

Fisica matematica - a.a. 2014-15

29/7/2015

Nome Cognome Matricola

- 1) Un punto materiale P di massa m è vincolato a un'ellisse, giacente nel piano (x, y) verticale con l'asse y verticale ascendente, di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con a, b . P è soggetto alla gravità e a una forza elastica, di costante elastica k , che lo lega all'origine. Con riferimento alla parametrizzazione dell'ellisse $x = a \cos \theta, y = b \sin \theta$, con $0 \leq \theta \leq 2\pi$, si determinino le posizioni di equilibrio e la relativa stabilità.

$$V = V_{grav} + V_{el} = m g b \sin \theta + \frac{k}{2} (a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta)$$

- 2) Con riferimento alla figura, la massa m si muove nel piano orizzontale senza attrito ed è vincolata, da un filo inestensibile, alla massa M sospesa sotto l'azione della forza peso. Si scriva la Lagrangiana del sistema e si determini se esistono variabili ignorabili.

□

- 3) Enunciare il principio dei lavori virtuali.

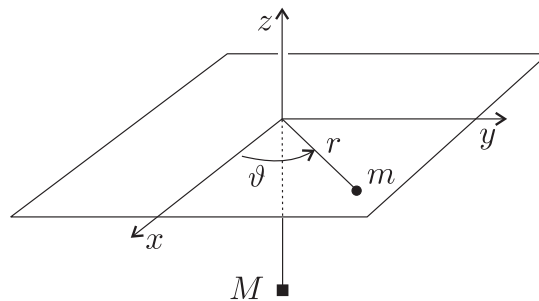


Figure 1:

- 4) Unasta rigida AB di massa m e lunghezza $3l$ 'e libera di ruotare in un piano verticale xy , con asse y verticale ascendente, attorno a un asse fisso passante per il punto O a distanza l da un suo estremo. Un punto materiale P di ugual massa m , libero di scorrere sulla retta dell'asta, 'e legato a O da una forza elastica di costante elastica k . Facendo riferimento alle coordinate lagrangiane $r =$ ascissa di P su AB e $\theta =$ angolo tra asse x e AB . Si calcolino le pulsazioni dei modi normali di oscillazione attorno alle configurazioni di equilibrio stabile per $pk = mg/l$.

- 5) Dare la definizione di tensore d'inerzia per un corpo continuo rispetto ad un sistema d'assi ortogonali $(O, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ e scrivere l'energia cinetica se il corpo ruota attorno ad un ulteriore asse \hat{n} .

- 6) Calcolare la parentesi di Poisson tra loro delle componenti del vettore $\vec{P} = \vec{p} - q \vec{r} \times \vec{B}$, dove $\vec{B} = B \hat{z}$ e con l'Hamiltoniana $H = \frac{1}{2m} \left[(p_x + qB/2y)^2 + (p_x - qB/2x)^2 + p_z^2 \right]$.

- 7) Mostrare per quali valori dei parametri la trasformazione

$$q' = a q, \quad p' = b p$$

è canonica.

- 8) Sia $F(q, p') = (p' + a)^2 (q - b)^2$ una funzione generatrice di trasformazioni canoniche: determinarle esplicitamente.

- *) Arnold fu contemporaneo di Liouville?