Introduzione alla Fisica Moderna - a.a. 2014-15

7/1/2016

Nome Cognome Matricola:

1) Una particella è vincolata a muoversi lungo una retta, sotto l'azione di una forza di richiamo elastica e da un'altra forza dipendente dalla velocità e dalla posizione in maniera quadratica. In opportune unità di misura, l'equazione del moto che ne deriva è

$$\ddot{x} - \mu\left(1 - x^2\right)\dot{x} + x = 0, \qquad \mu > 0 \tag{1}$$

Riscrivere l'equazione come il sistema di due equazioni del primo ordine, trovare la posizione di equilibrio, studiare il suo carattere e descriverne i moti nel suo intorno.

Si dimostri che la funzione convessa positiva $E = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}x^2$ non è conservata dalla dinamica, ma è una funzione crescente/decrescente se $|x| < 1$ o $|x| > 1$. Interpretare fisicamente questo risultato.

- L'equazione data è equivalente al sistema di due equazioni del primo ordine

$$\dot{x} = v, \qquad \dot{v} = \mu\left(1 - x^2\right)v - x.$$

Esiste una posizione di equilibrio: $\mathbf{0} = (x = 0,\ v = 0)$.
Attorno a $\mathbf{0}$ il sistema può essere linearizzato nella forma $(\dot{x},\ \dot{v}) = M\ (\dot{x},\ \dot{v})$, dove la matrice è $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}$. Poiché i suoi autovalori sono $\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left(\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}\right)$, che hanno sempre una parte reale positiva, l'equilibrio sarà instabile per ogni $\mu > 0$ (vedi Fig.1).
Derivando E rispetto a t e sostituendo le equazioni del moto si ottiene $\frac{d\,E}{dt} = -mv(t)^2\left(x(t)^2 - 1\right)$. In primo fattore è sempre dello stesso segno, il secondo cambia se $|x| < 1$ o $|x| > 1$. Nel primo caso la derivata di E è positiva, quindi la funzione è crescente, mentre per $|x| > 1$ essa è decrescente durante il moto. Questo indica che i moti saranno limitati, anche se non tendono mai al punto di equilibrio (vedi Fig.2). .

2) Un sistema meccanico è costituito da un punto materiale di massa m, vincolato a muoversi senza attrito lungo una retta orizzontale. Ad esso è incernierata, senza attrito, un'asta priva di massa e di lunghezza L. All'altra estremità dell'asta è fissato un punto di massa M. Sul sistema agisce la forza peso. Trovare la Lagrangiana del sistema e scrivere le equazioni del moto.

- La lagrangiana del sistema (vedi Fig. 3) è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(L^2 M \left(\theta'\right)^2 + 2LM\theta' \cos(\theta) x' + (m+M)\left(x'\right)^2\right) + gLM\cos(\theta).$$

Le equazioni del moto risultano

$$\begin{aligned} L\theta'' + \cos(\theta)x'' = &\quad -g\sin(\theta) \\ LM\theta''\cos(\theta) + (M+m)x'' = &\quad LM\left(\theta'\right)^2 \sin(\theta) \end{aligned}$$

3) Si consideri l'Hamiltoniana

$$H = \frac{A^2}{2-\cos^2\phi}\left(p_x^2 - 2Bp_x\, p_\phi\, \cos\phi + \lambda^2\, p_\phi^2\right) - \mu\cos\phi + \tfrac{1}{2}\, k\, x^2, \tag{2}$$

dove tutte le costanti presenti sono da intendersi positive.

Trovare la condizione tra le costanti affinchè il primo termine sia una energia cinetica ben definita. Determinare le posizioni degli equilibri e la loro stabilità . Attorno alla posizione di equilibrio stabile determinare le frequenze dei modi normali e i corrispondenti autovettori.

- Affinché il primo termine sia una energia cinetica deve essere una forma quadratica in p_x, p_ϕ definita positiva. Il primo fattore è sempre positivo, pertanto basta studiare il segno della matrice cinetica "ridotta" $\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 1 & -B\cos(\phi) \\ -B\cos(\phi) & \lambda^2 \end{pmatrix}$. Poiché gli elementi diagonali sono positivi, basta verificare il segno del determinante, che risulta $|\mathcal{T}| = \lambda^2 - B^2\cos^2(\phi)$, che è sempre positivo se $\lambda > |B|$.
Il potenziale si riduce a $V = \frac{x^2}{2} - \mu\cos(\phi)$, pertanto gli estremi del potenziale, definiti da $\nabla V = 0$ sono

$$\mathbf{e}_- = (x=0, \phi=0)\,, \qquad \mathbf{e}_+ = (x=0, \phi=\pi)\,.$$

Calcolato l'hessiano del potenziale $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu\cos(\phi) \end{pmatrix}$, osservato che uno degli elementi diagonali è $1 > 0$, e che il suo determinante $|h| = \mu\cos(\phi)$ nei punti di equilibrio vale $|h|\,|_{\mathbf{e}_-} = \mu, \qquad |h|\,|_{\mathbf{e}_+} = -\mu$, si conclude che $\mathbf{e}_-$ è il punto di equilibrio stabile, instabile $\mathbf{e}_+$.

4) Una particella elettricamente carica è sottoposta all'azione di un campo magnetico uniforme e la corrispondente Hamiltoniana assume la forma

$$H = \tfrac{1}{2}\left[\vec{p}^2 + \frac{b^2}{4}\left(x^2+y^2\right) + b\left(p_x\, y - p_y\, x\right)\right]. \tag{3}$$

Dire se la trasformazione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \frac{1}{a}\cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ r \\ s \end{pmatrix}, \quad a\in\mathbb{R}, \quad \beta\in[0,\, 2\pi] \tag{4}$$

è canonica, scrivere la nuova hamiltoniana e stabilire se per qualche valore di a e β essa coincide con la vecchia.

- Una trasformazione di punto, cioé vhe trasforma solo le coordinate tra di loro, è sempre canonica, in quanto $x_i = x_i\left(Q_\alpha\right)$ induce la trasformazione tra i momenti della forma $p_\alpha = \sum_i P_i \frac{\partial\, Q_i}{\partial\, x_\alpha}$. Essi sono dati esplicitamente nella forma $p_1 = \frac{P_1\cos(\beta)}{\alpha} + P_2\sin(\beta), p_2 = \alpha P_2\cos(\beta) - P_1\sin(\beta), p_3 = P_3$. Si può così verificare che $\{x_\alpha, p_\beta\} = \sum_i \frac{\partial\, x_\alpha}{\partial\, Q_i}\frac{\partial\, p_\beta}{\partial\, P_i} + 0 = \delta_{\alpha,\,\beta}$. Le altre parentesi fondamentali rimangono nulle.
Ovviamente l'Hamiltoniana è modificata in una espressione complicata:

$$
\begin{aligned}
K = \; & \frac{b^2\left(\cos^2(\beta)\left(a^4q^2+r^2\right)+a\sin(\beta)\left(2\left(a^2-1\right)qr\cos(\beta)+a\sin(\beta)\left(q^2+r^2\right)\right)\right)}{8a^2} + \\
& \frac{b\left(\cos^2(\beta)\left(p_1r-a^4p_2q\right)+a^2\sin^2(\beta)(p_1r-p_2q)+a\left(a^2-1\right)\sin(\beta)\cos(\beta)(p_1q-p_2r)\right)}{2a^2} + \\
& \frac{\left(a^4p_2^2+p_1^2\right)\cos^2(\beta)+a^2\left(\left(p_1^2+p_2^2\right)\sin^2(\beta)+p_3^2\right)-\left(a^2-1\right)ap_1p_2\sin(2\beta)}{2a^2}.
\end{aligned}
$$

Tuttavia è facile verificare che per $\beta = \frac{\pi}{2}$ la forma di K è la stessa di H, anche se la trasformazione non è l'identità , ma scambia $x \longleftrightarrow y$.

5) Un satellite orbitante attorno alla Terra, una volta giunto al perigeo subisce una accelerazione radiale dovuta ad una forza impulsiva. Il momento radiale viene incrementato di un impulso π, facendo assumere alla particella una nuova orbita ellittica. Determinare il cambiamento dei parametri orbitali.

- (vedi Fig. 4) Osserviamo che il momento angolare non cambia, poiché il cambiamento $\vec{p} \to \vec{p}\,' = \vec{p} + \pi\hat{r}$, comporta l'identià

$$\vec{L}' = \vec{r} \times (\vec{p} + \pi\hat{r}) = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{L}.$$

Il corrispondente nuovo vettore di Runge-Lenz è

$$\vec{A}' = (\vec{p} + \pi\hat{r}) \times \vec{L}' - mk\frac{\hat{r}}{r} = \vec{A} + \pi\hat{r} \times \vec{L},$$

dove m è la massa del satellite e $k = Gm_T$. Il vettore di $\vec{A}'$ indica la direzione del semiasse maggiore della nuova orbita.
Ricordando che il modulo del vettore di Runge-Lenz è legato all'eccentricità , otteniamo la relazione tra vecchia e nuova eccentricità

$$\left(mke'\right)^2 = |\vec{A}'|^2 = |\vec{A}|^2 + (r_-\pi p)^2 = (mke)^2 + (r_-\pi p)^2.$$

Tenuto infine conto della relazione $e = \sqrt{1 - \frac{L^2}{mka}}$, il nuovo semiasse maggiore sarà

$$a' = \frac{L^2}{mk\left(1 - e'^2\right)}.$$

6) Una particella di massa a riposo m_0 muove liberamente a velocità v nel sistema del laboratorio sulla Terra. Quali saranno le componenti del suo quadri-impulso rispetto ad un sistema solidale con il Sole?

Supponiamo che il sistema del laboratorio sia orientato in modo tale che il suo asse x coincida con quello del sistema solidale con il Sole e che la velocità relativa sia V_T e diretta lungo tale asse. La velocità della particella sia $\vec{v}$ orientata arbitrariamente nel sistema del laboratorio. Il fattore di Lorentz è $\gamma_T = \frac{1}{\sqrt{1-(V_T/c)^2}}$. - Il quadrimpulso della particella ha componenti $p_{lab} = m_0\gamma\,(c, v_x, v_y, v_z)$ con $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$. Esso si trasforma secondo Lorentz, pertanto

$$p_{Sole} = \left(\gamma_T\left(p_0 - \beta_T p_x\right), \gamma_T\left(p_x - \beta_T p_0\right), p_y, p_z\right)$$

7) Un corpo viene mantenuto alla temperatura costante di $T_c = 200\ ^oC$ in ambiente terrestre ($T_{amb} = 20\ ^oC$). Calcolare la potenza netta emessa dal corpo, sapendo che la sua superficie totale è $A = 2.0\ m^2$. Calcolare la lunghezza d'onda massima di emissione e stabilire se essa è nel visibile.

- La legge di Stefan-Boltzmann $R_T = \sigma\, T^4$ ci fornisce la radianza, cioé la potenza emessa per unità di superficie, di un corpo nero alla temperatura T. Quindi la potenza totale emessa è $\mathcal{P} = \sigma\, A\, T^4 = 5.67 \times 10^{-8} \times 2.0\ 293^4\ W = 835\ W$.
Dalla legge dello spostamento di Wien si ha che la lunghezza d'onda della radiazione emessa ha ampiezza massima per $\lambda_{max} = 2.898 \times 10^{-3}/293\ m = 9,89 \times 10^{-6}\ m$. Tale radiazione è nella banda delle micro-onde e quindi non è visibile dall'occhio umano.

8) Gli elettroni più veloci emessi da un fotocatodo illuminato con luce di lunghezza d'onda $\lambda = 350\ \AA$, si muovono ortogonalmente ad un campo magnetico di intensità $B = 2.7 \times 10^{-4}\ Tesla$, percorrendo circonferenze con $R = 2.0\ cm$ di raggio. Calcolare la funzione lavoro del fotocatodo.

- Gli elettroni emessi dal fotocadodo posseggono energia cinetica $E = \frac{h\,c}{\lambda} - w_0$, dove w_0 rappresenta la funzione di lavoro. Gli elettroni, entrando nel campo magnetico uniforme, percorrono orbite circolari di raggio $R = \frac{m\,v}{e\,B}$, quindi $v = \frac{e\,B\,R}{m}$, Pertanto $w_0 = \frac{h\,c}{\lambda} - \frac{1}{2}m\left(\frac{e\,B\,R}{m}\right)^2 = \left(5.50 \times 10^{-18} - 4.11 \times 10^{-19}\right)\ J = 51.0 \times 10^{-19}\ J = 31.7\ eV$.

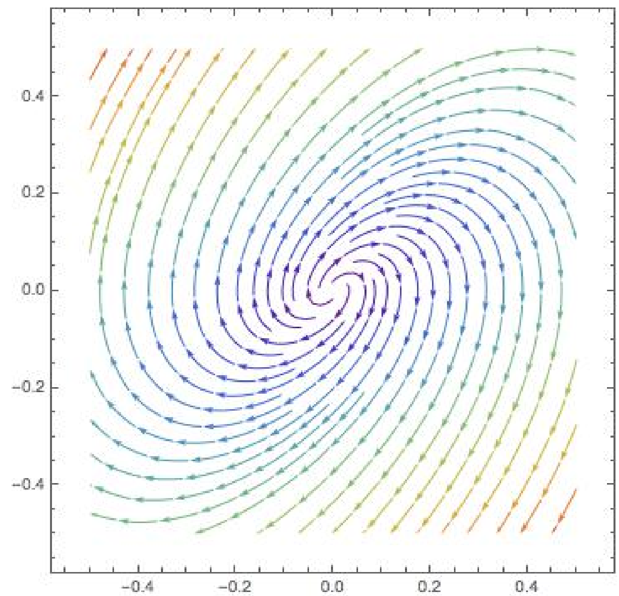

Figure 1: Esercizio 1): il comportamento del campo vettoriale attorno a $\mathbf{0}$ con $\mu = 1$

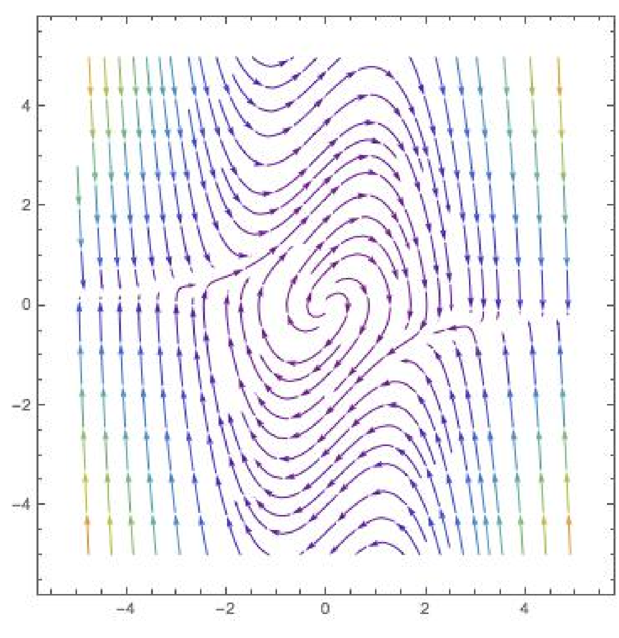

Figure 2: Esercizio 1): il comportamento del campo vettoriale con $\mu = 1$ in un dominio con $|x| > 1$. E' chiaro che le linee di flusso tornano indietro se ci si allontana troppo dall'origine. I moti pertanto rimangono limitati.

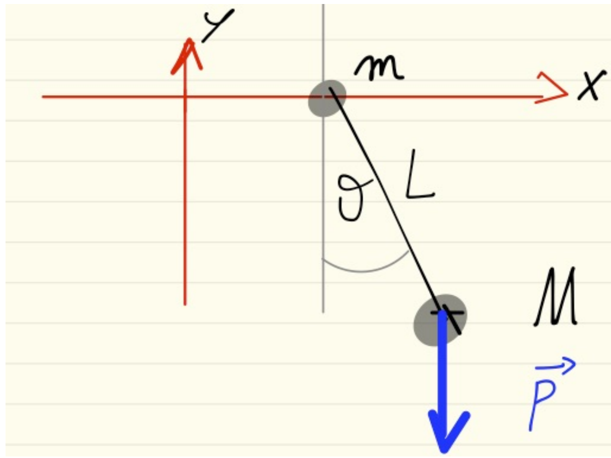

Figure 3: Esercizio 2): schema del sistema

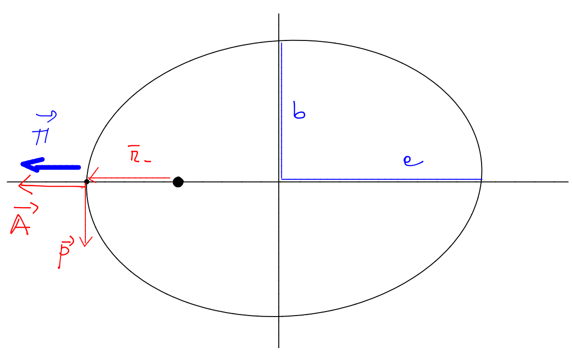

Figure 4: Esercizio 5): Lo stato iniziale del satellite