Introduzione alla Fisica Moderna - a.a. 2014-15

20/4/2016

Nome Cognome Matricola:

1) Una particella di massa m è vincolata a muoversi in un piano, sotto l'azione di una forza di attrazione verso l'origine degli assi, proporzionale alla lunghezza del raggio vettore, e di un'altra forza diretta perpendicolarmente al raggio vettore ed opposta alla direzione del moto, che è inversamente proporzionale alla distanza dall'origine. Stabilire se e quali di queste forze derivano da un potenziale e scrivere le equazioni di Lagrange del moto.

- In coordinate polari nel piano (r, θ) le forze esterne assumono la forma $\vec{F}_1 = -kr\hat{r}$ e $\vec{F}_2 = -\operatorname{sign}\left[\vec{v} \cdot \hat{\theta}\right] \frac{A}{r}\ \hat{\theta}$ con $A > 0$. $\vec{F}_1$ è conservativa, $\vec{F}_2$ no. La lagrangina include il potenziale della forza conservativa $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2\right) - \frac{1}{2}kr^2$. La forza generalizzata associata a $\vec{F}_2$ è $Q_r = \vec{F}_2 \cdot \frac{\partial\,\vec{r}}{\partial\,r} = 0$, $Q_\theta = \vec{F}_2 \cdot \frac{\partial\,\vec{r}}{\partial\,\theta} = -A$, supponendo che la velocità non cambi verso. Pertanto le equazioni del moto sono

$$m\ddot{r} + kr = m\,r\,\dot{\theta}^2, \qquad mr\left(2\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta}\right) = -A$$

2) Si consideri un sistema ad un solo grado di libertà sottoposto all'azione del potenziale

$$V = -\left(M_1 Rg \sin\alpha\right)\,\theta - M_2 Rg\cos\theta,$$

dove tutte le costanti sono positive. Determinare: a) la condizione tra le costanti in modo tale esistano punti di equilibrio; b) il valore dei punti di equilibrio e la loro stabilità, c) tracciare nel piano delle fasi $\left(\theta, \dot{\theta}\right)$ il ritratto dei possibili moti.

a) Dalla condizione di estremo $\frac{d\,V}{d\,\theta} = 0$ si ottiene che deve essere $|\frac{M_1}{M_2}\ \sin\alpha| \leq 1$.
b) Soddisfatta la a) , le posizioni di equilibrio sono $\theta_\pm = \pm\arcsin\left(-\frac{M_1}{M_2}\ \sin\alpha\right) + 2n\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$. Dalla relazione $\frac{d^2\,V}{d\,\theta^2}|_{\theta=\theta_\pm} = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{M_1}{M_2}\ \sin\alpha\right)^2}$, tutti i punti θ_+ sono stablili e i θ_- instabili.

3) Si consideri il sistema Hamiltoniano descritto da

$$H = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} p_i^2 + \frac{g^2}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j\neq i}^{3}\left(q_i - q_j\right)^{-2},$$

dimostrare che oltre a due integrali del moto elementari (quali ?) ne esiste un terzo della forma $L = \sum_{i=1}^{3} p_i^3 + 3g^2\sum_{i=1}^{3}\sum_{j\neq i}^{3} p_i\left[\left(q_i - q_j\right)^{-2}\right]$.

Poiché il potenziale è espresso da termini che contengono solo le distanze relative delle particelle, si conserva la quantità di moto totale del sistema $P = p_1 + p_2 + p_3$. Poiché l'Hmiltoniana non dipende dal tempo, l'energia totale $E = H$ si conserva. Per verificare che L è un integrale del moto, bisogna calcolare la parentesi di Poisson $\{L,\ H\}$ e verificare che sia 0. Infatti si ha

$$\{H,\ L\} = \tfrac{3}{2} g^2 \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^3 \sum_{j\neq i} p_i \left\{p_k^2,\ \left[(q_i - q_j)^{-2}\right]\right\} - \tfrac{g^2}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j\neq j}^3 \sum_{k=1}^3 \left\{p_k^3,\ (q_i - q_j)^{-2}\right\} - \sum_{i=1}^3 \sum_{j\neq j}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{h\neq k}^3 (q_k - q_h)^{-2} \left\{p_k,\ (q_i - q_j)^{-2}\right\}$$

Tenendo presente la relazione $\{F(p), G(q)\} = -\sum_i \partial_{p_i} F\, \partial_{q_i} G$, le parentesi presenti nelle sommatorie precedenti sono

$$\left\{p_k^2,\ p_i \sum_{j\neq i} (q_i - q_j)^{-2}\right\} = 4 p_i\, p_k \left[\delta_{i\,k} \sum_{i\neq j} (q_i - q_j)^{-3} + (\delta_{i\,k} - 1)\ (q_i - q_k)^{-3}\right],$$

$$\left\{p_k^3,\ (q_i - q_j)^{-2}\right\} = 6 p_k^2\ (q_i - q_j)^{-3} (\delta_{ki} - \delta_{kj}),$$

$$\left\{p_k,\ (q_i - q_j)^{-2}\right\} = 2 (q_i - q_j)^{-3} (\delta_{ki} - \delta_{kj}\}.$$

Pertanto sommando tutti i termini si vede facilmente che i termini in p_k^2 si sommano a 0 tra le due sommatorie, i termini bilineari in $p_k p_i$ si sommano a 0 all'interno della prima sommatoria per effetto della disparità della potenza cubica, mentre i restanti all'interno delle singole sommatorie per l'antilinearità delle loro espressioni.
Si dimostra in questo modo che L è un integrale del moto. Per il Teorema di Liouville il sistema è quindi integrabile.

4) Mostrare che la trasformazione

$$p = m\omega q\ \cot Q, \qquad q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q$$

è canonica.

Per dimostrare la canonicità scriviamo esplicitamente la coppia di coordinate (q, p) in termini delle (Q, P), che supponiamo canoniche, cioé $\{Q, P\} = 1$ e $\{Q, Q\} = \{P, P\} = 0$. La trasformazione esplicita è $q = \sqrt{2} \sin(Q) \sqrt{\frac{P}{mw}}$, $p = \sqrt{2} mw \cos(Q) \sqrt{\frac{P}{mw}}$, dalle quali si ottiene $\{q, p\} = \cos^2 Q + \sin^2 Q = 1$

5) Dato il sistema di oscillatori armonici

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^3 p_i^2 + \frac{g^2}{2} \sum_{i=1}^3 q_i^2 + G^2 \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{j-1} q_i q_j,$$

trovare i modi normali di oscillazione.

Dalle Eq. di Hamilton si ottiene che $\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = -\frac{A}{m}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$ dove $A = \begin{pmatrix} g^2 & G^2 & G^2 \\ G^2 & g^2 & G^2 \\ G^2 & G^2 & g^2 \end{pmatrix}$. La matrice è reale e simmetrica, quindi i suoi autovalori sono reali e valgono $\left\{\omega_1^2 = \frac{g^2-G^2}{m},\ \omega_2^2 = \frac{g^2-G^2}{m},\ \omega_3^2 = \frac{g^2+2G^2}{m}\right\}$. Due di essi coincidono e perché abbiano il significato di velocità angolari deve essere che $g^2 > G^2$. I corrispondenti autovettori, che forniscono le ampiezze relative di q_i in ogni modo sono $\eta_1 = (-1\,,0,1)\,,\quad \eta_2 = (-1\,,1,0)\,,\quad \eta_3 = (1\,,1,1)$.

6) Nel nostro sistema di riferimento una particella viene prodotta all'istante t_0 e decade all'istante t_1 in altre particelle, percorrendo in linea retta un tratto L a velocità costante. a) Quanto vale la vita della particella nel suo sistema di riferimento. b) Supponete che invece la velocità della particella diminuisca con accelerazione costante a.

a) Nel proprio sistema di riferimento la particella è ferma e la distanza tra i due eventi è pari al tempo proprio di decadimento $\Delta\tau$. Pertanto si ha $c^2\ \Delta\tau^2 = \Delta s^2 = c^2\ \Delta t^2 \left[1 - \left(\frac{L}{c\,\Delta t}\right)^2\right] = c^2\ \Delta t^2\left[1-\beta^2\right] = c^2\ \frac{\Delta t^2}{\gamma^2}$, quindi $\Delta\tau = \frac{\Delta t}{\gamma}$, con $\beta = \frac{L}{c(t_1-t_0)}$.
b) In questo caso la particella è in moto accelerato, ma la relazione precedente si può pensare valida ad ogni istante t per un intervallo infinitesimo di tempo dt. pertanto $d\tau = \frac{dt}{\gamma(t)}$. Integrando questa relazione si ottiene $\Delta\tau = \int_{t_0}^{t_1}\frac{dt}{\gamma(t)}$. Poichè il moto è uniformemente accelerato $v = v_0 - a\ t$ con $a > 0$, così il precedente integrale si calcola $\int_0^T \frac{dt}{\gamma(t)} = \frac{(at-\mathrm{v0})\sqrt{\frac{c^2-(\mathrm{v0}-at)^2}{c^2}}+c\sin^{-1}\left(\frac{at-\mathrm{v0}}{c}\right)}{2a}\Big|_0^T = \frac{T}{2\gamma(T)} + \frac{v_0}{2a}\left(\frac{1}{\gamma(0)} - \frac{1}{\gamma(T)}\right) + \frac{c}{2a}\left(\arcsin\beta\left(0\right) - \arcsin\beta\left(T\right)\right)$

7) Si abbia un pendolo semplice microscopico meccanico soggetto alla forza peso e ad una forza dissipativa. Si determini la lunghezza tipica del pendolo affinché le variazioni di energia dovute alla dissipazione siano dell'ordine di 10^{-2} rispetto all'energia totale.

Il pendolo oscilla con pulsazione $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$. La sua energia tipica è dell'ordine di $E \approx m\ g\ \ell$, ma per effetto della dissipazione essa diminuisce, emettendo quanti di energia $\Delta E = \hbar\omega$. Pertanto $10^{-2} = \frac{\Delta E}{E} = \frac{\hbar}{m\sqrt{g\ \ell^3}}$, da cui $\ell = \left(\frac{10^2\hbar}{m\sqrt{g}}\right)^{2/3}$. Se si suppone di muovere una massa atomica $m \approx 10^{-26}$ kg, la lunghezza del pendolo deve essere $\ell \approx 5 \times 10^{-5}$ m.