ z_i &= R\cos(\theta_i). \qquad i=1,\,2 && (5)\end{aligned}$$

Quindi possiamo assumere come coordinate lagrangiane θ_i, ϕ_i per $i = 1, 2$.
L'energia cinetica del sistema è data da

$$T = \frac{1}{2} mR^2 \left(\sin^2(\theta_1)\,\phi_1'^{\,2} + \sin^2(\theta_2)\,\phi_2'^{\,2} + \theta_1'^{\,2} + \theta_2'^{\,2}\right) \tag{6}$$

La forza tra le particelle è conservativa, essendo la forza di Coulomb. Quindi ammette energia potenziale della forma

$$U = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\frac{q^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\frac{q^2}{\sqrt{2}R\;\rho}. \tag{7}$$

$\rho = \sqrt{1 - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\cos(\phi_1 - \phi_2) - \cos(\theta_1)\cos(\theta_2)}$. Possiamo quindi scrivere la lagrangiana come $L = T - U$.
Per dimostrare che l sia una quantità conservata bisogna derivarla rispetto a t ed usare le equazioni del moto derivanti dalla Lagrangiana precedente. Dal calcolo si ottiene che

$$\frac{d\,l}{d\,t} = mR^2\left(\theta_1'\,\sin(2\theta_1)\,\phi_1' + \theta_2'\,\sin(2\theta_2)\,\phi_2' + \sin^2(\theta_1)\,\phi_1'' + \sin^2(\theta_2)\,\phi_2''\right), \tag{8}$$

quindi bisogna sicuramente sostituire ϕ_i'', che si ricavano dalle equazioni di EL $\frac{d}{dt}\left(\partial_{\phi_i'} L\right) - \partial_{\phi_i} L = 0$ Queste equazioni portano alle relazioni

$$\phi_i'' = \epsilon^{i\,j}\frac{q^2}{8\sqrt{2}\pi m R^3 \epsilon_0\;\rho^3}\sin(\theta_j)\csc(\theta_i)\sin(\phi_1 - \phi_2) \;-\; 2\theta_i'\,\cot(\theta_i)\,\phi_i', \tag{9}$$

dove $\epsilon^{1\,2} = -\epsilon^{2\,1} = 1$. Sostituendo queste espressioni nella (8) si vede facilmente che i vari termini si compensano e la derita temporale di l si annulla.
Poicé l non è altro che la somma delle componenti del momento angolare delle due particelle rispetto all'asse polare, esso rappresenta la corrispondente corrispondente del momento angolare totale del sistema. Infine, siccome la scelta degli assi è arbitraria, lo stesso ragionamento vale in qualunque direzione, quindi possiamo affermare che il momento angolare totale si conserva e il moto si svolge su un piano ad esso perpendicolare.

3) Una particella di massa m e carica elettrica q è soggetta al potenziale scalare $U = k/2(x^2 + y^2) + h/2z^2$, con $k,\, h > 0$, e al potenziale vettore $\vec{A} = \frac{B}{2}(-y,\, x,\, 0)$. Scrivere l'Hamiltoniana e le corrispondenti equazioni di Hamilton. Dare l'espressione dei momenti coniugati e dei momenti cinetici. Esistono ulteriori integrali del moto oltre all'energia meccanica?

- L'Hamiltoniana di una particella carica in presenza di un campo elettromagnetico esterno è data $H = \frac{1}{2\,m}\left(\vec{p} - q\,\vec{A}\right)^2 + U$, che nel caso in esame si esplicita

$$H = \frac{\left(p_2 - \frac{1}{2}\,q\,B\,x\,\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\,q\,B\,y\, + p_1\,\right)^2 + {p_3}^2}{2m} + \frac{1}{2}hz^2 + \frac{1}{2}k\left(x^2 + y^2\right). \qquad (10)$$

Le corrispondenti equazioni di Hamilton sono

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & \frac{1}{2\,m}\left(\,q\,B\,y + 2p_1\right), \\ \dot{y} & = & \frac{1}{2\,m}\left(2\,p_2 - \,q\,B\,x\right), \\ \dot{z} & = & \frac{p_3}{m}, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} \dot{p_1} & = & \frac{q\,B}{2m}\left(p_2\, - \frac{1}{2}\,q\,B\,x\,\right) - kx\,, \\ \dot{p_2} & = & -\frac{q\,B}{2m}\left(\frac{1}{2}\,q\,B\,y\, + p_1\,\right) - ky\,, \\ \dot{p_3} & = & -hz\,. \end{array}\right. \qquad (11)$$

I momenti coniugati sono ovviamente p_i con $i = 1, 2, 3$. Mentre i momenti cinetici sono

$$\left\{\begin{array}{rcl} \pi_1 & = & \frac{1}{2}B\,q\,y + p_1, \\ \pi_2 & = & p_2 - \frac{1}{2}B\,q\,x, \\ \pi_3 & = & p_3. \end{array}\right. \qquad (12)$$

Una grandezza conservata diversa dall'energia si ottiene osservando che il sistema è simmetrico per rotazioni attorno all'asse z. E in effetti si può dimostrare che per la quantità $l_z = x\,p_2 - y\,p_1$ vale la condizione di conservatività $\{l_z,\, H) = 0$.

4) Un sistema meccanico è descritto da una Hamiltoniana per una singola particella nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$. Dimostrare che, indicato con $\vec{L}$ il momento angolare e con $\vec{n}$ un versore orientato arbitrariamente, la funzione $F = c\,\vec{L}\cdot\vec{n}$ è generatrice di trasformazioni canoniche, per ogni valore della costante c. Dare una interpretazione di tali trasformazioni.

- Una funzione come la F può essere utilizzata per generare una famiglia continua di trasformazioni canoniche. Infatti, non comparendo esplicitamente il tempo, la quasi equivalenza tra lagrangiane nelle vecchie e nuove coordinate è della forma $p_i^0\,\dot{q^0}_i - p_i^c\,\dot{q^c}_i = \frac{dG}{dt}$. Per $|\,c\,| << 1$ una generica trasformazione infinitesima è della forma $q_i^c = q_i^0 + c\,\delta q_i,\ p_i^c = p_i^0 + c\,\delta p_i$. Sostituendo queste espressioni nella precedente condizione di canoncità e ricordando che $\frac{dG}{dt} = \partial_{q_i^0} G\dot{q^0}_i + \partial_{p_i^0} G\dot{p^0}_i$, si raccolgono e si annullano i coefficienti di $\dot{q^0}_i$ e $\dot{p^0}_i$. Si ottengono così le condizioni per G

$$\delta p_i + p_i \frac{\partial\,\delta q_i}{\partial\,q_j} + \frac{1}{c}\,\frac{\partial\,G}{\partial\,q_j} = 0, \qquad p_i \frac{\partial\,\delta q_i}{\partial\,\partial_k} + \frac{1}{c}\,\frac{\partial\,G}{\partial\,p_k} = 0. \tag{13}$$

Eseguendo le opportune derivate incrociate, dalla supposta differenziabiltà di G si ricava un sistema di equazioni della forma

$$\frac{\partial\,\delta p_j}{\partial\,p_k} + \frac{\partial\,\delta q_k}{\partial\,q_j} = 0. \tag{14}$$

Soluzione di questo sistema è certamente data in termini di una arbitraria funzione differenziabile $F = F\,(q_i,\,p_i)$ ponendo

$$\delta q_i = \frac{\partial\,F}{\partial\,p_i}, \qquad \delta p_i = -\frac{\partial\,F}{\partial\,q_i}, \tag{15}$$

Applicando questa formula al caso proposto si ottiene

$$\delta\vec{r} = c\,\vec{n}\times\vec{r}, \qquad \delta\vec{p} = c\,\vec{n}\times\vec{p}. \tag{16}$$

Da queste relazioni la trasformazione associata ad F è la rotazione di un angolo infinitesimo c attorno all'asse $\vec{n}$.

5) Una sorgente puntiforme monocromatica emette la potenza $P_o = 1W$ alla lunghezza d'onda $\lambda = 589\ nm$. Quanto vale il flusso di fotoni alla distanza $\ell = 1.00\,m$ dalla sorgente?

-

$$\Phi_f = \frac{P_0}{4\pi\,\ell^2}\frac{\lambda}{h\,c}\,m^{-2}sec^{-1} = 2,36\times 10^{17}\,m^{-2}sec^{-1} \tag{17}$$

6) Un fotone γ di lunghezza d'onda $\lambda = 1.3\times 10^{-5}\ nm$ genera una coppia elettrone- positrone. Trovare l'energia cinetica e la quantità di moto delle particelle prodotte.

- Per semplità supponiamo che nel decadimento l'energia si distribuisca in parti uguali e che le particelle viaggino nella stessa direzione. Allora l'energia trasferita alle particelle sotto forma di energia cinetica totale è $E_c = h\,\nu - 2m_e\,c^2 = h\frac{c}{\lambda} - 2m_ec^2 = 1.5\times 10^{-11}J$. Poiché l'energia cinetica totale è $E_c = 2m_ec^2\,(\gamma-1)$, ricaviamo $\gamma = 1 + \frac{E_c}{2m_ec^2} = 93$ e $\beta = 0.99......$ Il momento delle particelle è quindi $p = m_ec\beta\gamma$.
Si osservi che il quadriimpulso non si conserva, quindi il processo così come descritto sopra non può in effetti aver luogo. Quindi è necessaria la presenza di un corpo esterno (un nucleo pesante o un atomo), che compensi il momento di rinculo.

7) Un corpo nero ha il suo picco a $\nu = 2.00\times 10^{14}\ Hz$. Sapendo che la sua superficie vale $A = 3.00\ cm^2$, calcolare la sua temperatura e la potenza massima emessa.

- Dalla legge di Wien

$$T = \frac{b}{\lambda} = \frac{b\,\nu}{c} = 1932\,^0K \tag{18}$$

dove $b = 2.898 \times 10^{-3}\, m\,^0K$,
Dalla legge di Stefan-Boltzmann

$$P = \sigma A\, T^4 = 247\, W \tag{19}$$

dove $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\, W\, m^{-2}\,^0K^{-4}$.

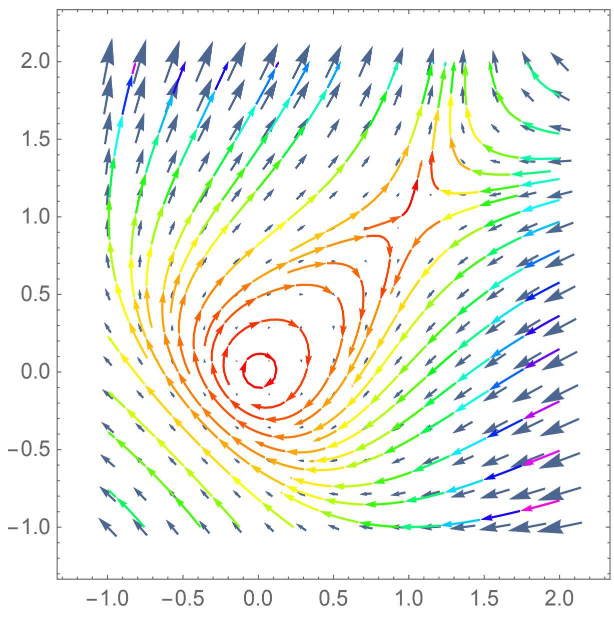

Figure 1: Linee di flusso per il campo vettoriale dell'esercizio 1).