

# Fisica Matematica - a.a. 2014-15

26/10/2015

Nome Cognome Matricola:

- 1) Una particella di massa  $m$  è vincolata a muoversi in un piano, sotto l'azione di una forza di attrazione verso l'origine degli assi, proporzionale alla lunghezza del raggio vettore, e di un'altra forza diretta perpendicolarmente al raggio vettore ed opposta alla direzione del moto, che è inversamente proporzionale alla distanza dall'origine. Stabilire se e quali di queste forze derivano da un potenziale e scrivere le equazioni di Lagrange del moto.

-  
-  
-  
-

- 2) Un disco di materiale omogeneo, avente densità di massa  $\rho$  e raggio  $R$ , è vincolato a muoversi senza strisciare su un piano inclinato di un angolo  $\alpha$  rispetto all'orizzontale.
- a) Calcolare il momento d'inerzia del disco rispetto al suo asse perpendicolare passante baricentro.
- b) Il vincolo anolonomo di non strisciamento è espresso dalla relazione  $R\omega + \dot{z} = 0$ , dove  $\omega$  è la velocità angolare del disco e  $z$  è la coordinata lagrangiana che individua la posizione di contatto con il piano inclinato. Scrivere l'energia cinetica totale del disco.

-  
-  
-  
-

- 3) Si consideri un sistema ad un solo grado di libertà sottoposto all'azione del potenziale

$$V = -(M_1 R g \sin \alpha) \theta - M_2 R g \cos \theta,$$

dove tutte le costanti sono positive. Determinare: a) la condizione tra le costanti in modo tale esistano punti di equilibrio; b) il valore dei punti di equilibrio e la loro stabilità, c) tracciare nel piano delle fasi  $(\theta, \dot{\theta})$  il ritratto dei possibili moti.

-  
-  
-  
-

- 4) Si consideri il sistema Hamiltoniano descritto da

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 p_i^2 + g^2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{i-1} (q_i - q_j)^{-2},$$

dimostrare che oltre a due integrali del moto elementari (quali ?) ne esiste un terzo della forma  $L = \sum_{i=1}^3 p_i^3 + 3g^2 \sum i = 1^3 \sum_{j \neq i} p[i] \left[ (q_i - q_j)^{-2} \right]$ .

5) Mostrare che la trasformazione

$$p = m\omega q \cot Q, \quad q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q$$

è canonica.

6) Quali sono le condizioni sulla Lagrangiana affinché sia invertibile la trasformazione di Legendre?

7) Dato il sistema di oscillatori armonici

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^3 p_i^2 + \frac{g^2}{2} \sum_{i=1}^3 q_i^2 + G^2 \sum i = 1^{j-1} \sum_{j=1}^3 q_i q_j,$$

trovare i modi normali di oscillazione.

\*)