Fisica Matematica - a.a. 2014-15

20/4/2016

Nome Cognome Matricola:

1) Si consideri il sistema di equazioni del primo ordine

$$\dot{x} = y, \dot{y} = -\eta\, y - ax + bx^3, \quad 0 < b < a$$

determinando i punti di equilibrio, il loro carattere e si traccino le traiettorie attorno a detti punti nel piano delle fasi

-

2) Un triangolo rettangolo ABC, di massa M, può scivolare senza attrito lungo il cateto AB, poggiato su una guida orizzontale. Sull'ipotenusa AC si muove senza attrito una massa m. Si scriva la Lagrangiana del sistema e si determinino le costanti del moto. Come si scriverebbero le equazioni del moto se esistessero degli attriti radenti tra cateto e guida e tra massa e ipotenusa?

- -

3) Due masse uguali possono scorrere senza attrito lungo due guide rettilinee che formano un angolo $0 < \alpha < \pi/2$ con la retta verticale, in ciascuno dei semi-piani. Sulle particelle agisce la gravità , verso il basso, ed una forza di richiamo elastica lungo la loro congiungente. Si dimostri che il sistema ha una sola configurazione di equilibrio stabile e si calcolino le piccole oscillazioni attorno ad essa.

- -

4) Si consideri l'Hamiltoniana

$$H = \frac{A^2}{2 - \cos^2 \phi} \left(p_x^2 - 2B p_x \, p_\phi \, \cos \phi + \lambda^2 \, p_\phi^2 \right) - \mu \cos \phi + \tfrac{1}{2} \, k \, x^2, \tag{1}$$

dove tutte le costanti presenti sono da intendersi positive.

Trovare la condizione tra le costanti affinchè il primo termine sia una energia cinetica ben definita. Determinare le posizioni degli equilibri e la loro stabilità . Attorno alla posizione di equilibrio stabile determinare le frequenze dei modi normali e i corrispondenti autovettori.

- -

5) Un satellite orbitante attorno alla Terra, una volta giunto al perigeo subisce una accelerazione radiale dovuta ad una forza impulsiva. Il momento radiale viene incrementato di un impulso π. Determinare di quanto cambiano il momento angolare totale, l'energia meccanica totale ed il vettore di Runge-Lenz.

- -

6) Calcolare l'energia cinetica di una sfera omogenea di densità di massa ρ e raggio R che rotola, senza strisciare, su un piano orizzontale, con velocità di traslazione del baricentro pari a v.

-

7) Mostrare che la trasformazione

$$p = m\omega q \, \cot Q, \qquad q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q$$

è canonica.

-