Fisica Matematica - a.a. 2014-15

20/4/2016

Nome Cognome Matricola:

1) Si consideri il sistema di equazioni del primo ordine

$$\dot{x} = a\, y, \quad \dot{y} = -\eta^2\, y - ax + bx^3, \quad 0 < b < a$$

determinando i punti di equilibrio, il loro carattere e attorno ad essi si traccino le traiettorie nel piano delle fasi.

-

2) Un triangolo rettangolo ABC, di massa M, poggiato lungo il cateto AB su una guida orizzontale, può scivolare in presenza di attrito radente, vincolata all'ipotenusa AC può scivolare una massa m, ancora in presenza di attrito. Si scriva la Lagrangiana del sistema . Scrivere le equazioni di Lagrange.

L'energia cinetica del sistema è $T = \frac{1}{2}(M+m)\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{s}^2 + 2\cos\alpha\,\dot{x}\,\dot{s}\right)$, dove α è l'angolo acuto alla base del triangolo e s è l'ascissa della massa m misurata sull'ipotenusa. Il potenziale gravitazionale è $V = mg\sin\alpha\, s$, pertanto la Lagrangiana del sistema è $L = \frac{1}{2}(M+m)\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{s}^2 + 2\cos\alpha\,\dot{x}\,\dot{s}\right) - mg\sin\alpha\, s$. Le equazioni del moto sono:

$$\begin{aligned}
(M+m)\,\ddot{x} + m\cos\alpha\,\ddot{s} \quad &= -sign\,(\dot{x})\,\mu_1\,(M+m)\,g, \\
m\,(\ddot{s} + \cos\alpha\,\ddot{x}) + mg\sin\alpha \quad &= -sign\,(\dot{s})\,\mu_2 mg\cos\alpha,
\end{aligned}$$

dove $\mu_{1,2}$ sono i coefficienti di attrito dinamico tra triangolo e guida e tra triangolo e massa vincolata all'ipotenusa, rispettivamente.

3) Scrivere la Lagrangiana di una massa puntiforme vincolata a muoversi nel piano orizzontale, senza attrito , e vincolata da un filo di lunghezza variabile $l = R\alpha$, dove α è l'anomalia della particella rispetto al sistema di riferimento.

- - Fissato il sistema di riferimento nel piano, le coordinate del punto sono $x = R\alpha\cos\alpha, \quad y = R\alpha\sin\alpha$. In tal modo $\ell = \sqrt{x^2+y^2} = R|\alpha|$. La velocità del punto materiale è $\dot{x} = R\dot{\alpha}\,(\cos\alpha - \alpha\sin\alpha)\,, \quad y = R\dot{\alpha}\,(\sin\alpha + \alpha\cos\alpha)$. Quindi la Lagrangiana, coincidente con l'energia cinetica è $L = T = \frac{1}{2}m\left(1+\alpha^2\right)\dot{\alpha}^2$.

4) Si calcoli l'hamiltoniana per un sistema meccanico costituito da un pendolo ha lunghezza ℓ, massa m del quale è inoltre sospesa ad una molla, ha costante elastica k, libera di muoversi orizzontalmente. Si studino i punti di equilibrio, sotto la condizione che $\frac{g}{\ell} < \frac{k}{m}$

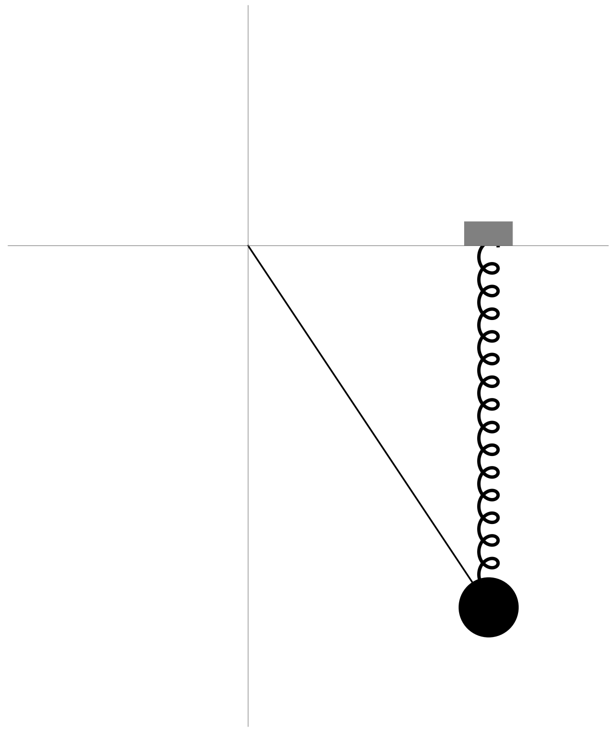

Figure 1:

e si scrivano le equazioni di Hamilton.

- -

5) Dare la definizione di tensore d'inerzia per un corpo continuo rispetto ad un sistema d'assi ortogonali $(O, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ e scrivere l'energia cinetica se il corpo ruota attorno ad un ulteriore asse $\hat{n}$.

- -

6) Calcolare l'energia cinetica di una sfera omogenea di densità di massa ρ e raggio R che rotola, senza strisciare, su un piano orizzontale, con velocità di traslazione del baricentro pari a v.

-

7) Calcolare la parentesi di Poisson tra il vettore $\vec{P} = \vec{p} - \frac{q}{2}\ \vec{r} \times \vec{B}$, dove $\vec{B} = B\ \hat{z}$ e l'Hamiltoniana $H = \frac{1}{2m}\left[(p_x + qB/2\ y)^2 + (p_y - qB/2\ x)^2 + p_z^2\right] + \alpha L_z$, dove L_z è la terza componente del momento angolare.

-