Introduzione alla Fisica Moderna - a.a. 2015-16

30/6/2016

MATR.
COGNOME NOME

1) Si consideri l'oscillatore armonico smorzato $\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -\omega^2\, x - 2\mu\, v, \quad \mu > 0.$
Dire quale delle due funzioni due funzioni $E = \frac{1}{2}\left(v^2 + \omega^2 x^2\right)$ ed $F = \frac{1}{2}\left[\left(\omega^2 + 2\mu^2\right) x^2 + 2\mu v x + v^2\right].$ descriva sia la stabilità dell'origine che la sua stabilità asintotica.

- L'origine $(0,0)$ è chiaramente un punto di equilibrio per il sistema. Calcolando le derivate temporali di E e di F si ottiene rispettivamente $\dot{E} = -2\mu v^2$ e $\dot{F} = -2\mu\left(v^2 + \omega^2 x^2\right)$. Entrambe sono ≤ 0 nel piano, ma $\dot{E}$ si annulla anche lungo tutto l'asse $(x, 0)$, quindi garantisce la stabilità ma non quella asintotica, che richiede che la derivata della funzione di Ljapunov scelta sia < 0 in tutti i punti di un intorno dell'equilibrio, eccetto solo quel punto. Tale condizione è invece soddisfatta dalla funzione F.

2) Si scriva l'energia cinetica di un punto materiale di massa m, che è vincolato a ruotare uniformemente attorno ad un asse fisso, con velocità angolare ω.

- In un sistema inerziale l'energia cinetica è $T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$. A causa del vincolo queste coordinate possono essere espresse nella forma $x = r\cos\omega t, y = r\sin\omega t$. Le corrispondenti velocità sono $\dot{x} = \dot{r}\cos\omega t - \omega r\sin\omega t, \dot{y} = \dot{r}\sin\omega t + \omega r\cos\omega t$. Quindi $T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \omega^2 r^2\right)$.

3) Un sistema meccanico, costituito da due punti materiali interagenti con una forza di potenziale $V\left((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2, (z_1 - z_2)^2\right)$. Scrivere la Lagrangiana e determinare le eventuali quantità conservate.

- La lagrangiana del sistema è $L = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2\right) + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2\right) - V\left((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2, (z_1 - z_2)^2\right)$. Per il Teorema di Nöther le leggi di conservazione sono in corrispondenza con le trasformazioni continue che lasciano invariante la lagrangiana. Poiché la lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo, si conserva l'energia totale, che è $E = \sum\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i}\dot{y}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i}\dot{z}_i\right) - L = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2\right) + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2\right) + V\left((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2, (z_1 - z_2)^2\right)$. In secondo luogo essa è invariante per traslazioni lungo i tre assi del tipo $x_i' = x_i + \epsilon$. Pertanto si conservano le componenti dei momenti lineari $P_x = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\frac{\partial x_i'}{\partial \epsilon}|_{\epsilon=0} = m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2$ e in maniera simile per le altre componenti. Poi è invariante per rotazioni attorno all'asse z, in quanto il potenziale dipende dalla distanza da quell'asse. Questo si può verificare effettuando la rotazione nel piano x, y data da $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Quindi si conserva la terza componente del momento angolare $L_z = \sum\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\frac{\partial x_i'}{\partial \phi}|_{\phi=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i}\frac{\partial y_i'}{\partial \phi}|_{\phi=0}\right] = \sum m_i\left(\dot{x}_i y_i - \dot{y}_i x_i\right)$

4) Scrivere l'Hamiltoniana per un sistema di due punti materiali interagenti gravitazionalmente.

- - $H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} - G\frac{m_1 m_2}{|\vec{q}_1 - \vec{q}_2|}$

5) Una sistema è definito dall'Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m}\left[p_1^2 + p_2^2 + e^2\left(f\left(x_1\right)^2 + B^2 x_1^2\right) - 2e\left(f\left(x_1\right)p_1 + Bx_1 p_2\right)\right],$$

dove e è una costante e $f\left(x_1\right)$ è una data funzione. Dimostrare che la funzione $G = x_1 p_2 - x_2 p_1 + \frac{eB}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right) + ef\left(x_1\right)x_2$ è una costante del moto.

- - Si può procedere con il calcolo della parentesi di Poisson $\{G, H\}$, dal quale si ottiene $\{G, H\} = 0$. Tuttavia si può riconoscere nelle espressioni di H e G che esse si possono semplificare ponendo i momenti canonici nella forma $p_1' = p_1 + ef\left(x_1\right), p_2' = p_2 + eBx_1$. Questa è una trasformazione canonica, come si verifica facilmente. Ma questo equivale anche ad avere un potenziale vettore della forma $\{f\left(x_1\right), Bx_1, 0\}$, al quale corrisponde sempre lo stesso campo magnetico $\{0, 0, B\}$. Quindi H e G sono l'hamiltoniana e il momento angolare, in una particolare scelta di gauge per il potenziale elettromagnetico, per una particella carica in un campo magnetico uniforme diretto nella direzione ortogonale al piano x_1, x_2.

6) Si verifichi che la trasformazione $P = q\ cotg\ p, \quad q = e^{-Q}\sin p$ è canonica. Verificare che la funzione $F = e^{-Q}\cos p$ è una sua funzione generatrice. Si calcoli l'hamiltoniana trasformata di $H = \frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}\exp\left(-Q\right)$ e si scrivano le equazioni del moto in queste coordinate.

- -

7) Un corpo, considerato nero, viene mantenuto alla temperatura costante di $T_c = 5000\ {}^oK$. Calcolare la potenza netta emessa dal corpo, sapendo che la sua superficie totale è $A = 0.150\ m^2$. Calcolare la lunghezza d'onda massima di emissione e stabilire se essa è nel visibile.

- -

8) Nel sistema di riferimento del laboratorio una particella di massa a riposo m_1 collide con velocità $v_1\,\hat{x}$ su un'altra particella, di massa m_2 che si muove in verso opposto alla velocità $-v_2\,\hat{x}$. Calcolare le componenti del quadrimomento totale e il suo modulo.

- -