Introduzione alla Fisica Moderna - a.a. 2014-15

16/9/2015

Nome Cognome Matricola:

1) Si consideri il sistema meccanico in figura 1, dove il pendolo ha lunghezza ℓ, massa m e la molla, libera di muoversi orizzontalmente, ha costante elastica k. Si scriva l'energia potenziale del sistema e si studino i punti di equilibrio, sotto la condizione che $\frac{g}{\ell} < \frac{k}{m}$ e si traccino le separatrici nel piano delle fasi.

> θ angolo con la verticale, $V = -\omega^2 \cos\theta + \frac{1}{2}\Omega^2 \cos^2\theta$, $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$, $\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. P. Eq. $x = 0$ (instabile), π(instabile), $\pm\theta^* = \pm \arccos\frac{\omega^2}{\Omega^2}$ (stabili).$Vedasifig.2e3$

2) Con riferimento alla figura, la massa m si muove nel piano orizzontale senza attrito ed è vincolata, da un filo inestensibile, alla massa M sospesa sotto l'azione della forza peso. Si scriva la Lagrangiana del sistema e si determini se esistono variabili ignorabili.

> coord. lagr. (r, θ), $z = r +$cost. $T = \frac{1}{2}(M+m)\,\dot{r}^2 + \frac{1}{2} m\, r^2\, \dot{\theta}^2$, $V_{grav} = M\,g\,r$, $\mathcal{L} = T - V_{grav}$. $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0$ θ ignorabile $\rightarrow p_\theta = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = m\,r^2\,\dot{\theta}$ q. conservata

3) Dare la definizione di potenziale generalizzato per forze generalizzate dipendenti dalla velocità.

> Nel caso di forze dipendenti dalla velocità si può ancora definire una lagrangiana e le equazioni rimangono della forma consueta, se esiste una funzione (il potenziale generalizzato) $\mathcal{U} = \mathcal{U}(q_i, \dot{q}_i, t)$ tale che la forza generalizzata si possa scrivere nella forma $Q_k = -\partial_{q_k}\mathcal{U} + \frac{d}{d\,t}\partial_{\dot{q}_k}\mathcal{U}$. Un esempio è costituito dalla forza di Lorentz, il potenziale generalizzato è dato da $\mathcal{U} = q\left(\phi - \vec{A}\cdot\vec{v}\right)$

4) Un' asta rigida AB di massa m, lunghezza ℓ e momento d'inerzia I è libera di ruotare nel piano verticale (x, y), con l'asse y verticale ascendente, attorno al punto medio O. Un punto materiale P di ugual massa m, libero di scorrere lungo l'asta, è legato a O da una forza elastica di costante elastica k. Facendo riferimento alle coordinate lagrangiane $z =$ ascissa di P su AB e $\theta =$ angolo tra asse x e AB. Si determini la Lagrangiana, una legge di conservazione e si scriva la lagrangiana ridotta.

> $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[m\dot{z}^2 + \left(m\,z^2 + I\right)\dot{\theta}^2\right] - \frac{1}{2}\,k\,z^2$. $\qquad p_\theta = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = \left(m\,z^2 + I\right)\dot{\theta}$,
> $\mathcal{L}' = \mathcal{L} - p_\theta\,\dot{\theta} = \frac{1}{2} m\,\dot{z}^2 - W(z)$ con $W = \frac{1}{2}\,k\,z^2 + \frac{p_\theta^2}{2(m\,z^2+I)}$
> Nel caso in cui si consideri anche la forza peso, non ci sono variabili cicliche e la lagrangiana non può essere ridotta.

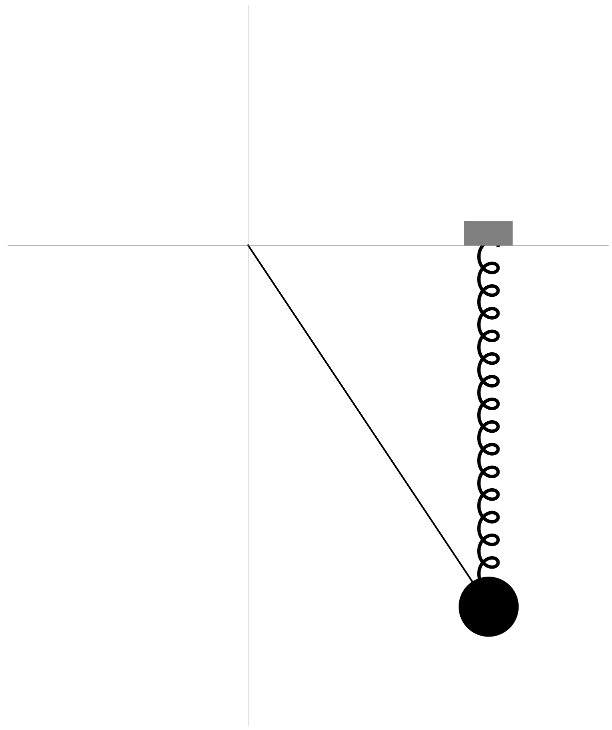

Figure 1:

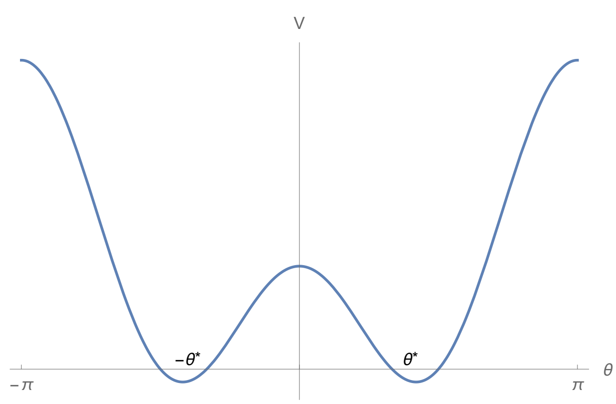

Figure 2:

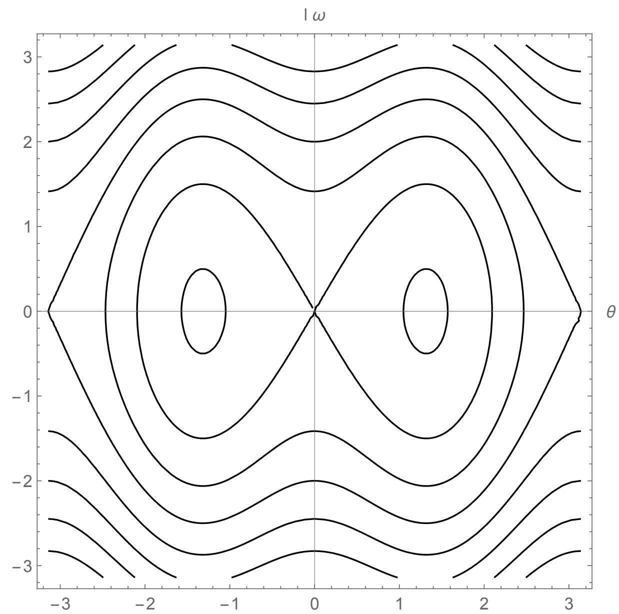

Figure 3:

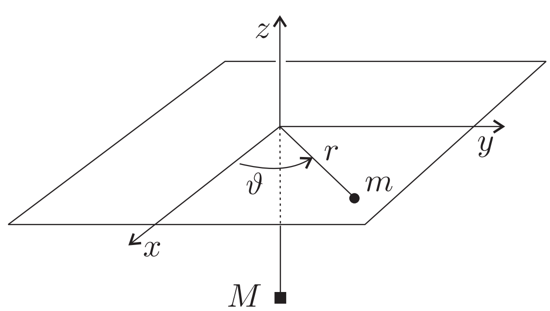

Figure 4:

5) Sia dato il sistema hamiltoniano $H = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2} p_i^2 + g^2 a^2 \sum_{i=1}^{3} \csc\left[a\left(q_i - q_{i-1}\right)\right]^2$ con la condizione di periodicità $q_3 \equiv q_0$. Calcolare le frequenze dei modi normali attorno alla configurazione di equilibrio $\mathbf{q}_{eq} = \left(q_0 = 0,\ q_1 = \frac{2\pi}{3a},\ q_2 = -\frac{2\pi}{3a}\right)$.

$\partial_{q_i} H|_{\mathbf{q}_{eq}} \equiv 0$; Sostituzione : $q_2 \to -\frac{2\pi}{3a} + h_2 + q_0, q_1 \to \frac{2\pi}{3a} + h_1 + q_0,\ q_0 \to -\left(h_1 + h_2\right)$, $p_2 \to \dot{h}_2, p_1 \to \dot{h}_1, p(0) \to -\left(\dot{h}_1 + \dot{h}_2\right)$. Approssimazione armonica per $\mathbf{h} = (h_1, h_2) \to 0$: $H_{arm} = \frac{16}{3} a^4 g^2 \left(h_1^2 - h_2 h_1 + h_2^2\right) + 4a^2 g^2 + \dot{h}_1^2 + \dot{h}_2^2 + \dot{h}_1 \dot{h}_2 = \dot{\mathbf{h}} \cdot \mathcal{T} \cdot \dot{\mathbf{h}} - \mathbf{h} \cdot \mathcal{V} \cdot \mathbf{h}$, dove $\mathcal{V} = \frac{16a^4 g^2}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ e $\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. L'equazione secolare $\det\left[\mathcal{V} - \omega^2 \mathcal{T}\right] = 0$ ha soluzioni positive $\omega_1 = \frac{4\, a^2\, g}{3}$ e $\omega_2 = 4\, a^2\, g$

6) Un fascio omogeneo di elettroni di energia 10 KeV colpisce elasticamente degli ioni di mercurio Hg^-. Sapendo che il flusso del fascio è $j = 10\ sec^{-1} m^{-2}$, quante particelle si osservano ad un angolo di deflessione di 45^o dopo 10 sec.

La sezione d'urto di Rutherford $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{16}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\, E}\right)^2 \sin^{-4}\left(\frac{\theta}{2}\right)$ Il flusso di particelle diffuse in $\frac{d\,N}{d\,\theta} = 2\pi\, j\, \Delta t\, \frac{d\,\sigma}{d\Omega} \sin(\theta) = 6.85 \times 10^{-21}\ \mathrm{rad}^{-1}$

7) Due sbarrette di lunghezza a riposo ℓ_1 e ℓ_2 viaggiano parallelamente, rispettivamente alle velocità v_1 nota e v_2 incognita, rispetto ad un osservatore O. A tale osservatore esse risultano di pari lunghezza. Qual è la relazione tra le loro velocità ?

Per l'osservatore entrambe le sbarrette sono contratte $\ell_1 = \frac{\ell_1^0}{\gamma_1} = \ell_2 = \frac{\ell_2^0}{\gamma_2}$, da cui $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\ell_1^0}{\ell_2^0}$. Elevando al quadrato si ottiene $\beta_2^2 = 1 - \left(\frac{\ell_1^0}{\ell_2^0}\right)^2 \left(1 - \beta_1^2\right)$.

8) Un corpo nero emette alla temperatura di 3.4 $^o K$. Qual è la corrispondente frequenza di massima emissione?

$\lambda_{max} = \frac{b}{T} = \frac{2.898\times10^{-3}}{3.4}$ m $= 8.5 \times 10^{-4}$ m. $\qquad \omega_{max} = \frac{2\,\pi\, c}{\lambda_{max}} = 2.14 \times 10^{12}\, m\, sec^{-1}$.

*) L'effetto fotoelettrico fu spiegato da ....

A. Einstein