Introduzione alla Fisica Moderna - a.a. 2016-17

26/09/2017

Nome Cognome Matricola:

1) Si consideri il sistema dinamico nonlineare

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -y - \sin x - 2R(x+y), \end{aligned}$$

dove la funzione a rampa di saturazione R è definita da

$$R(z) = \begin{cases} z & |z| \leq 1 \\ \text{sign}(z) & |z| > 1 \end{cases} \tag{1}$$

Si dimostri che l'origine egli assi è l'unico punto di equilibrio e che è asintoticamente stabile.

- Ponendo nella prima equazione del sistema $\dot{x} = 0$ si ottiene che $y = 0$. Sostituendo nella seconda e imponendo $\dot{y} = 0$, ci si riduce all'equazione $\sin x + 2R(x) = 0$. Ricorrendo alla definizione (1) si ottengono i due casi : 1) $\sin x + 2x = 0$ per $|x| \leq 1$, 2) $\sin x + 2\text{sign}x = 0$ per $|x| > 1$. Nel caso 1) si ha la soluzione $x = 0$, che è anche unica. Nel caso 2) non si hanno soluzioni. Quindi $(0,0)$ è il solo punto di equilibrio per il sistema.
Per dimostrare che tale punto sia anche asintoticamente stabile per $t \geq 0$ è sufficiente dimostrare che esso è stabile e che esiste un suo intorno B_0, tale che per ogni dato iniziale $(x_0, y_0) \in B_0$ la soluzione converga a $(0,0)$ per $t \to \infty$.
Per far questo studiamo il comportamento del sistema linearizzato attorno a $(0,0)$, che viene dato dallo studio della matrice $A = \begin{pmatrix} \partial_x v_x & \partial_y v_x \\ \partial_x v_y & \partial_y v_y \end{pmatrix}|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$.
Gli autovalori di questa matrice sono $\lambda_{\pm} = -\frac{1}{2}\left(3 \pm \imath\sqrt{3}\right)$. Quindi entrambe le parti reali sono negative: le soluzioni tendono asintoticamente a $(0,0)$ per $t \to \infty$, che è un fuoco stabile.
Una dimostrazione alternativa si può ottenere trovando una opportuna funzione di Lyapunov.

2) Si consideri il sistema lagrangiano costituito da un punto materiale P di massa m , vincolato a muoversi in un piano verticale (x,y), lungo il profilo di equazione $y = y0\left(1 + (x/x_0)^2\right)$, che ruota intorno all' asse verticale con velocità angolare costante $\omega \in \mathbb{R}^+$, è soggetto alla forza peso.

   (a) Si scriva la lagrangiana del sistema.

   (b) Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.

   (c) Si determinino le eventuali posizioni di equilibrio come funzione dei parametri del sistema.

-

3) Si scrivano le equazioni del moto per il sistema hamiltoniano definito da

$$H(q,p,t) = \tfrac{1}{2}\left(p^2 + \omega^2 q^2\right) + \frac{\alpha}{3}q^3 + \frac{\beta}{4}q^4 + \gamma q \sin \Omega t$$

Studiare i punti di equilibrio per $\gamma = 0$ e tracciare le linee di flusso sul piano delle fasi. Dire se per $\gamma \neq 0$ esistono più punti di equilibrio.

-

4) Una particella di massa unitaria è sottoposta all'azione del potenziale unidimensionale

$$V(x) = \frac{\omega^2}{8a^2}(x-a)^2(x-b)^2,$$

con $a, b > 0$ e distinti. Determinare le frequenze di oscillazione nel limite delle piccole oscillazioni. Determinare il valore di energia, diciamo E_s, che corrisponde alla separatrice dei moti. Scrivere il periodo di un'orbita generica di energia $E > E_s$. Determinare una espressione approssimata del periodo per $E \to \infty$.

-

5) Supponendo di avere un sistema hamiltoniano sia costituito da una particella nel piano, di massa m, immersa in un potenziale centrale, dimostrare che

(a) il momento angolare e l'energia totale formano un sistema di integrali del moto in involuzione completo;

(b) un integrale completo dell'equazione di Hamilton - Jacobi esiste e vale

$$S(\Phi, \Gamma, r, \theta) = \int p_r(\Phi, \Gamma, r, \theta)\, dr + \int p_\theta(\Phi, \Gamma, r, \theta)\, d\theta$$

dove Γ è l'azione associata al momento angolare e Φ è quella associata all'energia .

-

6) Sapendo che l'effetto fotoelettrico sul sodio si interrompe per valori della frequenza inferiori a $\nu_0 = 5.6 \times 10^{14}\ Hz$, dire se un fotone di energia $E_f = 5.5\ eV$ può provocare l'emissione di elettroni dal sodio e con quale energia massima.

-

7) Un fotone di frequenza $\omega = 3 \times 10^{22}\ sec^{-1}$ viene deflesso a 30^o da un elettrone libero fermo. Calcolare l'energia del fotone diffuso ed il momento finale dell'elettrone. ($\hbar = 1.054571800(13) \times 10^{-34}\ j\ sec$, $c = 299792458\ m/sec$, $m_e = 9.10938356(11) \times 10^{-31}$)

-

8) Ricordando che la Lagrangiana per la particella libera relativistica è data da $L_0 = -m\ c^2\ \sqrt{1-\beta^2}$, scrivere la Lagrangiana per un oscillatore armonico relativistico monodimensionale, derivare il momento coniugato e , effettuando una trasformazione di Legendre, calcolare l'Hamiltoniana. Stabilire se questa quantità si conserva e qual è in suo significato fisico.

-