Introduzione alla Fisica Moderna - a.a. 2017-18

04/06/2018

Nome Cognome Matricola:

1) Si consideri il sistema dinamico nonlineare

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 4y,\\ \dot{y} &= -4\left(x-\frac{1}{2}\right)-2R\,(x+y)\,,\end{aligned}$$

dove la funzione a rampa di saturazione R è definita da

$$R\,(z)=\left\{\begin{array}{cc} z & \|z\|\leq 1\\ \mathrm{sign}\,(z) & \|z\|>1\end{array}\right. \tag{1}$$

Si determinino i punti di equilibrio, la loro stabilità lineare e se è asintoticamente stabile. Tracciare le linee diflusso del campo vettoriale.

-

2) Si consideri il sistema lagrangiano costituito da un punto materiale P di massa m , vincolato a muoversi in un piano verticale (x,y), lungo il profilo di equazione $y = y0\sqrt{1+(x/x_0)^2}$, che ruota intorno all' asse verticale con velocità angolare costante $\omega \in \mathbb{R}$. Il punto è inoltre sottoposto alla forza di gravità ed è collegato all' estremo di una molla di costante elastica $k > 0$, priva di massa e lunghezza a riposo ℓ_0, libera di scorrere libera lungo l'asse di rotazione.

(a) Si scriva la lagrangiana del sistema.

(b) Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.

(c) Si determinino le eventuali posizioni di equilibrio.

-

3) Si scrivano le equazioni del moto per il sistema hamiltoniano definito da

$$H(q,p,t) = \tfrac{1}{2}\left(p^2 + \omega^2 q^2\right) + \frac{\alpha}{3} q^3 + \frac{\beta}{4} q^4 + \gamma q \sin \Omega t$$

Studiare i punti di equilibrio per $\gamma = 0$ e tracciare le linee di flusso sul piano delle fasi. Dire se per $\gamma \neq 0$ esistono più punti di equilibrio.

-

4) Una particella di massa unitaria è sottoposta all'azione del potenziale unidimensionale

$$V(x) = \frac{\omega^2}{8a^2}(x-a)^2(x-b)^2,$$

con $a, b > 0$ e distinti. Determinare le frequenze di oscillazione nel limite delle piccole oscillazioni. Determinare il valore di energia, diciamo E_s, che corrisponde alla separatrice dei moti. Scrivere il periodo di un'orbita generica di energia $E > E_s$. Determinare una espressione approssimata del periodo per $E \to \infty$.

-

5) Supponendo di avere un sistema hamiltoniano sia costituito da una particella nel piano, di massa m, immersa in un potenziale centrale, dimostrare che

(a) il momento angolare e l'energia totale formano un sistema di integrali del moto in involuzione completo;

(b) un integrale completo dell'equazione di Hamilton - Jacobi esiste e vale

$$S\left(\Phi,\Gamma,r,\theta\right)=\int p_r\left(\Phi,\Gamma,r,\theta\right)dr+\int p_\theta\left(\Phi,\Gamma,r,\theta\right)d\theta$$

dove Γ è l'azione associata al momento angolare e Φ è quella associata all'energia .

-

6) Sapendo che l'effetto fotoelettrico sul sodio si interrompe per valori della frequenza inferiori a $\nu_0 = 5.6 \times 10^{14}\ Hz$, dire se un fotone di energia $E_f = 5.5\ eV$ può provocare l'emissione di elettroni dal sodio e con quale energia massima.

-

7) Un fotone di frequenza $\omega = 3 \times 10^{22}\ sec^{-1}$ viene deflesso a 30^o da un elettrone libero fermo. Calcolare l'energia del fotone diffuso ed il momento finale dell'elettrone. ($\hbar = 1.054571800(13) \times 10^{-34}\ j\ sec$, $c = 299792458\ m/sec$, $m_e = 9.10938356(11) \times 10^{-31}$)

-

8) Ricordando che la Lagrangiana per la particella libera relativistica è data da $L_0 = -m\ c^2\ \sqrt{1-\beta^2}$, scrivere la Lagrangiana per un oscillatore armonico relativistico monodimensionale, derivare il momento coniugato e , effettuando una trasformazione di Legendre, calcolare l'Hamiltoniana. Stabilire se questa quantità si conservata e qual è in suo significato fisico.

-