$\mathrm{m}_1 0 scaled 1200$

Introduzione alla Fisica Moderna - a.a. 2015-16

6/12/2016

Nome Cognome Matricola:

1) Si dimostri che la funzione $F x, y = d\,x - c\ \log\ x + b\ y - a\ \log\ y$ una costante del moto per il sistema di equazioni $\begin{array}{ll} \dot{x} & = a\ x - b\ x\ y \\ \dot{y} & = -c\ y + d\ x\ y \end{array}$

- E' sufficiente derivare F rispetto a t e sostituire il sistema (1).

2) Si scriva la Lagrangiana per il sistema meccanico costituito da due masse m rigidamente collegate tra loro da una sbarra, priva di massa, che puruorare attorno ad un punto fisso, distante r dal centro della sbarra, in modo che questa formi sempre un angolo di $\pi/2$ rispetto al raggio congiungente. Inoltre lungo tale raggio puoscillare una terza massa m', soggetta ad una forza elastica di costante k, all'equilibrio nel punto medio della sbarra. Tutte avviene sotto l'azione della forza peso e in assenza attriti.

- Vedi Figura 1. Per quanto riguarda il manubrio, le cui masse sono posizionate in $\vec{OM}\theta t \pm \frac{L}{2}\vec{\rho}\theta t$ con $\vec{OM} \cdot \vec{\rho} = 0$, sufficiente applicare il teorema dell'energia cinetica per i corpi rigidi rotanti attorno ad un asse non passante per il centro di massa, pertanto $T_{manubrio} = mr^2 + \frac{L^2}{4}\dot{\theta}^2$. La massa oscillante viene descritta dal vettore $\vec{OM}1 + ft$, dove f tiene conto dello spostamento relativo lungo l'asse. Pertanto il suo contributo cinetico duplice, precisamente $T_{m'} = m'r^2 1 + ft^2\dot{\theta}^2 + m'r^2\dot{f}^2$. L'energia potenziale $U = 2mgr\sin\theta + m'gr1 + f\sin\theta + kf^2$. La Lagrangiana quindi $L = T_{manubrio} + T_{m'} - U$.

3) Si trovi se la Lagrangiana $L = M\dot{x_1}^2 + m\ell^2\dot{\theta}^2 + m\ell\cos\theta\dot{x_1}\dot{\theta} + mg\ell^2\cos\theta$ ammetta coordinate cicliche, quali siano i momenti coniugati e quale sia il limite delle piccole oscillazioni.

- Poich$\frac{L}{x_1} = 0$, allora x_1 una coordinata ciclica.
I momenti sono $p_x = \ell m\theta'(t)\cos(\theta(t)) + Mx'(t)$ e $p_\theta = \ell^2 m\theta'(t) + \ell m\cos(\theta(t))x'(t)$.
Nel limite delle piccole oscillazioni, a meno di contributi costanti, la Lagrangiana diventa

$$L_{Arm} = \frac{1}{2}l^2m\theta'(t)^2 + lm\theta'(t)x'(t) + \frac{1}{2}Mx'(t)^2 - \frac{1}{2}gl^2m\theta(t)^2$$

.

4) Un satellite orbitante attorno alla Terra, una volta giunto al perigeo subisce una accelerazione radiale dovuta ad una forza impulsiva. Il momento radiale viene incrementato di un impulso P_0. Determinare di quanto cambiano il

momento angolare totale, l'energia meccanica totale ed il vettore di Runge-Lenz. Datene una interpretazione fisica.

> Il momento cambia radialmente secondo $\to \quad ' = +P_0\hat{r}$, pertanto il momento angolare $' = \times ' =$ non cambia.
> D'altra parte l'energia meccanica $' = \frac{'^2}{2m} - \frac{k}{r} = +\frac{P_0^2}{2m}$, dove si tenuto conto dell'ortogonalitåtra ed $\hat{r}$ al perigeo.
> Infine il vettore di Runge-Lenz $' = ' \times ' - mk\hat{r} = +P_0\hat{r}\times = -P_0 r$.
> Quindi l'energia del satellite aumenta, con un cambio dell'orbita, di nuovo semiasse maggiore $a' = \frac{k}{2|'|} \approx a1 + \frac{p_0^2}{2m||}$ ed eccentricitå$e' = \sqrt{1 - \frac{2'}{A'}^2}$. Inoltre il nuovo semiasse maggiore punterånella direzione di $'$.

5) Mostrare se la trasformazione

$$p = m\omega q \, \coth \, Q, \qquad q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sinh \, Q$$

sia canonica.

> - Sostituendo q nella definizione di p si ottiene la relazione esplicita $p = \sqrt{2m\omega P}\cosh(Q)$. Pertanto, calcolando la parentesi di Poisson $q, p =_Q q \ _P p -_P q \ _Q p = \cosh^2(Q) - \sinh^2(Q) = 1$, si verifica la canonicitådella trasformazione.

6) Descritto un oscillatore armonico planare omogeneo con coordinate canoniche q_1, q_2, p_1, p_2 e Hamiltoniana $H = p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2$, dimostrare che le nuove coordinate $I_k = q_k^2 + p_k^2$ e $\phi_k = \arctan p_k/q_k$ sono canoniche e determinare le equazioni del moto.

> - Si verifica direttamente che $I_1, I_2 = \phi_1, \phi_2 = 0$ e $I_i, \phi_j = \delta_{i,j}$. Inoltre in queste coordinate l'Hamiltoniana diventa $H = I_1 + I_2$. Di conseguenza le eq. di Hamilton diventano
>
> $$\begin{aligned} \dot{I_1} &= I_1, H = && 0 \\ \dot{I_2} &= I_2, H = && 0 \\ \dot{\phi_1} &= \phi_1, H = && 1 \\ \dot{\phi_2} &= \phi_2, H = && 1 \end{aligned}$$

7) Un corpo, considerato nero, viene mantenuto alla temperatura costante di $T_c = 2000 \ ^oK$. Calcolare la potenza netta emessa dal corpo, sapendo che la sua superficie totale $A = 0.20 \ m^2$. Calcolare la lunghezza d'onda massima di emissione e stabilire se essa nel visibile.

> - La potenza raggiante emessa dal corpo data dalla legge derivata da quella di Stefan-Boltzmann $P = A\sigma T^4$, dove $\sigma = 5.7 \times 10^{-8} \ W \ m^{-2} \ K^{-4}$ la costante di Stefan. I dati conducono al valore di potenza irraggiata $P = 0.18 \times 10^6 \ W$. Per quanto riguarda la lunghezza d'onda di picco si utilizza la legge dello spostamento di Wien, che conduce al valore $\lambda_{max} = 0.0029 \ m \ K/2000K = 1.45 \times 10^{-6} m$. Quindi il picco di emissione nelle microonde-infrarosso, quindi non visibile.

8) Nel sistema di riferimento del laboratorio una particella di massa a riposo m_1 collide con velocitå$v \ \hat{x}$ su un'altra particella ferma di massa m_2. Calcolare le componenti del quadrimomento totale e il suo modulo.

E' possibile trovare un sistema di riferimento nel quale annullare tutte le componenti spaziali del quadrimomento? E se si, quale deve essere la trasformazione di Lorentz da applicare?

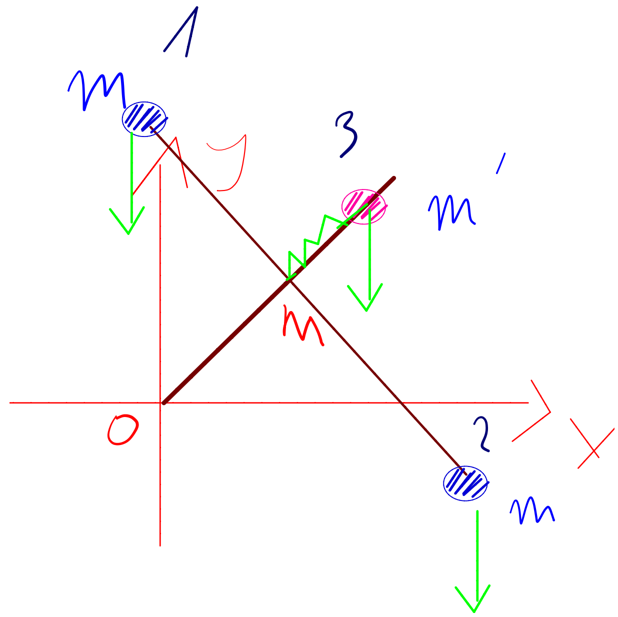

Figure 1:

- Si ha che $p_1^\mu = m_1\gamma_1 c, v_1, 0, 0$ dove $\gamma_1 = `1 - v_1/c^{2\prime -1/2}$ e $p_2^\mu = m_2 c, 0, 0, 0$. Quindi $p^\mu_{tot} = p_1^\mu + p_2^\mu = m_1\gamma_1 + m_2 c, m_1\gamma_1 v_1, 0, 0$, inoltre $p_{tot} = `m_1\gamma_1 + m_2^2 c^2 - m_1\gamma_1 v_1^{2\prime -1/2} = c\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2\gamma_1}$.
Per annullare la componente spaziale del quadrimomento totale dobbiamo effettuare una trasformazione di Lorentz, che ponga il centro di massa a riposo in detto sistema. Questo comporta che bisogna trovare quella trasformazione , individuata dalla velocitå$\beta\hat{x}$, tale che le nuove velocitådelle particelle siano : $\beta_1' = \frac{\beta_1 - \beta}{1 - \beta_1\beta}$ e $\beta_2' = -\beta$. Inoltre deve valere la relazione sulla parte spaziale del momento $m_1\gamma_1'\beta_1' + m_2\gamma_2'\beta_2' = 0$. Infine il quadrimomento quadro deve essere uguale a quello calcolato precedentemente. Quindi deve essere $m_1\gamma_1' + m_2\gamma_2'^2 c^2 = p_{tot}^2$. Dalla relazione sul momento spaziale si puricavare $m_1\gamma_1'$ e sostituire la sua espresssione nella precedente formula per il quadrimomento quadro, poi utilizzare le espressioni di β_1' e di β_2', ottenendo un'equazione di 2^o grado per β. La radice $\beta = \frac{\beta_1\left(2\gamma^3 m_1 m_2 + \gamma^2 m_1^2 + m_2\left(\gamma^2 m_2 - \sqrt{(\gamma m_2 + m_1)^2}\right)\right)}{(\gamma m_1 + m_2)((2\gamma^2 - 1)m_2 + \gamma m_1)}$ fornisce la velocitådel sistema di riferimento solidale con il centro di massa del sistema.