

Fisica Matematica - a.a. 2014-15

27/1/2016

Nome Cognome Matricola:

- 1) Una particella è vincolata a muoversi lungo una retta, sotto l'azione di una forza di richiamo elastica e da un'altra forza dipendente dalla velocità e dalla posizione in maniera quadratica. In opportune unità di misura, il moto è descritto dal sistema

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = \mu (1 - x^2) v - x.$$

Trovare la posizione di equilibrio, studiare il suo carattere e descriverne i moti nel suo intorno. Inoltre si dimostri che la funzione convessa positiva $E = \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} x^2$ non è conservata dalla dinamica, ma è una funzione crescente/decrescente se $|x| < 1$ o $|x| > 1$. Interpretare fisicamente questo risultato.

-

- 2) Un sistema meccanico è costituito da un punto materiale di massa m , vincolato a muoversi senza attrito lungo una retta orizzontale. Ad esso è incernierata, senza attrito, un'asta priva di massa e di lunghezza L . All'altra estremità dell'asta è fissato un punto di massa M . Sul sistema agisce la forza peso. Trovare la Lagrangiana del sistema e scrivere le equazioni del moto.

- -

- 3) Si consideri l'Hamiltoniana

$$H = \frac{A^2}{2 - \cos^2 \phi} (p_x^2 - 2B p_x p_\phi \cos \phi + \lambda^2 p_\phi^2) - \mu \cos \phi + \frac{1}{2} k x^2, \quad (1)$$

dove tutte le costanti presenti sono da intendersi positive.

Trovare la condizione tra le costanti affinché il primo termine sia una energia cinetica ben definita. Determinare le posizioni degli equilibri e la loro stabilità. Attorno alla posizione di equilibrio stabile determinare le frequenze dei modi normali e i corrispondenti autovettori.

- -

- 4) Una particella elettricamente carica è sottoposta all'azione di un campo magnetico uniforme e la corrispondente Hamiltoniana assume la forma

$$H = \frac{1}{2} \left[\vec{p}^2 + \frac{b^2}{4} (x^2 + y^2) + b (p_x y - p_y x) \right]. \quad (2)$$

Dire se la trasformazione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \frac{1}{a} \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ r \\ s \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad \beta \in [0, 2\pi] \quad (3)$$

è canonica, scrivere la nuova hamiltoniana e stabilire se per qualche valore di a e β essa coincide con la vecchia.

--

- 5) Un satellite orbitante attorno alla Terra, una volta giunto al perigeo subisce una accelerazione radiale dovuta ad una forza impulsiva. Il momento radiale viene incrementato di un impulso π . Determinare di quanto cambiano il momento angolare totale, l'energia meccanica totale ed il vettore di Runge-Lenz.

--

- 6) Calcolare l'energia cinetica di una sfera omogenea di densità di massa ρ e raggio R che rotola, senza strisciare, su un piano orizzontale, con velocità di traslazione del baricentro pari a v .

-