

# Introduzione alla Fisica Moderna - a.a. 2017-18

25/3/2019

Nome Cognome Matricola:
-------------------------

- 1) Si consideri il sistema dinamico per la coppia di variabili  $\{x(t), y(t)\}$

$$\dot{x} = y - \gamma x, \quad \dot{y} = -\sin x + (1 + \tfrac{1}{2} \cos x) \sin x,$$

con  $0 < \gamma \ll 1$ . Dire se il sistema sia hamiltoniano o per quale valore dei parametri lo può essere.. Trovare i punti di equilibrio, caratterizzando la loro stabilità e tracciare il grafico di flusso nel piano delle fasi.

-

- 2) Un punto materiale  $P$ , avente massa  $m$ , è vincolato a muoversi lungo un'ellisse che giace nel piano verticale ed ha equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

con gli assi disposti secondo l'orizzontale/verticale.  $P$  è sottoposto all'azione della forza peso e da una forza di richiamo elastica diretta verso il punto  $O$ , centro dell'ellisse.

Si scriva la Lagrangiana del sistema, in termini di una sola coordinata generalizzata, e si scriva la corrispondente equazioni del moto.

-

3) Un punto materiale di massa  $m$  è soggetto ad un potenziale centrale della forma

$$\phi(r) = -\frac{GM_0}{r_0} \frac{\frac{r^2}{r_1^2} + 1}{\frac{r^3}{r_2^3} + 1}$$

Scrivere l'Hamiltoniana del problema in coordinate sferiche. Scrivere le equazioni hamiltoniane. Trovare le leggi di conservazione del sistema. Fissando il valore del momento angolare a  $J \neq 0$ , si trovi l'equazione che determina il punto di equilibrio per la coordinata radiale al variare di  $J$ . Discutere l'esistenza di possibili soluzioni (è opportuno effettuare le riscalature  $r = r_2 q$  e  $J^2 = (Gj^2 m M r_2^4)/(r_0 r_1^2)$ ).

--

- 4) Sapendo che la Terra ruota attorno al Sole ad una velocità  $v_T = 13.1 \text{ km/sec}$ , stabilire quale sia la velocità del sistema solare rispetto ad una stella della Via Lattea, la cui luce della riga  $\lambda_{H-\alpha} = 6562,81 \text{ \AA}$  è osservata allo spettroscopio del Laboratorio a  $6557.76 \text{ \AA}$ .  
Calcolare il valore della lunghezza d'onda della stessa riga, se la misura viene effettuata 6 mesi dopo. In che verso si sta muovendo il Sole?

-

- 5) Ad una particella puntiforme di massa  $m$  viene associato un certo vettore  $\vec{S}$  dello spazio ordinario. Per costruire un quadrivettore  $S^\alpha$ , si introduca una opportuna componente  $S^0$ , tale che si annulli nel sistema di riferimento solidale con la particella. Usando le trasformazioni di Lorentz scrivere esplicitamente il vettore trasformato in ogni altro sistema di riferimento inerziale in termini di quello nel sistema della particella. Calcolare la lunghezza minkowskiana del quadrivettore ottenuto.



- 6) Ricordando che la Lagrangiana per la particella libera relativistica è data da  $L_0 = -m c^2 \sqrt{1 - \beta^2}$ , scrivere la Lagrangiana per una carica  $q$  in un campo magnetico uniforme indipendente dal tempo. Derivare il momento coniugato e, effettuando una trasformazione di Legendre, calcolare l'Hamiltoniana. Effettuando poi una trasformazione di Lorentz in una direzione ortogonale al campo magnetico, derivare la nuova Hamiltoniana.



- 7) Una particella di massa unitaria è sottoposta all'azione del potenziale unidimensionale

$$V(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} - \frac{15}{64}x^2.$$

Determinare le frequenze di oscillazione nel limite delle piccole oscillazioni. Determinare il valore di energia che corrisponde alla separatrice dei moti. Calcolare il moto approssimato in un intorno del punto di equilibrio instabile.

-

- 8) Un fotone di frequenza  $\omega = 3 \times 10^{25} \text{ sec}^{-1}$  viene deflesso a  $60^\circ$  da un elettrone libero fermo. Calcolare l'energia del fotone diffuso ed il momento finale dell'elettrone.

-

## 1 Costanti e fattori di conversione

- Velocità della luce nel vuoto:  $c = 299792458 \text{ m/sec}$
- Carica elettrica elementare:  $e = 1.60218 \times 10^{-19} \text{ C}$
- Costante di Planck:  $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ joule sec}$  ( $\hbar = 1.054571800(13) \times 10^{-34} \text{ J sec}$ )
- Costante di Boltzmann  $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \frac{\text{joule}}{\text{°K}}$
- Numero di Avogadro :  $N_A = 6,022 \times 10^{23}$
- Massa del protone :  $m_p = 1.6726219 \times 10^{-27} \text{ kg}$
- Massa dell'elettrone :  $m_e = 9.10938 \times 10^{-31} \text{ kg}$
- Massa del neutrone :  $m_n = 939.6 \text{ MeV}/c^2$
- Costante dielettrica nel vuoto:  $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$
- Costante di Wien:  $b = 2.898 \times 10^{-3} \text{ m °K}$
- Costante di Stefan-Boltzmann :  $\sigma = 5.670 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ °K}^4}$
- Lunghezza d'onda Compton per l'elettrone :  $2.426 \times 10^{-12} \text{ m}$
- $1 \text{ eV} = 1.60218 \times 10^{-19} \text{ joule}$
- $1 \text{ u.m.a.} = 931 \text{ MeV}/c^2$