Introduzione alla Fisica Moderna - a.a. 2015-16

7/9/2016

Nome Cognome Matricola:

1) Si consideri il sistema di equazioni del primo ordine

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -\eta\, y - \sin x,$$

determinando i punti di equilibrio, il loro carattere e si traccino le traiettorie attorno a detti punti nel piano delle fasi

- Imponendo $\dot{x} = \dot{y} = 0$ e data dalla periodicità del campo vettoriale si trovano infiniti punti di equilibrio, che si raccolgono in due classi con rappresentativi $\mathbf{e_1} = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ e $\mathbf{e_2} = (\pi, \mathbf{0})$. La linearizzazione del sistema attorno a questi punti di equilibrio è fornita dalle matrici e dai rispettivi autovalori $L_{\mathbf{e_1}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\eta \end{pmatrix}$, $\left\{\frac{1}{2}\left(-\eta - \sqrt{\eta^2 - 4}\right), \frac{1}{2}\left(\sqrt{\eta^2 - 4} - \eta\right)\right\}$ e $L_{\mathbf{e_2}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \eta \end{pmatrix}$, $\left\{\frac{1}{2}\left(-\eta - \sqrt{\eta^2 + 4}\right), \frac{1}{2}\left(\sqrt{\eta^2 + 4} - \eta\right)\right\}$. Gli autovalori di $L_{\mathbf{e_2}}$ sono reali e di segno opposto per ogni valore del parametro η, quindi $\mathbf{e_2}$ è sempre un punto sella instabile (Fig. 1). Invece gli autovalori di $L_{\mathbf{e_1}}$ sono reali per $|\eta| > 2$ e complessi coniugati altrimenti. Le parti reali hanno sempre il segno opposto di η (Fig 2). Pertanto per $\eta \leq -2$ il punto $\mathbf{e_1}$ è un nodo instabile, per $-2 < \eta < 0$ si ha un fuoco instabile, per $\eta = 0$ un centro, per $0 < \eta < 2$ un fuoco stabile, per $2 < \eta$ un nodo instabile.

2) Un triangolo rettangolo ABC, di massa M, può scivolare senza attrito lungo il cateto AB, poggiato su una guida orizzontale. Sull'ipotenusa AC si muove senza attrito una massa m. Si scriva la Lagrangiana del sistema e si determinino le costanti del moto. Come si scriverebbero le equazioni del moto se esistessero degli attriti radenti tra cateto e guida e tra massa e ipotenusa?

- (Fig. 3)

$$\mathcal{L} = -gm\sin(\alpha)\mathrm{s}(t) + \frac{1}{2}m\left(2\cos(\alpha)\mathrm{s}'(t)\mathrm{x}'(t) + \mathrm{s}'(t)^2 + \mathrm{x}'(t)^2\right) + \frac{1}{2}\mathrm{M}\mathrm{x}'(t)^2$$

Poiché $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = 0$ la componente orizzontale del momento è costante del moto e vale

$$(m+\mathrm{M})\mathrm{x}'(t) + m\cos(\alpha)\mathrm{s}'(t) = P_{or}.$$

Inoltre, poiché la Lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo, si conserva l'energia totale

$$E = \frac{1}{2}\left(2\cos(\alpha)ms'(t)x'(t) + (m+M)x'(t)^2 + ms'(t)^2\right) + gm\sin(\alpha)s(t)$$

Se sono presenti delle forze generalizzate di tipo attrito $Q_x = -(M+m)\,g\mu_2$ e $Q_s = -mg\mu_1\cos(\alpha)$, allora le equazioni del moto si scrivono nella forma

$$\cos(\alpha)ms''(t) + (m+M)x''(t) = -(M+m)\,g\mu_2,$$
$$m\left(\cos(\alpha)x''(t) + g\sin(\alpha) + s''(t)\right) = -mg\mu_1\cos(\alpha).$$

3) Due masse uguali possono scorrere senza attrito lungo due guide rettilinee giacciono nello stesso piano, formando un angolo $0 < \alpha < \pi/2$ con una retta verticale nei semipiani opposti da questa definita. Sulle particelle agisce la gravità , verso il basso, ed una forza di richiamo elastica lungo la loro congiungente. Si dimostri che il sistema ha una sola configurazione di equilibrio stabile e si calcolino le piccole oscillazioni attorno ad essa.

- (Fig. 4) Assumiamo come coordinate generalizzate le ascisse curvilinee s_1 e s_2 lungo le due rette orientate verso il basso. Le posizioni rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano avente l'origine del punto di intersezione delle due rette con l'asse verticale saranno $P_1 = -s1\,(\sin(\alpha), \cos(\alpha))$ e $P_2 = s2\,(\sin(\alpha), -\cos(\alpha))$.
L'energia cinetica del sistema è $T = \frac{m}{2}\left(\dot{s}_1^2 + \dot{s}_2^2\right)$.
La distanza tra le particelle è $\ell = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 - 2s_1s_2\cos(2\alpha)}$. Pertanto l'energia potenziale del sistema è $U = -mg\cos(\alpha)\,(s_1+s_2) + \frac{k}{2}\ell^2$.
La posizione di equilibrio si ottiene dal sistema di equazioni $\frac{\partial U}{\partial s_1} = \frac{\partial U}{\partial s_2} = 0$, che porta alla soluzione $s_{1,0} = s_{2,0} = \frac{\cos(\alpha)gm}{(1-\cos(2\alpha))k}$. Eseguendo il cambiamento di variabile $s_1 = t_1 + s_{1,0},\ \ s_2 = t_2 + s_{2,0}$, il potenziale diventa la forma quadratica $U = U_0 + k\left(-\cos(2\alpha)t_1t_2 + \frac{t_1^2}{2} + \frac{t_2^2}{2}\right)$. Procedendo come al solito nel calcolo degli autovalori della matrice hessiana del potenziale rispetto a quella dell'energia cinetica, si ottengono le frequenze normali $\omega \in \left\{\sqrt{\frac{(\cos(2\alpha)+1)k}{m}}, \sqrt{\frac{(1-\cos(2\alpha))k}{m}}\right\} = \sqrt{\frac{2k}{m}}\,\{\cos(\alpha), \sin(\alpha)\}$

4) Un satellite orbitante attorno alla Terra, una volta giunto al perigeo subisce una accelerazione radiale dovuta ad una forza impulsiva. Il momento radiale viene incrementato di un impulso P_0. Determinare di quanto cambiano il momento angolare totale, l'energia meccanica totale ed il vettore di Runge-Lenz. Datene una interpretazione fisica.

- Il momento cambia radialmente secondo $\vec{p} \to \vec{p}\,' = \vec{p} + P_0\hat{r}$, pertanto il momento angolare $\vec{L}' = \vec{r} \times \vec{p}\,' = \vec{L}$ non cambia.
D'altra parte l'energia meccanica $\mathcal{E}' = \frac{(\vec{p}\,')^2}{2m} - \frac{k}{r} = \mathcal{E} + \frac{P_0^2}{2m}$, dove si è tenuto conto dell'ortogonalità tra $\vec{p}$ ed $\hat{r}$ al perigeo.
Infine il vettore di Runge-Lenz $\vec{A}\,' = \vec{p}\,' \times \vec{L}\,' - mk\hat{r} = \vec{A} + P_0\hat{r} \times \vec{L} = \vec{A} - P_0 r\vec{p}$.
Quindi l'energia del satellite aumenta, con un cambio dell'orbita, di nuovo semiasse maggiore $a' = \frac{k}{2|\mathcal{E}'|} \approx a\left(1 + \frac{p_0^2}{2m|\mathcal{E}|}\right)$ ed eccentricità $e' = \sqrt{1 - \left(\frac{2\mathcal{E}'}{A'}\right)^2}$. Inoltre il nuovo semiasse maggiore punterà nella direzione di $\vec{A}\,'$.

5) Mostrare che la trasformazione

$$p = m\omega q\ \cot Q, \qquad q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin Q$$

è canonica.

- Utilizzando la definizione di q nell'espressione di p si ottiene la trasformazione esplicita $q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin Q, \quad p = \sqrt{2m\omega P}\cos Q$. Calcolando ora la parentesi di Poisson di q, p nell'ipotesi che Q, P siano canoniche si ottiene: $\{q,p\} = 2\left\{\sqrt{P}\sin Q, \sqrt{P}\cos Q\right\} = \sin^2 Q + \cos^2 Q = 1$

6) Si determini per quali valori delle costanti α e β il sistema

$$\dot{p}_1 = 0, \quad \dot{p}_2 = 0, \quad \dot{q}_1 = p_1 + p_2, \quad \dot{q}_2 = \alpha\, p_1 - 2\, p_2 + \beta\, q_2^4$$

è hamiltoniano. Si determinino una Hamiltoniana e una corrispondente Lagrangiana. Infine si dica se una funzione della forma $F = q_1 + f(p_1, p_2)\ t$ può essere una costante del moto.

- In primo luogo la condizione di divergenza nulla per campo vettoriale hamiltoniano $\partial_{q_i}\dot{q}_i + \partial_{p_i}\dot{p}_i = 0$ implica $\beta = 0$. dall'equazione $\dot{q}_1 = p_1 + p_2 = \partial_{p_1}H$, si ottiene che deve essere $H = \frac{1}{2}p_1^2 + p_1p_2 + h(p_2)$. Sostituendo nella seconda equazione $\dot{q}_2 = \alpha\ p_1 - 2\ p_2 = \partial_{p_2}\left(\frac{1}{2}p_1^2 + p_1p_2 + h(p_2)\right)$ si ottiene l'equazione per h, precisamente $\partial_{p_2}h(p_2) = (\alpha - 1)p_1 - 2p_2$. Affinché questa equazione sia ben definita deve risultare $\alpha = 1$. Quindi l'Hamiltoniana cercata è $H = \frac{1}{2}p_1^2 + p_1p_2 - p_2^2$
Usando le equazioni di Hamilton, si ottengono le relazioni $p_1 = \frac{2\dot{q}_1 + \dot{q}_2}{3}, \quad p_2 = \frac{\dot{q}_1 - \dot{q}_2}{3}$. Queste espressioni, sostituite nella definizione della lagrangiana $\mathcal{L} = p_i\dot{q}_1 - H$ danno luogo all'espressione $\mathcal{L} = \frac{\dot{q}_1^2}{3} + \frac{1}{3}\dot{q}_2\dot{q}_1 - \frac{\dot{q}_2^2}{6}$. Chiaramente questa espressione non può corrispondere ad un sistema dinamico reale, in quanto la forma quadratica ottenuta non è definita positiva, come dovrebbe accadere per una energia cinetica.
Infine, sapendo che le parentesi di poisson di una costante del moto con l'Hamiltoniana deve essere 0, dal calcolo diretto si trova che $\{F, H\} = p_1 + p_2$, che in generale non è nulla. Quindi F non è una costantedel moto.

7) Un corpo, considerato nero, viene mantenuto alla temperatura costante di $T_c = 2000\ ^oK$. Calcolare la potenza netta emessa dal corpo, sapendo che la sua superficie totale è $A = 0.20\ m^2$. Calcolare la lunghezza d'onda massima di emissione e stabilire se essa è nel visibile.

- La potenza raggiante emessa dal corpo è data dalla legge derivata da quella di Stefan-Boltzmann $P = A\sigma T^4$, dove $\sigma = 5.7 \times 10^{-8}\ W\ m^{-2}\ K^{-4}$ è la costante di Stefan. I dati conducono al valore di potenza irraggiata $P = 0.18 \times 10^6\ W$. Per quanto riguarda la lunghezza d'onda di picco si utilizza la legge dello spostamento di Wien, che conduce al valore $\lambda_{max} = 0.0029\ m\ K/2000K = 1.45 \times 10^{-6}m$.

8) Nel sistema di riferimento del laboratorio una particella di massa a riposo m_1 collide con velocità $v\,\hat{x}$ su un'altra particella ferma di massa m_2. Calcolare le componenti del quadrimomento totale e il suo modulo.

E' possibile trovare un sistema di riferimento nel quale annullare tutte le componenti spaziali del quadrimomento? E se si, quale deve essere la trasformazione di Lorentz da applicare?

- -

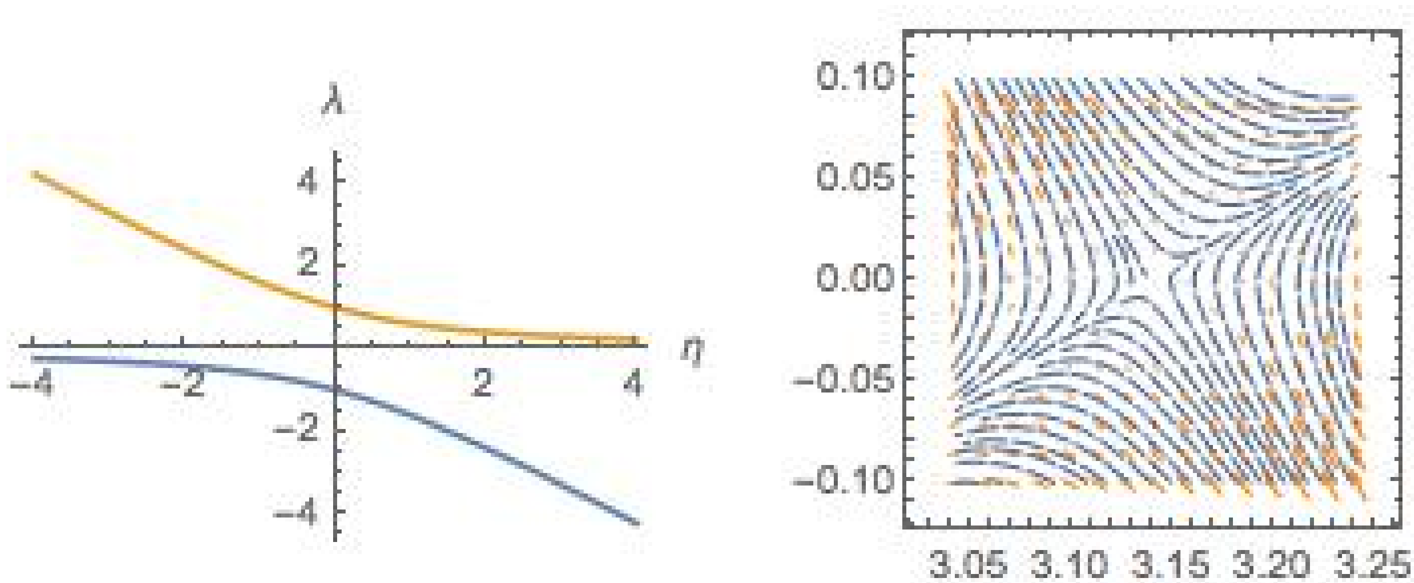

Figure 1: Esercizio 1): Autovalori della matrice linearizzante attorno al punto $\mathbf{e_2}$ in funzione di η e comportamento del campo vettoriale attorno ad esso per $\eta = 1.0$.

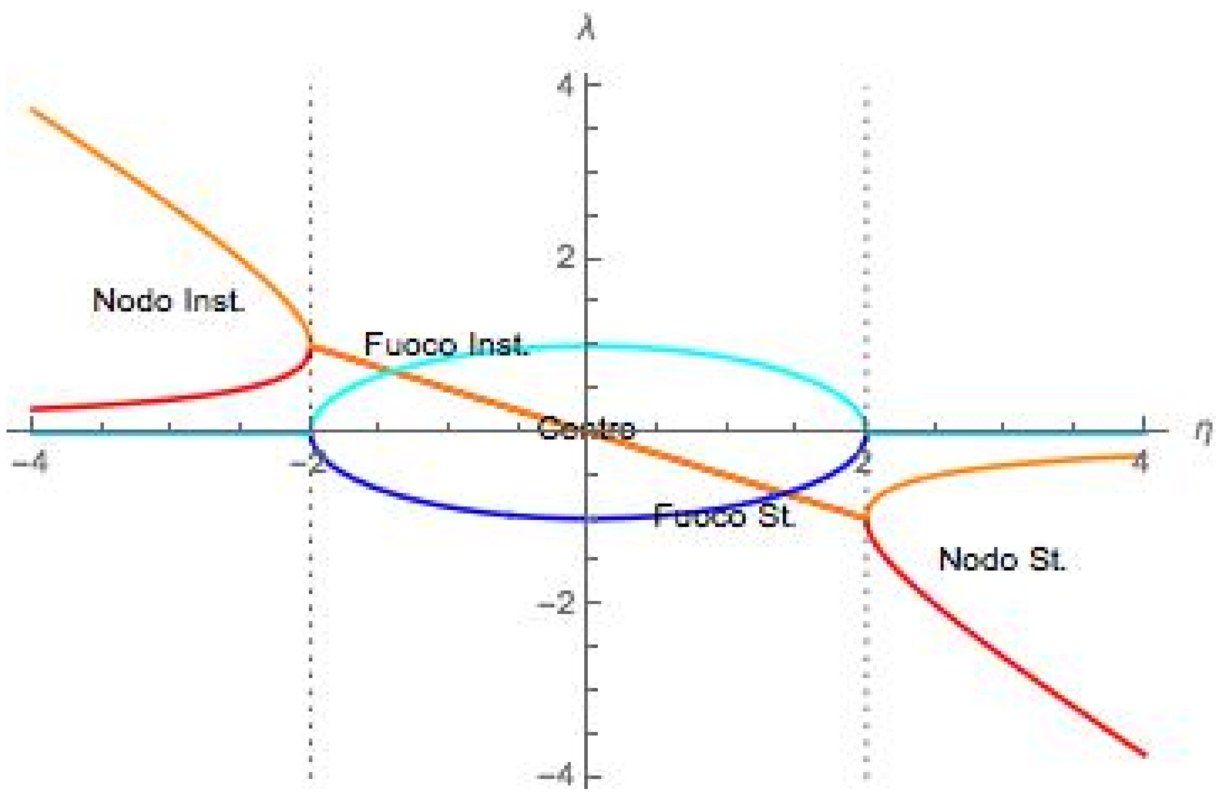

Figure 2: Esercizio 1): Autovalori della matrice linearizzante attorno al punto $\mathbf{e_1}$ in funzione di η .

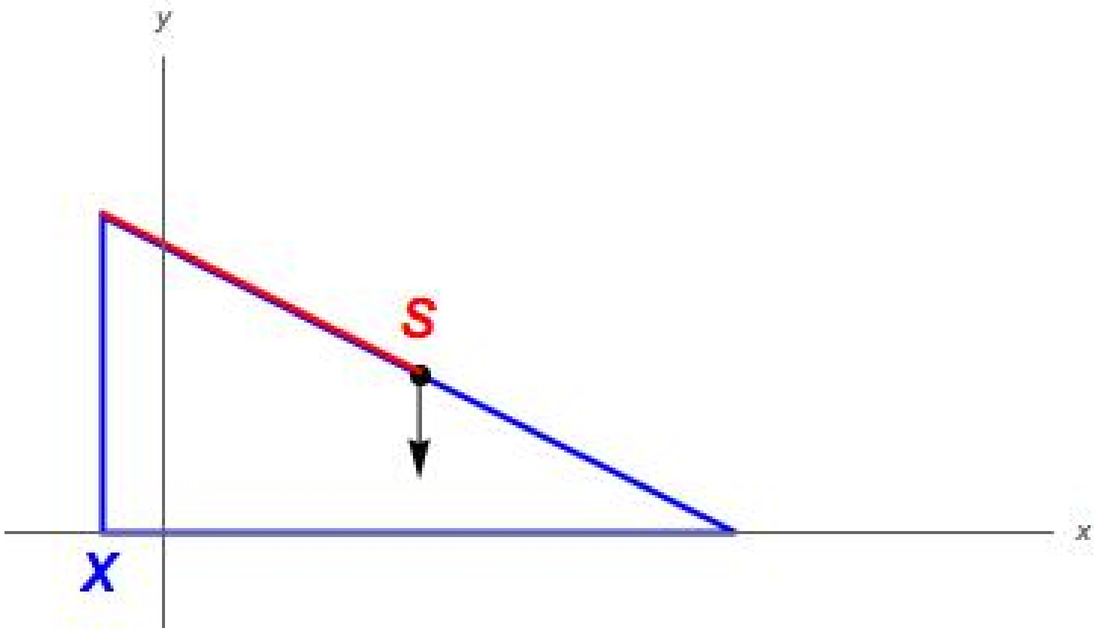

Figure 3: Esercizio 2):

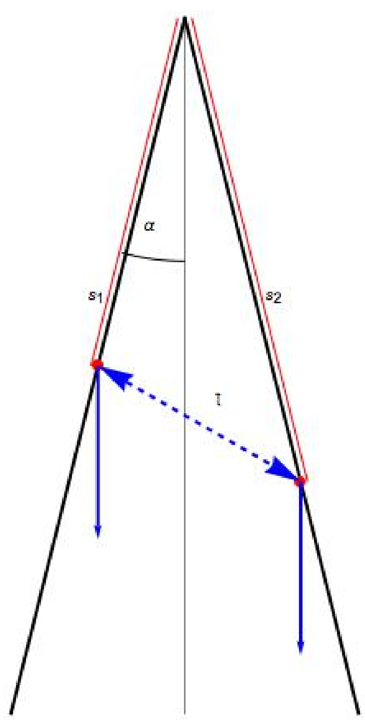

Figure 4: Esercizio 3):