Fisica Matematica- a.a. 2014-15

1/7/2015

Nome Cognome Matricola

1) Si consideri il sistema dinamico definito nel piano privato dell'origine e di equazioni in coordinate polari :

$$\begin{cases} \dot{r} &= \quad 1-r \\ \dot{\theta} &= 1-\cos\theta \end{cases}$$

Trovare i punti di equilibrio, stabilirne la stabilità , inoltre dimostrare che ogni punto del piano tende asintoticamente per $t \to +\infty$ al punto $(1,0)$.

Le condizioni $\dot{r} = \dot{\theta} = 0 \Rightarrow r = 1$ e $\theta = 0 \Rightarrow (x, y) = (1, 0)$ è l'unico punto critico.

Poiché in ogni intorno di $(1, 0)$ ci sono punti tali che $\dot{r} > 0,\ \dot{\theta} > 0 \Rightarrow$ la traiettoria che parte da essi si allontana da quello critico, esso è **instabile**.

La soluzione generale della prima equazione in r è $r\,(t) = 1{+}c\ e^{-t}$ per ogni possibile costante c. Pertanto tutte le traiettorie hanno come il punto critico come limite asintotico.

2) Dimostrate se e per quali valori delle costanti la funzione $F = ax + by + c\log\left(\frac{x}{y}\right)^d$ è un integrale primo del moto per il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= \alpha\, x + \beta\, x\, y \\ \dot{y} &= \gamma\, y + \delta\, x\, y \end{cases}$$

La $\frac{dF}{dt} = x'(t)\left(a + \frac{cd}{x(t)}\right) + \frac{y'(t)(by(t)-cd)}{y(t)}$ deve essere 0 per qualunque moto $(x(t), y(t))$.

Sostituendo le equazioni del moto e raccogliendo i coefficienti dei termini simili in $x,\ y$ si ottengono le 4 condizioni $cd(\alpha-\gamma), b\gamma + \beta cd, a\alpha - cd\delta, a\beta + b\delta$.

Escludendo il caso $c\,d = 0$ e supponendo $b \neq 0$, si ha $\alpha = \gamma = -\frac{c\,d}{b}\beta,\ \delta = -\frac{a}{c}\beta$.

3) Enunciare il principio di Hamilton.

Tra i moti ammissibili di un sistema meccanico, compresi tra gli istanti t_0 e t_1, il moto effettivamente compiuto è quello che rende stazionaria lazione

$$S[q(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt,$$

dove $L(q(t), \dot{q}(t), t)$ è la funzione lagrangiana del sistema.

4) Un sistema di tre oscillatori uguali interagisce con un potenziale della forma

$$V = \frac{k}{2}\left(q_1^2 + 2q_2^2 + q_3^2 - 2q_1q_2 - 2q_2q_3\right).$$

Trovare le frequenze e i modi normali.

Si suppone che le tre particelle abbiano la stessa massa m. Le corrispondenti matrici di potenziale e cinetica sono $\mathcal{V} = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix}$ e $\mathcal{T} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$.

L'equazione secolare $det\left[\mathcal{V} - \omega^2\mathcal{T}\right] = 0$ ha come radici

$$\omega = 0,\ \sqrt{\frac{k}{m}},\ \sqrt{3\frac{k}{m}}.$$

I corrispondenti modi normali sono dati dagli autovettori (non normalizzati)

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

.

Chiaramente il moto corrispondente a $\omega = 0$ non è oscillatorio, ma le tre particelle traslano della stessa ampiezza a velocità costante.

Questo fatto poteva essere stabilito fin dall'inizio, osservando che il potenziale V può essere riscritto nella form $V = \frac{k}{2}\left[(q_1 - q_2)^2 + (q_3 - q_2)^2\right]$. Il che consente di introdurre il cambio di variabile

$$r_1 = q_1 - q_2, \quad r_2 = q_2, \quad r_3 = q_3 - q_2.$$

La variabile r_2 è ciclica, quindi il momento ad essa coniugato : $p_2 = m(3\dot{r_2} - (\dot{r_1} + \dot{r_3}))$ è una costante del moto.

5) Dare la definizione di tensore d'inerzia per un corpo continuo rispetto ad un sistema d'assi ortogonali $(O, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ e scrivere l'energia cinetica se il corpo ruota attorno ad un ulteriore asse $\hat{n}$.

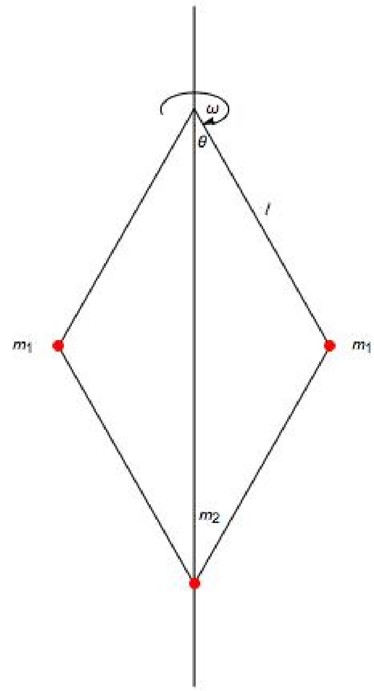

Figure 1:

Data una generica distribuzione di masse $\Delta m_i > 0$ nelle posizioni $\vec{r}_i = (x_1(i), x_2(i), x_3(i))$ nello spazio euclideo, il tensore d'inerzia del corpo è è dato dalle componenti

$$\mathcal{I}_{a,b} = \sum_i \Delta m_i \, x_a(i) \, x_b(i) \, .$$

Esso è un tensore simmetrico definito positivo, quindi è diagonalizzabile con autovalori reali positivi e i corrispondenti autovettori definiscono i corrispondenti assi principali d'inerzia.

Se il corpo rigido, fissato ad un punto, ruota attorno all'asse $\hat{n}$ con velocità angolare $\vec{\omega} = \omega \hat{n}$, allora la sua energia cinetica è

$$T = \tfrac{1}{2} \, \vec{\omega} \cdot \mathcal{I} \cdot \vec{\omega}.$$

6) Trovare l'Hamiltoniana per il sistema rotante a velocità angolare ω costante attorno all'asse verticale mostrato in Figura 1. Le masse m_1 sono incernierate senza attrito alle aste prive di massa e la massa m_2 può scorrere liberamente lungo l'asse verticale.

$$H = \frac{\mathrm{p}\theta^2}{8l^2 m_2 \sin^2(\theta(t)) + 4l^2 m_1} - l\left(m_1\left(2g\cos(\theta(t)) + l\omega^2 \sin^2(\theta(t))\right) + 2gm_2\cos(\theta(t))\right)$$

7) Mostrare per quali valori dei parametri la trasformazione

$$q' = a\,q, \quad p' = b\,p$$

è canonica.

Poiché $\{q', p'\} = a\,b$ la canonicità è preservata solo se $a = b^{-1}$.

8) Sia $F(q,p') = (p'+a)(q-b)$ una funzione generatrice di trasformazioni canoniche: determinarle esplicitamente.

La funzione F è la funzione generatrice di una trasformazione di tipo 2: $p = \frac{\partial F}{\partial q}, \quad q' = \frac{\partial F}{\partial p'}$.
Quindi si ha

$$q' = q - b, \quad p' = p - a$$

*) E. Noether era una donna o un uomo?

Donna, Erlangen, 23 marzo 1882 Bryn Mawr, 14 aprile 1935