Introduzione alla matematica per l'Ingegneria

Curvatura Ingegneristica

Pierandrea Vergallo

PUBLISHED BY PUBLISHER

BOOK-WEBSITE.COM

First printing, March 2019

Contents

Le seguenti lezioni nascono per il corso organizzato presso la scuola Statale Liceo scientifico e classico "G. Stampacchia" per il progetto *Curvatura ingegneristica*. I seguenti appunti non sostituiscono in nessun modo un buon manuale di algebra lineare, tuttavia sono fedeli descrizioni delle lezioni che si sono tenute durante il corso, soprattutto in riferimento agli argomenti trattati e l'ordine degli stessi.

Un grazie speciale agli studenti e ai docenti che hanno permesso a questa bella iniziativa di essere portata a termine e soprattutto di presentarsi come un'esperienza fissa per gli studenti interessati che, fortunatamente, sono ancora tanti.

Pierandrea

1. Vettori e Matrici

1.1 Alcuni problemi introduttivi

Uno dei problemi più antichi che gli studiosi di matematica e in particolare di geometria hanno dovuto affrontare è sicuramente la risoluzione delle equazioni. Con il tempo, però, sopratutto per le semplicissime equazioni di primo grado (anche note come lineari) si è consolidato un metodo di risoluzione semplicissimo che non lascia, se non agli studenti un po' distratti, alcuno spazio all'immaginazione e quindi all'errore. Situazione un pizzico più complicata diventa sicuramente la risoluzione di più equazioni che chiediamo siano soddisfatte dalla soluzione tutte insieme, contemporaneamente. Í sicuramente il caso dei sistemi di equazioni, in particolare il caso più semplice ma anche più comune è quello dei sistemi composti da equazioni di tipo lineare, anche noti quindi come **sistemi lineari**.

Di seguito presentiamo un esempio di sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x+3y+z=-1 \\ x-y+4z=5 \\ 2x+2y+2z=2 \end{cases} \tag{1.1}$$

Per introdurre in maniera estremamente semplice e sicuramente concreta l'importanza dell'utilizzo del concetto di vettore e di matrice presentiamo tre differenti esempi di problemi più o meno complessi che possono facilmente essere risolti tramite l'utilizzo di questi strumenti della matematica.

1 Un uomo parte da una casa e cammina per 4.0 km a N, per 3.5 km a E, per 2.7 km a SE. In che direzione deve muoversi, e per che distanza deve camminare per tornare alla stessa casa?

2 Dato il seguente sistema dire se ammette, senza calcolarla, un'unica soluzione:

$$\begin{cases} x+2y+3z+4t=0 \\ x-y+z-12t=1 \\ 2x-2y+t=0 \\ 2x-2y+2z-24=2 \end{cases} \tag{1.2}$$

3 Supponiamo si abbiamo 5 numeri x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 che soddisfino le seguenti proprietà:

$$\begin{cases} x_1+3x_2+x_5=1 \\ x_1+2x_3-4x_4=2 \\ x_2-x_4=3 \\ 3x_1+2x_3+x_5=0 \\ x_1+x_2+x_3+x_5=1 \end{cases} \tag{1.3}$$

Si trovi il valore dei 5 numeri.

Sicuramente non sarebbe una grandissima idea cercare di risolvere questi sistemi applicando il metodo di sostituzione, sarebbe una bella sfida.

1.2 Cos'è un vettore

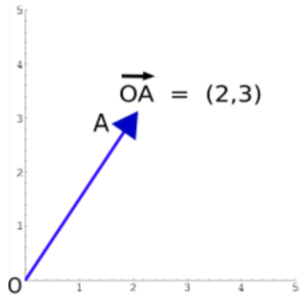
Il primo problema presentato era il seguente:

Un uomo parte da una casa e cammina per 4.0 km a N, per 3.5 km a E, per 2.7 km a SE. In che direzione deve muoversi, e per che distanza deve camminare per tornare alla stessa casa?

Proviamo a rappresentare graficamente questo problema su di una griglia Notiamo che abbiamo fatto grande uso di quelli che possiamo comunemente definire come *segmenti orientati*, cioè segmenti dotati di un verso. Si vede facilmente che un segmento orientato è una parte di retta delimitato da due punti che indichiamo con le lettere maiuscole A e B che sono detti estremi.

Immaginiamo ora di spostare il segmento AB, orientato come indicato dal verso della freccia, nel piano in maniera totalmente arbitraria. Sicuramente questo non ha cambiato la sua "natura", cioè non altera le proprietà fondamentali del segmento: abbiamo solo traslato un oggetto, senza modificarlo.

Ne deduciamo chiaramente che tutti i segmenti orientati che possono ottenersi dalla traslazione del primo segmento AB sono essenzialmente la stessa cosa, pur avendo estremi A',B', A''.. differenti tra loro. Tecnicamente si dice che questi segmenti sono legati da una **relazione di equipollenza**, che caratterizza classi di segmenti orientati applicati a punti distinti tra loro nello spazio. Per comodità, allora, indicheremo con il temine **vettore** una classe di segmenti orientati in relazione tra loro, sceglieremo tra tutti i vettori di questa classe quello avente un estremo nell'origine.



Le proprietà di un vettore

Per quanto appena detto è possibile immaginare infiniti vettori, tutti aventi il primo estremo nell'origine. Questi differiranno pertanto esclusivamente da tre aspetti essenziali che rappresentano le proprietà intrinseche di un vettore. Queste tre proprietà rendono l'uso dei vettori come strumento matematico particolarmente appetibile per i fisici che, nello studio della dinamica delle forze, utilizza come vedremo il concetto di vettore per semplificare graficamente questi problemi.

Per comodità indicheremo un vettore con una lettera minuscola dell'alfabeto. In effetti, non ha senso definirlo come nel caso di segmento orientato in quanto il primo estremo è, per scelta, sempre fissato in O.

Sia, quindi, v un vettore. Allora v possiede sicuramente:

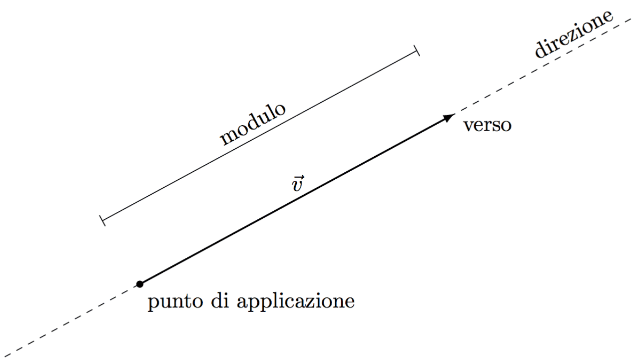
direzione Questa rappresenta la direzione della retta su cui giace il vettore v, come rappresentato nella figura sottostante. Sfruttando la geometria analitica nello spazio, esso è rappresentato dal valore del coefficiente angolare m della retta su cui giace, ovviamente una retta centrata nell'origine e quindi della forma

$$y = m \cdot x$$

verso Il verso del vettore v è l'orientazione della "freccia", cioè la scelta di un senso di percorrenza della retta, e quindi del vettore stesso. Si noti che nel nostro caso, cioè per vettori centrati nell'origine,il verso è sempre tale da coincidere con la direzione uscente dall'origine degli assi.

modulo Il modulo di un vettore $v$rappresenta l'effettiva lunghezza della freccia, senza utilizzo di unità di misura a questo stadio, cioè tramite grandezze dette pure.

Come anticipavamo la seguente figura ci chiarisce ancora meglio queste tre proprietà essenziali.

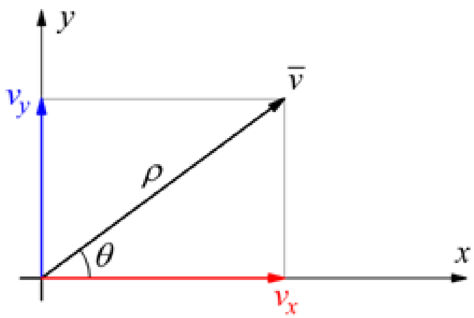


1.2.1 Le componenti di un vettore

Non abbiamo fatto ancora caso allo spazio in cui i vettori vivono. In effetti, non si è ancora definito un vero e proprio ambiente di lavoro in cui i nostri vettori possono posizionarsi.

Il caso più semplice è sicuramente quello del piano. Come è certamente noto il piano è un ambiente bidimensionale, infatti bastano due grandezze per definire un punto nello spazio.Inoltre, bastano due assi cartesiani per creare una griglia di riferimento detta nel caso analitico *sistema di riferimento cartesiano*.

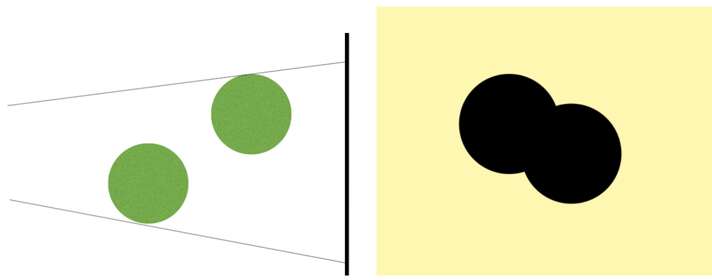
Riprendiamo l'esempio grafico di un vettore centrato nell'origine:



In questo caso il vettore v ha un modulo ρ ed un'inclinazione (che detta la direzione del vettore) pari a θ.

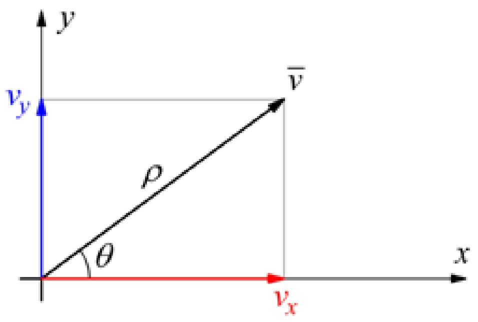
Per un attimo mettiamo da parte il nostro vettore ed introduciamo un argomento più delicato: la proiezione.[1] Generalmente ogni qualvolta si ha a che fare con degli spazi più o meno grandi si sceglie di "scendere" di dimensione per semplificare il discorso, tralasciando alcuni aspetti e incentrandoci più su degli altri. Per fare ciò lo strumento più usato è quello della proiezione. Immaginiamo di avere una torcia e un pallone (ovviamente in 3D) che cade parallelo ad un palazzo. Illuminando con la torcia il pallone e proiettando la luce sul palazzo si nota la forma tonda del pallone creata dall'ombra dello stesso. Essendo la facciata del palazzo un piano bidimensionale abbiamo proprio proiettato un oggetto di una dimensione maggiore (3D) su uno spazio di dimensione minore (2D).

Di seguito un breve esempio grafico con due palloni:



[1] Per un maggiore approfondimento invito il lettore a leggere *"Proiettare tutta la Terra su di un foglio"* di P. Vergallo, oppure l'introduzione di *"Matematica e cartografia: la mappa di Mercatore"* di D.Passaro e P.Vergallo

Vogliamo essenzialmente fare la stessa cosa con un vettore. Allora immaginiamo di metterci con una torcia paralleli all'asse (di una dimensione) su cui vogliamo proiettare e di accendere la luce. Se il fascio di luce è perfettamente perpendicolare all'asse (anche detto *ortogonale*) otteniamo la proiezione del vettore v sull'asse scelto. Indichiamo con v_x la proiezione i v sull'asse delle x e con v_y la proiezione di v sull'asse delle y. Come nella figura.

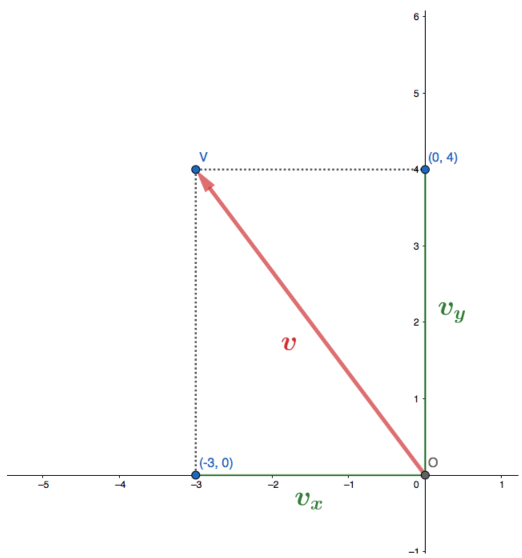


Pertanto, è possibile trattare il vettore v come se fosse un punto, in cui

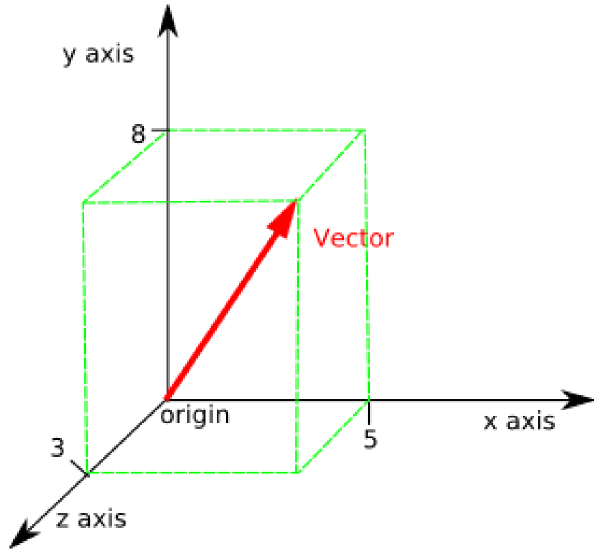
$$v = (v_x, v_y)$$

e dove v_x, v_y sono dette le **componenti** del vettore. Ovviamente le componenti (cioè in sostanza le lunghezze delle proiezioni lungo gli assi coordinati) sono proprio le coordinate del secondo estremo del vettore.

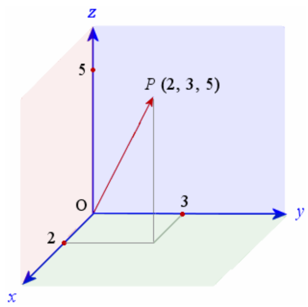
Il seguente fornisce un esempio chiaro graficamente.



Passiamo, infine, ad un caso di dimensione maggiore. Prendiamo uno spazio tridimensionale. Su questo avremo certamente tre assi coordinati che indichiamo come asse delle ascisse (o delle x), asse delle ordinate (o delle y) e asse delle quote (o delle z). Allo stesso modo prendiamo un vettore nello spazio come nella seguente figura



Proprio in maniera analoga è necessario proiettare mettendoci con una torcia in modo che il fascio di luce sia perpendicolare all'asse scelto. In tal modo otterremo questa volta tre **componenti**, come nel diegno sottostante

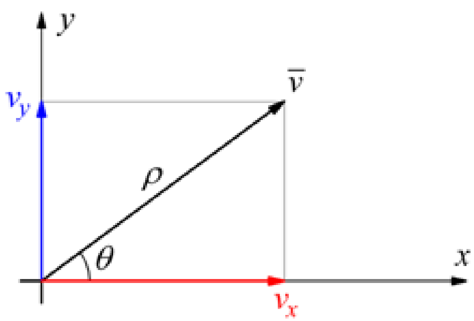


E pertanto il vettore v può essere scritto in base alle sue componenti

$$v = (v_x, v_y, v_z)$$

Approfondimento: Componenti e goniometria

Riprendiamo per un attimo il caso bidimensionale, in particolare riconsideriamo la seguente figura



Sono note le formule trigonometriche per il calcolo dei cateti di un triangolo rettangolo sapendone un angolo e la lunghezza dell'ipotenusa. Infatti

$$b = a \cdot \sin \theta$$

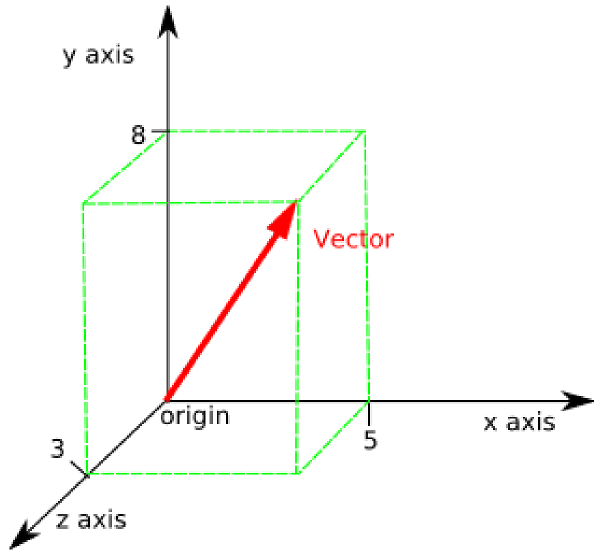
$$c = a \cdot \cos\theta$$

Nello specifico nel nostro caso se è nota la direzione θ e il modulo ρ, otteniamo

$$v_x = \rho \cdot \cos\theta$$

$$v_y = \rho \cdot \sin\theta$$

Infine, nel caso tridimensionale



valgono le seguenti relazioni sulle componenti (ricordando che la direzione è definita tramite due angoli θ e ϕ:

$$v_x = \rho \cdot \sin\theta\cos\phi$$

$$v_y = \rho \cdot \sin\theta\sin\phi$$

$$v_z = \rho \cdot \cos\phi$$

Il ché è giustificato da una prima proiezione sul piano $[xy]$ e da una seconda sugli assi x e y dello stesso piano.

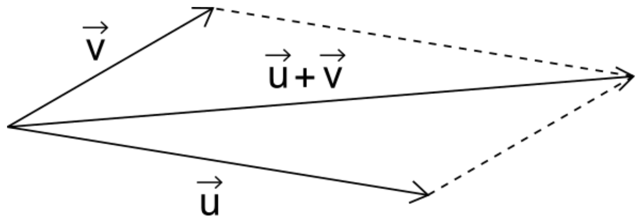
1.3 Operazioni con i vettori

Pur avendo introdotto il concetto di vettore ed avendone studiato le principali proprietà tuttavia non siamo in grado di operare con questi. É necessario pertanto introdurre alcune operazioni:

Somma Siano $v = (v_x, v_y, v_z)$ e $w = (w_x, w_y, w_z)$, si definisce somma tra v e w il vettore

$$v + w = (v_x, v_y, v_z) + (w_x, w_y, w_z) = (v_x + w_x, v_y + w_y, v_z + w_z)$$

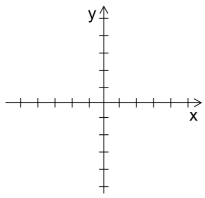
Quindi la somma di due vettore è definita come la somma componente per componente degli stessi, generando un nuovo vettore (avente ovviamente lo stesso numero di componenti dei due precedenti).
Graficamente la somma si ottiene sfruttando il metodo del parallelogramma, come nel seguente disegno:



Opposto Supponiamo di avere un vettore $v=(v_x,v_y,v_z)$ e di voler cambiare il verso dello stesso, percorrendolo al contrario. Questo significa tecnicamente calcolare il vettore opposto $-v$, e lo si fa come segue:

$$-v=(-v_x,-v_y,-v_z)$$

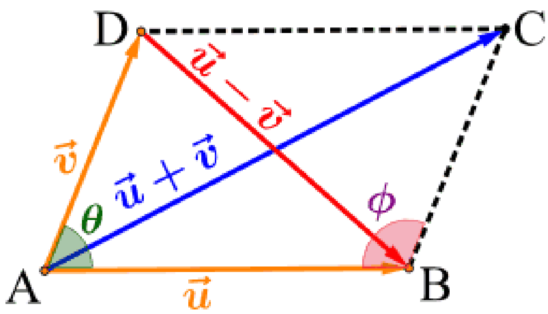
Mentre graficamente basta prolungare la retta su cui giace v e, partendo questa volta dall'origine del vettore, tracciare un segmento lungo tale retta nella direzione opposta:



Differenza Per calcolare la differenza tra due vettori v e w basta sfruttare la seguente proprietà:

$$v-w=v+(-w)=(v_x-w_x,v_y-w_y,v_z-w_z)$$

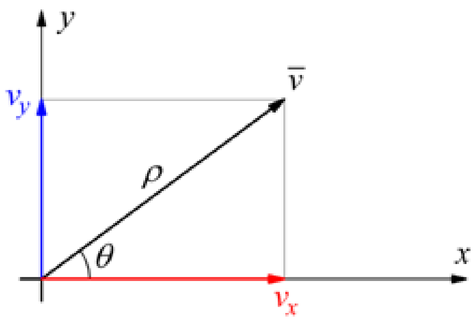
Inoltre graficamente basta applicare il metodo del parallelogramma al contrario:



Modulo di un vettore

Supponiamo, ora, di avere un vettore v e di volerne calcolare il modulo di tale vettore conoscendone le componenti. [2] Riprendiamo la ormai ben nota figura in due dimensioni di un vettore v:

[2]Essenzialmente di un vettore ha senso sapere o le componenti o la coppia direzione modulo



Volendo ricavare il valore di ρ, cioè del modulo appunto, ci viene nuovamente in aiuto la trigonometria nella sua parte più elementare. in effetti, una semplice applicazione del Teorema di Pitagora si renderà essenziale per valutare il modulo (anche detto **norma**) di un vettore.

Pertanto

$$\rho = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Indicheremo la norma di un vettore v tramite il simbolo di valore assoluto $|v|$.

Nel caso tridimensionale il teorema di Pitagora verrà generalizzato come segue: se $v = (v_x, v_y, v_z)$ allora

$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

1.3.1 Il prodotto scalare tra vettori

Una particolare operazione tipica dei vettori è detta **prodotto scalare**. contrariamente a quanto siamo portati a pensare, il prodotto scalare è un prodotto tra due vettori che non restituisce un vettore bensì un numero, uno scalare appunto.

Dati due vettori in uno spazio bidimensionale $v = (v_x, v_y)$ e $w = (w_x, w_y)$ si pone

$$v \cdot w = v_x w_x + v_y w_y$$

. Mentre nel caso tridimensionale $v = (v_x, v_y, v_z)$ e $w = (w_x, w_y, w_z)$ si pone

$$v \cdot w = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z$$

1.4 Esercizi

- Siano dati i seguenti vettori

$$v = (1,2,5) \qquad w = (-3,-2,0) \qquad z = (1,0,-5)$$

  Si calcolino $v+w$, $v-z$. $v+z+w$.
  Si calcoli la norma di v e quella di z.
  Si calcoli il prodotto scalare $v \cdot z$ e poi $z \cdot v$. Vale per il prodotto scalare la proprietà commutativa?
- Dato il vettore $x = (3,-4,0,6,-2)$ si calcoli la norma.
- Si rappresentino graficamente i seguenti vettori

$$v = (-1,0) \qquad w = (-2,0) \qquad z = (-1,1)$$

  e si rappresenti graficamente il risultato della seguente espressione

$$v - (w - z) + w$$

- Si calcolino i seguenti prodotti di vettori per uno scalare

$$7(-12,3,0,1,5) \qquad -\sqrt{2}(\sqrt{2},-\sqrt{8},3\sqrt{2})$$

- Si calcoli il risultato della seguente espressione:

$$v - 3(v+w) + [w \cdot (v - 3w)]w$$

  con $v = (2,2,2,1), w = (0,-3,0,1)$.
- Si risolva la seguente equazione

$$3(x,7y) - (y,x) = (3,1)$$

1.5 Spazi vettoriali

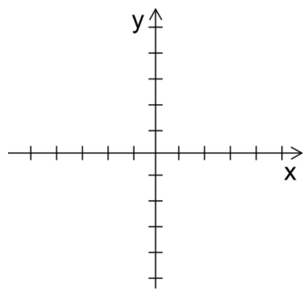
Abbiamo osservato che essenzialmente vi sono due importanti operazioni tra vettori: la somma e la moltiplicazione per uno scalare (come appena visto negli esercizi). Possiamo pertanto definire il seguente "ambiente di lavoro", che è dove i vettori "vivono":

Definizione 1.5.1 Sia V un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$, chiamiamo V spazio vettoriale reale se

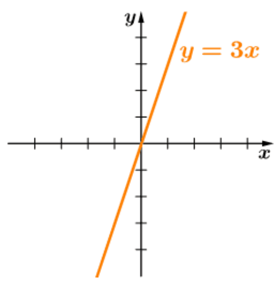
1. Per ogni $v, w \in V$ si ha che
$$v + w \in V$$
2. Per ogni $k \in \mathbb{R}$ e per ogni vettore $v \in V$ vale
$$k \cdot v \in V$$

Facciamo qualche esempio:

Esempi 1.1 Sia $\mathbb{R}^2$ il piano euclideo con i consueti assi cartesiani, come in figura



Si consideri, poi, la retta $y = 3x$ (cioè una retta passante per l'origine), come in figura



Ora, possiamo notare che i punti (x, y) del piano che giacciono sulla retta sono legati dalla relazione $y = 3x$ (per come definita l'equazione cartesiana della stessa). Pertanto possiamo anche scrivere la retta nel seguente modo

$$r := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad y = 3x\} = \{(x,3x) \quad x \in \mathbb{R}\}$$

Ad esempio, i punti $(1,3), (0,0), (3,9)$ sono tutti punti della retta, che soddisfano $y = 3x$.

Ci resta da capire se r è uno spazio vettoriale. Quindi siano $(a, 3a)$ e $(b, 3b)$ dei generici punti della retta. Proviamo che è verificata la definizione precedente.

$$(a, 3a) + (b, 3b) = (a + b, 3a + 3b)$$

affinché questo sia della forma $(x,3x)$ è necessario raccogliere il 3, in modo da ottenere un unico valore

$$(a+b,3a+3b)=(a+b,3(a+b))$$

e quindi se poniamo $x:=a+b$ si ottiene proprio

$$(a+b,3(a+b))=(x,3x)$$

che è ancora un punto della retta. Perfetto, quindi la somma di due vettori della retta è ancora un vettore della retta.

Proviamo a moltiplicare per uno scalare $k\in\mathbb{R}$, semplicemente:

$$k(a,3a)=(ka,k3a)$$

ma voglio ottenere la forma $(x,3x)$, quindi basta spostare il 3 (per la commutatività del prodotto) e quindi ottenere

$$(ka,3(ka))=(x,3x)$$

se poniamo $x:=ka$. Ne concludiamo che r è uno spazio vettoriale.

■ **Esempi 1.2** Allo stesso modo possiamo verificare i seguenti spazi

1. I punti della retta di equazione $y=-5x$ rappresentano uno spazio vettoriale?
2. I punti della retta $y=x-1$ rappresentano uno spazio vettoriale?
3. I punti della retta $y=2x$ lo rappresentano?
4. I punti dell'insieme
$$A:=\{(x,3x,5x)\quad x\in\mathbb{R}\}$$
rappresentano uno spazio vettoriale?

1.6 Matrici

Uno strumento matematico particolarmente utile per descrivere i sistemi lineari e gli spazi vettoriali sono sicuramente le matrici. Consideriamo allora il sistema di equazioni lineari già visto nella prima sezione di questo manuale.

$$\begin{cases} x_1+3x_2+x_5=1 \\ x_1+2x_3-4x_4=2 \\ x_2-x_4=3 \\ 3x_1+2x_3+x_5=0 \\ x_1+x_2+x_3+x_5=1 \end{cases} \tag{1.4}$$

Potremmo scegliere di raccogliere tutti i coefficienti delle incognite presenti nell'equazione in una "tabella" che prenderà, appunto, il nome di matrice. In particolare, scegliamo di indicare con la lettera j la colonna di riferimento e con i la riga. Così facendo otterremo degli elementi che indicheremo con

$$a_{ij}$$

che occupano il posto (i, j) della nostra tabella.

Osserviamo che con questa notazione i indicherà la i-esima equazione del sistema, mentre j la j-esima variabile (se ordinate tutte nello stesso modo). La tabella che otterremo sarà della seguente forma:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

Proviamo qualche esempio: $a_{11} = 1$, $a_{23} = 0$, $a_{32} = 1$ e $a_{55} = 1$.

Ovviamente non tutte le matrici hanno 5 righe e 5 colonne, anzi vale la seguente definizione:

Definizione 1.6.1 Una matrice si dice *quadrata* se il numero di righe è uguale al numero di colonne, cioè se $n = m$

Se fissiamo, quindi, un campo base (cioè uno spazio da cui prendere gli elementi della nostra matrice A) è possibile costruire infinite matrici di ordine $n \times m$. Spesso si sceglie di prendere come campo base il campo dei numeri reali e quindi lo spazio delle matrici a n righe ed m colonne è indicato con

$$\mathbb{R}^{n,m}$$

Facciamo alcuni esempi:

■ **Esempi 1.3** facendo variare n ed m otteniamo

1. Per $n = m = 1$ si hanno proprio numeri reali, detti appunto scalari;
2. Per $n = 1$ si ottengono dei vettori riga:
$$(1, 3, 4, -3)$$
3. Per $m = 1$ si ottengono vettori colonna
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}$$
4. Scegliendo a caso n e m otteniamo matrici in generale di tipo rettangolare:
$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -9 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

1.6.1 Matrici diagonali

Una particolarissima classe di matrici è detta classe delle *matrici diagonali*. Più in generale, conosciamo una classe di matrici detta *matrici triangolari* che comprende a sua volta due sottoclassi dette *matrici triangolari superiori* e *matrici triangolari inferiori*.

Definizione 1.6.2 Sia A una matrice in $\mathbb{R}^{n,m}$, diremo che A è una matrice *triangolare superiore* se

$$\forall i,j \quad a_{i,j} = 0 \quad se \quad i > j$$

Viceversa, diremo che A è una matrice *triangolare inferiore* se vale che

$$\forall i,j \quad a_{ij} = 0 \quad se \quad i < j$$

Esempi di matrici triangolari sono i seguenti:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la prima è *triangolare superiore* mentre la seconda è *triangolare inferiore*.

Definizione 1.6.3 Una matrice A quadrata si dice *diagonale* se tutti gli elementi al di fuori della diagonale principale sono nulli. In simboli, se

$$\forall i \neq j \quad a_{ij} = 0$$

Ne segue che

1. Le matrici diagonali sono al contempo triangolari superiori e inferiori;
2. Nelle matrici diagonali gli unici elementi non nulli sono della forma a_{ii}.

Proposizione 1.6.1 L'insieme delle matrici diagonali è uno spazio vettoriale

La dimostrazione verrà riportata in seguito.

1.7 Operazioni con le matrici

Le matrici sono enti matematici che si prestano, al pari dei vettori, a diverse operazioni: la somma,il prodotto, il calcolo dell'opposto e quello dell'inversa. Di seguito esamineremo, con brevi esempi, come definire tali operazioni.

Prima di iniziare, però, è bene sottolineare che non tutte le operazioni sono concesse tra due matrici qualsiasi. Una condizione simile l'abbiamo trovata nei vettori quando abbiamo osservato che non è possibile sommare vettori di dimensioni differenti. A tal proposito, di volta in volta, ci preoccuperemo di indicare quali sono le condizioni necessarie affinché l'operazione si possa effettuare.

Somma tra matrici

Siano A e B due matrici in $\mathbb{R}^{n,m}$ (entrambe della stessa dimensione), allora ricordiamo che possiamo anche scriverle in termini di elementi che la compongono (*entries* in inglese) come segue

$$A = (a_{ij}) \qquad B = (b_{ij})$$

ne segue che chiamata con C la matrice somma $A+B$ si ha

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

pertanto la somma è calcolata elemento per elemento.

Opposto

Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,m}$ la sua opposta che indicheremo con $-A$ è data in termini di entries come segue

$$-A = (-a_{ij})$$

cioè basta calcolare l'opposto i ogni elemento a_{ij} di A.

1.7.1 Prodotto tra matrici

Una delle operazioni più macchinose per il calcolo delle radici è sicuramente il prodotto tra due matrici. In particolare, se $A \in \mathbb{R}^{n,m}$ e $B \in \mathbb{R}^{m,k}$ è possibile fare il prodotto tra matrici. Si noti che questa volta la condizione per calcolare quest'operazione è più insolita: vogliamo che il numero di colonne del primo deve essere pari al numero di righe del secondo.

Ad esempio, posso sempre moltiplicare matrici quadrate ($n \times n$) perché hanno lo stesso numero di righe e di colonne. Allo stesso modo posso moltiplicare $A \in \mathbb{R}^{2,3}$ con $B \in \mathbb{R}^{3,10}$.

Osservazione 1.1 Cosa succede con la proprietà commutativa nel caso del prodotto tra matrici?

Quando la condizione necessaria è soddisfatta, l'operazione segue la regola detta del *prodotto righe per colonne*.

■ **Esempi 1.4** Siano date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ne ricaviamo che

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

1.8 Esercizi

- Svolgere i seguenti prodotti tra matrici di dimensioni differenti.
  - $\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}$
  - $\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 1 & 1\\-1 & -2 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$
  - $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\1 & 2 & 1\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}$
  - $\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 0\\2 & 0 & 0 & -1\\0 & 2 & 0 & 0\\1 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\1 & -1 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 2\\0 & -1 & -1 & 3\end{pmatrix}$
  - $\begin{pmatrix}2 & 3\\3 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 2 & 3\end{pmatrix}$
- Commutatività per il prodotto tra matrici. Svolgere il seguente prodotto tra matrici, in seguito scambiare i fattori e ricalcolare. Il risultato è lo stesso?
  - $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 2 & 1\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\\2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ e viceversa
- Calcolare i seguenti prodotti con vettori e matrici.
  - $\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$
  - $\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 0 & 3 & 0\\3 & & & \end{pmatrix}$
- Provare che le matrici 3×3 triangolari superiori costituiscono uno spazio vettoriale
- Risolvere la seguente espressione con le matrici quadrate 2x2.

$$\left[\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 2\\-1 & -1\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}$$

1.9 Determinante

1.10 Esame di fine modulo

Durata: 2 ore.

1. **Calcola le seguenti somme e differenze tra vettori, indicandone la dimensione**
   a) $\begin{pmatrix}0 & -3 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 3 & -1\end{pmatrix}$
   b) $\begin{pmatrix}\sqrt{3} & \sqrt{2} & 207 & \sqrt{4}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -\sqrt{2} & -207 & -2\end{pmatrix}$

2. **Sia n la dimensione di un vettore v e sia m la dimensione del vettore w. Come devono essere n e m poter effettuare la somma e la differenza tra vettori?**

3. **Dato $v=(1,-1,0)$, $u=(-3,-2,1)$ e $w=(0,0,1)$ calcolare la seguente espressione:**
$$(v+u)-(v-u)+2w$$

4. **Calcolare il prodotto scalare tra le seguenti coppie di vettori:**
   a) $v=(-1,0,-1)$ e $w=(3,2,1)$;
   b) $u=(1,0,3,-2)$ e $v=(1,4,1,2)$

5. **Quando due vettori si dicono ortogonali? Riconoscere eventuali vettori ortogonali nell'esercizio precedente.**

6. **Indicare dei seguenti vettori la componente indicata**
   a) $v=(-1,0,-1)$, la terza componente;
   b) $u=(1,0,3,-2)$, la prima componente;
   c) $w=(1,2,3,7,4,-21)$, la quinta componente;
7. **Calcolare la le espressioni tra le matrici indicate:**
   a) $-A$;
   b) $3A+-2B$;
   dove
$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

8. **Indicare una matrice triangolare superiore, una triangolare inferiore ed una diagonale**

9. **Calcolare il seguente prodotto tra matrici:**
$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

10. **Siano $A\in\mathbb{R}^{n,m}$ e $B\in\mathbb{R}^{c,d}$. Per quali valori di n,m,c,d è possibile calcolare il prodotto AB e per quali BA?**

11. **E' vero che per ogni coppia di matrici A,B vale che $AB=BA$?**

12. **Utilizza il metodo indicato a lato per calcolare il determinante delle seguenti matrici:**

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, metodo di Laplace;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, metodo MeG (eliminazione di Gauss);

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, metodo di Sarrus;

13. **Calcola il determinante della seguente matrice:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

14. **Definisci $GL_n(\mathbb{R})$. E' vero che tutte le matrici in $GL_n(\mathbb{R})$ sono tutte invertibili?**

2. Sistemi lineari quadrati

Lo studio di sistemi lineari come lo abbiamo conosciuto finora è essenzialemente l'applicazione di metodi specifici al singolo problema da risolvere. Si presentano, infatti, i metodi di sostituzione, di riduzione, di Cramer e di confronto per sistemi quadrati composti da due equazioni in due incognite. Il nostro obiettivo è quello di generalizzare questi metodi cercando degli strumenti generali che ci possano permettere di risolvere anche sistemi di equazioni composti da molte più incognite.

Sia, quindi, dato il seguente sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.1}$$

dove $a_{ij} \in \mathbb{R}$ e $b_i \in \mathbb{R}$, mentre $x_1, \ldots, x_n$ sono incognite. Il sistema è evidentemente composto da m equazioni e n incognite. Questo resterà il nostro schema di riferimento nello studio di sistemi lineari.

Definizione 2.0.1 Dato un sistema della forma 2.9 diremo che il sistema è *sottodeterminato* se $n > m$, mentre esso è detto *sovradeterminato* se $n < m$. Infine, un sistema si dice quadrato se $n = m$.

I sistemi lineari quadrati sono oggetto di studio di questo secondo modulo.

2.1 Formalizzazione di un sistema in forma matriciale

Riconsideriamo quindi il sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.2}$$

e osserviamo che è possibile formalizzare le relazioni espresse come m equazioni in un'unica equazione sotto forma di matrici. Verranno, pertanto, utilizzati i consueti strumenti e le consuete operazioni tra matrici e vettori per come analizzati nel capitolo precedente.

Consideriamo, pertanto, la matrice composta da tutti e soli i coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

D'ora in poi chiameremo la matrice A la *matrice dei coefficienti associata al sistema* 2.9. Allo stesso modo consideriamo i vettori:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

e

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_m \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

che definiremo rispettvamente *vettore colonna delle incognite* e *vettore colonna dei termini noti*.

Utilizzando la consueta definizione di prodotto righe per colonne tra matrici otteniamo che il sistema 2.9 si può riscrivere in forma matriciale come segue

$$AX = b \tag{2.6}$$

Il lettore si convinca che il risultato ottenuto nel prodotto righe per colonne dei A e X è proprio il membro sinistro delle equazioni del sistema, mentre a destra fissiamo tutti i termini noti.

Osservazione 2.1 Si noti che $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ e $X \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n,1}$ quindi ha senso effettuare il prodotto per matrici cercato. Inoltre, il risultato $AX \in \mathbb{R}^{m,1}$ che è della stessa dimensione del vettore $b \in \mathbb{R}^{m,1}$

■ **Esempi 2.1** Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} 3x+2y-3z=1 \\ x-2y+2z=2 \\ 4x+6y-z=0 \end{cases}$$

quindi in termini matriciali si ottiene che

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix} \qquad b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui $AX=b$.

2.1.1 Rango di una matrice

Nello studio dei sistemi lineari visti finora ci si è sicuramente imbattutti in esempi di sistemi privi di alcuna soluzione (cioè impossibili) e con infinite soluzioni (cioè indeterminati). Nei casi visti nei libri di scuola si è potuto verificare l'indeterminazione o l'impossibilità della soluzione di un sistema in maniera diretta: cercando di trovare una soluzione per l'esercizio dato.

Immaginiamo, però, di dover calcolare una soluzione di un sistema di 100 equazioni e composto da 100 incognite. Non sarebbe affatto simpatico scoprire, dopo aver effettuato decide e decine di conti, che il sistema non può ammettere alcuna soluzione. Cerchiamo, pertanto, un metodo generale per comprendere se il 2.9 è indeterminato o impossibile.

Gli strumenti più utili per risolvere problemi di questo tipo risultano proprio lmatrici e vettori e operazioni su di essi. Introduciamo, ora, il concetto di rango di una matrice.

Definizione 2.1.1 Sia A una matrice (non necessariamente quadrata). Chiamiamo *rango* di A la dimensione della più grande sottomatrice quadrata contenuta in A a determinante non nullo

Osservazione 2.2 Se una matrice A è una matrice $m \times n$ allora il rango di A può essere compreso tra 0 (se $A=0$) e il minimo tra m ed n. Indichiamo il rango di A con

$$rgA$$

■ **Esempi 2.2** Si consideri la matrice

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 4 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è chiaro che la seconda riga è direttamente proporzionale alla prima (infatti è il doppio della prima) e pertando $detA=0$. Ne segue che il rango di A non può essere 3 (come la dimensione di A). Cerchiamo allora una matrice 2×2 a determiante non nullo (se questa esiste). In particolare se si sceglie

$$A'=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si ottiene ancora che $detA' = 0$. Ma non è detto che il rango di A non sia 2, infatti basta trovarne una sola a dimensione 2 con determinante non nullo. Proviamo con

$$A'' = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha determinante pari a -6, quindi $detA'' = -6 \neq 0$ e A'' è la sottomatrice di A cercata. La sua dimensione è 2, pertanto $rgA = 2$.

Metodo di Gauss per il calcolo del rango.
Sicuramente, data una matrice A non è affatto comodo andare a cercare una sua sottomatrice a determiante non nullo, se A è molto grande, infatti, si potrebbe anche considerare un numero davvero consistente di determinanti per verificare quale la prima sottomatrice non singolare in A.

Ci viene in aiuto il metodo di eliminazione di Gauss (MeG). Consideriamo la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

e riduciamola in scala utilizzando il MeG:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

Definizione 2.1.2 Data una matrice A' triangolare superiore, chiamiamo *pivot* gli elementi non nulli della diagonale principale

In questo caso i pivot sono $a_{11} = 1, a_{22} = -1$ e $a_{33} = -1$. Da qui ricaviamo uno più importati risultati della sezione:

Proposizione 2.1.1 Data una matrice A e data A' la sua riduzione a triangolare superiore tramite il metodo di eliminazione di Gauss, si ha che $rgA = k$ con k numero di pivot della matrice A'.

Nel caso del nostro esempio, quindi, la matrice A ha $rgA = 3$.

■ **Esempi 2.3** Sia data la matrice triangolare superiore

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i cui pivot sono $a_{11} = 2$ e $a_{22} = 1$, segue che $k = 2 = rgA$.

2.2 Il Teorema di Rouché-Capelli

Il risultato forse più importante e utile di questo modulo è proprio il Teorema di Rouché-Capelli. Pur non definendoci un metodo univoco e assoluto per risolvere i sistemi lineari il Teorema suddetto risulta essenziale per classificare tre tipologie di sistemi:

- Sistemi determinati (La soluzione esiste ed è unica);
- Sistemi indeterminati (Le soluzioni esistono ma sono infinite);
- Sistemi impossibili (La soluzione non esiste).

In particolare, l'utilità di questo teorema è proprio quella di comprendere quali sistemi risulteranno impossibili da risolvere e ci permetteranno di "recuperare" tempo prezioso. Vedremo, poi, che grazie al teorema di Rouché-Capelli è possibile riconoscere da quanti parametri dipendono le infinite soluzioni (qualora il sistema sia indeterminato) e quindi definire la dimensione del sottospazio vettoriale che determinano.

Teorema 2.2.1 — Rouché-Capelli. Sia dato il seguente sistema quadrato:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \\ \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.9}$$

e sia

$$AX = b$$

la sua forma matriciale compatta. Allora posto k il valore di rgA e h il valore di $rg(AIb)$ (cioè la matrice rettangolare composta da A e da b assieme):

- se $rgA = rg(AIb)$ il sistema ammette almeno una soluzione;
- se $rgA \neq rg(AIb)$ il sistema non ammette alcuna soluzione (cioè è impossibile).

Inoltre, se $k = rgA = rg(AIb)$ il sistema ammette

$$\infty^{n-k}$$

soluzioni.

Osservazione 2.3 Si noti che se il rango di A e il rango di AIb sono entrambi uguali a n allora si hanno

$$\infty^{n-n} = \infty^0$$

soluzioni, cioè un'unica soluzione.

Si invita il lettore ad applicare il teorema ai seguenti sistemi:

■ **Esempi 2.4** 1.

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ 6x + 4y - 2z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ 6x + 4y - 2z = 2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ 2x + 4y - 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

2.3 Esercizi

1. Si formalizzino i seguenti sistemi lineari:

   (a)
$$\begin{cases} 3x+2y+4z+1=0 \\ 3y+7=0 \\ -y+2x=0 \end{cases}$$

   (b)
$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5 \\ x_1=x_3 \\ x_1+x_2+x_3=0 \\ 4x_4+5=x_1 \\ x_2=3x_3 \end{cases}$$

   (c)
$$\begin{cases} 2x+2y+2z+2t=2 \\ 2t+3x=1 \\ 2x+3y+t=1 \\ 4x-5y+2z+t=0 \end{cases}$$

2. Dato un sistema lineare quadrato omogeneo (ricordiamo che un sistema si dice omogeneo se il vettore dei termini noti è il vettore nullo) quando questo ammette un'unica soluzione?
3. Si dica se i seguenti sistemi della forma $Ax=b$ sono determinati, indeterminati o impossibili:

   (a)
$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix} \qquad b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   (b)
$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix} \qquad b=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   (c)
$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad b=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4. Si risolvano i seguenti sistemi dopo aver verificato se la soluzione esiste e se è unica:

   (a)
$$\begin{cases} 2x_1+3x_3+x_4=0 \\ x_1+x_2+x_4=0 \\ 2x_1+2x_2+x_4=0 \\ x_2+x_3=0 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} x-2y+z=1 \\ x-2y+z=2 \\ x=0 \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} 2x+2y+z=1 \\ 4x+4y+2z=2 \\ 6x+6y+3z=3 \end{cases}$$

5. Per quali valori di k i sistemi sono determinati?
   (a)
$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ kx+ky+z=0 \\ x+2ky+kz=k \end{cases}$$

   (b)
$$\begin{cases} x+2y+z=1 \\ x+ky-z=0 \\ kx-2ky+2kz=k \end{cases}$$

6. Risolvere i sistemi precedenti per $k=1$
7. Si risolvano i seguenti sistemi con il metodo di Gauss:
   (a)
$$\begin{cases} x+2y=1 \\ x+y=-1 \end{cases}$$

   (b)
$$\begin{cases} x+y+z=-3 \\ x+2y+z=1 \\ 2x-2y+2z=0 \end{cases}$$

   (c)
$$\begin{cases} 2x+3y+z=-1 \\ x+2y+z=1 \\ 5x+8y+3z=-1 \end{cases}$$

2.4 Fattorizzazione LU e metodo di risoluzione dei sistemi

Dopo una lunga parte di corso alle spalle, ancora non si è capito con quali strumenti è possibile risolvere un sistema lineare quadrato in un numero n (non piccolo) di equazioni. In realtà, la preparazione tecnica che abbiamo acquisito fino a queste pagine ci permette di presentare il metodo algoritmicamente meno dispendioso per la risoluzione di sistemi in un numero molto grande di incognite.
Questo algoritmo è un'applicazione del processo di fattorizzazione LU di una matrice.

2.4.1 Fattorizzazione di una matrice

Sia dato un sistema lineare quadrato nella seguente forma compatta

$$Ax = b$$

con $A \in \mathbb{R}^{n,n}, b \in \mathbb{R}^{n,1}$ e x vettore colonna delle n incognite del problema.
Definizione 2.4.1 Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ diciamo che la coppia di matrici invertibili $B, C \in \mathbb{R}^{n,n}$ si dice una *fattorizzazione di* A se

$$A = BC \tag{2.10}$$

dove ricordiamo che una matrice B si dice invertibile se $detB \neq 0$

Una particolare fattorizzazione risulta essenziale per a risoluzione dei sistemi lineari: la fattorizzazione LU.
Definizione 2.4.2 Diciamo che $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ è fattorizzata del tipo LU se esistono due matrici:

1. L triangolare inferiore speciale, cioè con gli elementi della diagonale identicamente 1;
2. U triangolare superiore;

per cui $A = LU$.

In particolare, è necessario costruire due matrici

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & 1 & 0 \\ \dots & & & & 1 \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

e

$$U = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \dots & \dots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} & \dots & u_{2,n} \\ 0 & 0 & u_{3,3} & \dots & u_{3,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & & & & u_{n,n} \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

Ma come possiamo calcolare la fattorizzazione di una matrice?

In realtà, abbiamo già tutti gli strumenti necessari per calcolare la fattorizzazione LU di una matrice. Infatti, basta applicare il metodo MeG di eliminazione di Gauss.

Supponiamo sia data $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ e applichiamo l'eliminazione di Gauss come per calcolare il rango o il determinante della matrice. Ricordiamo che ad ogni passo k moltiplichiamo la k-esima riga per un valore costante che chiamiamo $m_{i,k}$ per semplificare la i-esima riga sottostante. Otteniamo così una matrice che chiameremo M di tutti i fattori di moltiplicazione:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ m_{2,1} & 1 & & \\ m_{3,1} & m_{3,2} & 1 & \\ & & & \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

che si nota subito essere una matrice triangolare inferiore.

Si può verificare che ponendo

$$L := M^{-1}$$

si ottiene proprio la matrice di fattorizzazione cercata. Per quanto riguarda U la questione è ancora più semplice: alla fine dell'applicazione del MeG si ottiene una matrice $\tilde{A}$ che è triangolare superiore (quella con i pivot). Pertanto

$$U = \tilde{A}$$

2.4.2 Risoluzione dei sistemi tramite fattorizzazione

Ritorniamo finalmente al nostro sistema della forma

$$Ax = b$$

dalla sezione precedente è chiaro che se è possibile calcolare la fattorizzazione LU della matrice A allora si ottiene

$$A = LU$$

da cui il sistema diventa

$$LUx = b$$

Ora, poniamo

$$y := Ux$$

e osserviamo che il sistema si sdoppia in

$$\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases} \tag{2.14}$$

per il quale, ricordiamo, è necessario calcolare esclusivamente l'incognita x. Ne segue che risolvere il sistema $ax = b$ equivale esattamente a risolvere il sistema $Ux = y$. Di quest'ultimo dal paragrafo precedente abbiamo ben chiaro come calcolare U. Ma chi è y?

Semplicemente abbiamo visto poco fa che il metodo di eliminazione di Gauss può essere applicato anche alla matrice $A|b$ che si ridurrà nella matrice $U|\tilde{b}$. Ne segue che

$$y = \tilde{b}$$

che è proprio quanto abbiamo fatto negli esercizi.

2.5 Esame di fine modulo

Durata: 2 ore.

ESERCIZI

1 Si esprimano i seguenti sistemi in forma matriciale:

a $\begin{cases} 3x+2y-6z=1 \\ 2x-y+z=0 \\ 3x+2y-6z=1 \end{cases}$

b $\begin{cases} x+1=0 \\ y-2=0 \end{cases}$

c $\begin{cases} 3x_1=1 \\ 3x_2=2 \\ 3x_3=3 \\ 3x_4=4 \end{cases}$

2 Si calcoli il rango delle matrici date usando il metodo dei pivot:

a $\begin{pmatrix} 1 & -6 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

b $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3 Si indichi se il sistema è determinato, indeterminato o impossibile:

$$\begin{cases} 3x+2y-z=0 \\ x+y-z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

Quante soluzioni ammette?

4 Si indichi quante soluzioni ammettono i seguenti sistemi:

a $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=2 \\ 3x+3y+3z=3 \end{cases}$

b $\begin{cases} x_1+x_4=0 \\ x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=2 \end{cases}$

5 Si risolva il seguente sistema applicando il metodo di eliminazione di Gauss:

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ x-2y-z=1 \\ 2x-z=1 \end{cases}$$

6 Dato il seguente sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

a Si formalizzi il sistema,
b Si calcoli il rango della matrice dei coefficienti;
c Si determini se il sistema è impossibile, determinato o impossibile;
d Si indichi quante soluzioni ammette il sistema dato;
e Si fattorizzi il sistema in forma LU;
f Si risolva il sistema.

TEORIA

1 Enunciare il Teorema di Rouché-Capelli.
2 Se il rango della matrice dei coefficienti di un sistema è minore del rango della matrice unita AIb cosa posso concludere?
3 Sia A la matrice dei coefficienti di un sistema. Se A è invertibile, quante soluzioni ha il sistema?
4 Se un sistema è omogeneo, può essere impossibile?
5 E' possibile ricavare la fattorizzazione LU di una matrice tramite il metodo di Gauss?
6 Cosa significa fattorizzare una matrice A?
7 Perché nella fattorizzazione LU le matrici sono indicate proprio con L ed U?
8 A cosa serve fattorizzare la matrice dei coefficienti nel prodotto LU?
9 Sia A una matrice di dimensione n a determinante nullo. Può il rango di A essere massimo?
10 Sia A una matrice di dimensione n, se il suo determinante è nullo e una sua sottomatrice di dimensione $n-1$ è ancora a determinante nullo, posso concludere che il rango di A è $n-2$?
11 Dire se il seguente sistema è lineare:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ xy = 7 \end{cases}$$

Possiamo, quindi, applicare il teorema di Rouché-Capelli?