Introduzione alla Fisica Moderna - a.a. 2015-16

6/6/2016

1) Si consideri il sistema dinamico ad 1 grado di libertà

$$\dot{x} = y - xy, \qquad \dot{y} = \mu\left(1 - x^2\right) y - x, \quad 0 < \mu \tag{1}$$

determinando i punti di equilibrio, il loro carattere e si traccino le traiettorie attorno a detti punti nel piano delle fasi

- Imponendo $\dot{x} = \dot{y} = 0$ si ottiene come unica soluzione $\mathbf{O} = (x = 0, y = 0)$. Calcolando la matrice $\frac{\dot{x},\dot{y}}{x,y}|_{\mathbf{O}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$, si ottengono come autovalori $\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left(\mu - \sqrt{\mu^2 - 4}\right)$. Per la condizione $0 < \mu$, si ha che $\Re\left(\lambda_\pm\right) > 0$, quindi il punto è di equilibrio instabile ed è un nodo. Le traiettorie nello spazio delle fasi sono rappresentate in Figura 1. Poiché il sistema è non lineare, il comportamento per grandi valori di x, y è piuttosto complesso.

2) Usando la funzione $F = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$ trovare per quale insieme di valori del parametro μ il sistema (1) è asintoticamente stabile in $(0, 0)$.

- Per il teorema di Lyapunov, affinché un punto di equilibrio $\vec{x}^*$ di un sistema $\dot{\vec{x}} = \vec{f}\left(\vec{x}\right)$ sia asintoticamente stabile, è necessario che esso sia il minimo di una funzione G e che la derivata di Lie lungo il moto $L_f G < 0$ in un intorno di $\vec{x}^*$, privato di tale punto. Chiaramente $\mathbf{O}$ è un punto di minimo per la funzione F data sopra e, inoltre, $L_f F = \partial_x F f_x + \partial_y F f_y = -y\left(\mu\left(x^2 - 1\right) y + x^2\right)$. Ponendo $y = a\, x$, dove $a \in \mathbb{R}$, si ottiene $L_f F = a^2\mu x^2 - a x^3 - a^2 \mu x^4$, che indica che per x sufficientemente piccoli $\mathbf{O}$ è asintoticamente stabile solo per $\mu < 0$. Nel caso studiato $\mu > 0$ sappiamo già che il punto è instabile. Va tuttavia notato che per x sufficientemente grandi e per opportune direzioni $\phi = \arctan a$ si ha un cambio di segno in $L_f F$, denotando un cambio delle caratteristiche qualitative del moto.

3) Verificare che il sistema (1) non è hamiltoniano.

- E' sufficiente verificare che la divergenza del campo vettoriale definiti in (1) non è nulla, infatti $\frac{d\dot{x}}{d\,x} + \frac{d\dot{y}}{d\,y} = \mu\left(1 - x^2\right) - y \neq 0$. Quindi il volume dello spazio delle fasi non si conserva durante la dinamica, che una prprità caratteristica dei sistemi hamiltoniani.

4) Si scriva l'Hamiltoniana per un sistema di due masse uguali m, che possono scorrere senza attrito lungo due guide rettilinee lisce formanti un angolo $0 < \alpha < \pi/2$ nel piano ortogonale. Tra le masse agisce una forza di richiamo elastica lungo la loro congiungente. Si trovi la configurazione di equilibrio stabile.

- -

4) Dimostrare che per una forza centrale di tipo $\vec{F} = -k\,\hat{r}/r$ esiste una grandezza vettoriale conservata della forma $\vec{A} = \vec{p} \times \mathbb{L} + b\hat{r}$ e determinare b.

- -

5) Usando la funzione $F = \frac{1}{2}\omega\, q^2\, \cot\phi$ calcolare la trasformazione canonica $(q, p) \to (\phi, J)$ (coordinate angolo - azione) per l'oscillatore armonico e scrivere nelle nuove coordinate l'hamiltoniana dell'oscillatore armonico $H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2$.

- -

6) Si determini per quali valori delle costanti A, B, α e β il sistema

$$\dot{p}_1 = Aq_1, \quad \dot{p}_2 = Bq_2, \quad \dot{q}_1 = p_1 + p_2, \quad \dot{q}_2 = \alpha\, p_1 - 2\, p_2 + \beta\, q_2^3$$

è hamiltoniano. Si determinino una Hamiltoniana e una corrispondente Lagrangiana.

-

7) Un corpo, considerato nero, viene mantenuto alla temperatura costante di $T_c = 2000\ {}^oK$. Calcolare la potenza netta emessa dal corpo, sapendo che la sua superficie totale è $A = 0.20\ m^2$. Calcolare la lunghezza d'onda massima di emissione e stabilire se essa è nel visibile.

- -

8) Nel sistema di riferimento del laboratorio una particella di massa a riposo m_1 collide con velocità $v\ \hat{x}$ su un'altra particella ferma di massa m_2. Calcolare le componenti del quadrimomento totale e il suo modulo.

- -