Introduzione alla Fisica Moderna - a.a. 2016-17

12/02/2018

Nome Cognome Matricola:

1) Si consideri il sistema dinamico ad 1 grado di libertà

$$\dot{x} = y - xy, \qquad \dot{y} = \mu\left(1 - x^2\right) y - x, \quad 0 < \mu \tag{1}$$

determinando i punti di equilibrio, il loro carattere di stabilità in funzione del parametro μ. Si traccino le traiettorie attorno a detti punti nel piano delle fasi. Dire se il sistema sia hamiltoniano.

- Ponendo a 0 le componenti del campo vettoriale, si trova che esiste un solo punto di equilibrio e che esso è $O = (0,0)$. Il differenziale del campo vettoriale nel in O è $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$, gli autovalori del quale sono $\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left(\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}\right)$. Per la limitazione ipotizzata su μ, è chiare che $\Re\left(\lambda_\pm\right) \geq 0$, quindi O è sempre instabile. Si distinguerà il caso $\mu > 2$, nel quale si avrà un nodo instabile, dal caso $0 < \mu < 2$, che darà luogo ad un fuoco instabile. Le linee di flusso attorno ad O sono tracciate in Figura 1.
Poiché Div del campo vettoriale è pari a $m\left(1 - x^2\right) - y \neq 0$, il flusso non è hamiltoniano.

2) Si scriva la Lagrangiana del sistema riportato in figura 1, si scrivano le equazioni del moto e si determinino eventuali costanti del moto.

- Come coordinate generalizzate si possono assumere la coordinata X dell'estremo C e l'angolo θ che forma la semiretta congiungente il centro della circonferenza con la posizione del punto materiale. Chiamando $R = |BC| = |AB|$, le coordinate cartesiane del punto materiale sono $x = X - R\sin\theta,\ y = R\left(1 - \cos\theta\right)$. Si assume che $\pi \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi$.
L'energia cinetica complessiva è $T = \frac{1}{2}\left((m+M)X'^2 + mR^2\theta'^2 - 2mR\cos(\theta)\theta'\, X'\right)$.
L'energia potenziale è $U = mgR\left(1 - \cos\theta\right)$. Quindi la Lagrangiana è $L = T - U$.
Le equazioni di Lagrange sono

$$\theta'' - \frac{\cos(\theta)X''}{R} = -\omega^2\sin(\theta),$$
$$-\frac{(m+M)X''}{mR} + \theta''\cos(\theta) - \theta'^2\sin(\theta) = 0$$

Poiché le forze sono conservative, certamente si conserva l'energia totale $E = T + U$

3) Una particella di massa m è sottoposta all'azione del potenziale unidimensionale

$$V\left(x\right) = \frac{k^2}{16}\left(x^2 - 1\right)^2\left(x^2 + 1\right).$$

Determinare i punti di equilibrio stabile, le frequenze di oscillazione nel limite delle piccole oscillazioni. Determinare il valore di energia E_s che corrisponde alla separatrice dei moti. Trovare il comportamento dei moti intorno al punto di equilibrio instabile. Scrivere il periodo di un'orbita generica di energia $E > E_s$. Determinare una espressione approssimata del periodo per $E \to \infty$.

- Ponendo a 0 la derivata prima del potenziale $V' = \frac{1}{8}k^2 x\left(3x^4 - 2x^2 - 1\right) = 0$ si ottengono 5 soluzioni, ma due di esse sono complesse. Pertanto i punti di equilibrio per il potenziale sono $\{0, \pm 1\}$. Per studiarne il carattere si calcola la derivata seconda in tali punti, ottenendo $\partial_x V|_{\pm 1} = k^2$ e $\partial_x V|_0 = -\frac{k^2}{8}$. Quindi 0 è un massimo e quindi punto di equilibrio instabile, mentre ± 1 sono punti di equilibrio stabile.
Poiché attorno ad un punto di equilibrio stabile ± 1 il potenziale assume la forma $V \approx \frac{1}{2}k^2\left(x - x_e\right)^2$, la frequenza corrispondente è della forma $\omega = \frac{k}{\sqrt{m}}$.
L'energia corrispondente alla traiettoria separatrice si ottiene calcolando direttamente il valore del potenziale nel punto di massimo locale =, poiché in quel punto l'energia cinetica deve essere nulla. Si ottiene $E_s = V\left(0\right) = \frac{k^2}{16}$.
Il moto attorno a tale punto si ottiene sviluppando in serie il potenziale, precisamente $V = \frac{k^2}{16} - \frac{k^2\, x^2}{16} + O\left(x^3\right)$. Le equazioni del moto che ne derivano sono lineari, data la forza repulsiva $-\partial_x V|0 = \frac{k^2\, x}{8}$. Quindi i moti saranno esponenzialmente divergenti (convergenti), con legge oraria della forma $\exp\left[\pm\frac{k}{2\sqrt{2m}}t\right]$.
Data la forma simmetrica del potenziale il periodo ha la formula generica $T\left(E\right) = 4\int_0^{X(E)} \frac{dx}{\sqrt{2(E - V(x))}}$, dove gli estremi sono determinati dall'equazione $V\left(X\left(E\right)\right) = E$.
Nel caso in esame, supponendo ce l'energia sia molto grande, il potenziale lequazione precedente si approssima in $\frac{k^2\, X}{16} = E$, la cui soluzione d'interesse è $X\left(E\right) = \frac{4}{k}^{1/3} E^{1/6}$. Approssimando il potenziale con un pozzo rettangolare di profondità nulla, l'integrale precedente si può stimare nella forma $T\left(E\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2E}} X\left(E\right) = \frac{4}{k}^{1/3} \frac{1}{\sqrt{2E}} E^{1/6} = 4\left(\frac{2^{1/2}}{k\, E}\right)^{1/3}$.

4) Scrivere la lagrangiana per una particella carica q e di massa m, che è sottoposta all'azione di un campo magnetico uniforme $\vec{B} = B\,\hat{z}$. Trovare i momenti coniugati e scrivere la corrispondente Hamiltoniana supponendo di usare la gauge simmetrica per scrivere il potenziale vettore $\vec{A}$. Ripetere che cambiando gauge in modo che il nuovo potenziale sia $\vec{A}' = \left(f\left(x\right), B\, x, 0\right)$, trovando la trasformazione canonica che collega le due Hamiltoniane.

-

5) Una sorgente puntiforme monocromatica emette la potenza $P_o = 1W$ alla lunghezza d'onda $\lambda = 589\ nm$. Quanto vale il flusso di fotoni alla distanza $\ell = 1.00\,m$ dalla sorgente?

Il Flusso di energia e.m. è dato da $\mathcal{I} = \frac{P_o}{4\,\pi\,\ell^2}$. D'altra parte il quanto di energia associato alla data lunghezza d'onda è $E = \frac{c\,h}{\lambda}$. Quindi il flusso di fotoni sulla superficie considerata è $\mathcal{N} = \frac{\mathcal{I}}{E} = \frac{P_o\,\lambda}{4\,\pi\,\ell^2\,c\,h} = 2.36 \times 10^{17}\,m^{-2}\,sec^{-1}$.

6) Sapendo che la frequenza di soglia dell'effetto fotoelettrico sul sodio è $\nu_0 = 5.6 \times 10^{14}\ Hz$, dire quale corrente può essere fotoemessa dalla luce solare su un catodo di sodio di area unitaria, posto ortogonalmente alla direzione del Sole al di fuori dell'atmosfera. Si ricordi che la costante solare vale 1367 W/m^2 e che la sua temperatura superficiale è 5777 ^oK.

-

7) Un fotone di frequenza $\omega = 3 \times 10^{22}\ sec^{-1}$ viene deflesso a 45^o da un elettrone libero fermo. Calcolare l'energia del fotone diffuso ed il momento finale dell'elettrone. ($\hbar = 1.054571800(13) \times 10^{-34}\ j\ sec$, $c = 299792458\ m/sec$, $m_e = 9.10938356(11) \times 10^{-31}$)

-

8) Nel sistema di riferimento del laboratorio una particella di massa a riposo m_1 collide con velocità $v\ \hat{x}$ su un'altra particella ferma di massa m_2. Calcolare le componenti del quadrimomento totale e il suo modulo. Trovare il sistema di riferimento nel quale si annullano tutte le componenti spaziali del quadrimomento. Quanto vale l'energia in questo sistema?