Corso di Analisi Matematica I per Matematica e Fisica
Anno Accademico 2017/2018

Esercizi scelti di

Analisi Matematica

$$\infty$$

a cura di

Pierandrea VERGALLO

Università degli Studi del Salento

Premessa

Questi esercizi sono stati svolti durante le esercitazioni di Analisi Matematica I per il Corso di Laurea Triennale in Matematica e il Corso di Laurea Triennale in Fisica dell'Università degli Studi del Salento.
Gli esercizi sono stati proposti durante le lezioni pomeridiane di tutoraggio per gli studenti.

Si ringrazia la Prof. Elisabetta Mangino per i preziosi consigli e le accurate correzioni.
Si ringraziano gli studenti che hanno accolto questo progetto e hanno permesso la raccolta di queste lezioni, in particolare si ringraziano gli studenti M. Falciatore, A. Giannotta e L. Pellegrino per la disponibilità degli appunti presi a lezione.

Pierandrea

Indice

Parte I

Esercizi per argomento

CAPITOLO 1

I numeri reali

1.1 Teoria essenziale

Definizione 1. *Sia* $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, *allora* $M \in \mathbb{R}$ *si dice un maggiorante per* X *se e solo se per ogni* $x \in X$ *si ha che* $x \leq M$ *o, equivalentemente,* $X \subseteq]-\infty; M]$

Definizione 2. *Sia* $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, *allora* $m \in \mathbb{R}$ *si dice un minorante per* X *se e solo se per ogni* $x \in X$ *si ha che* $m \leq x$ *o, equivalentemente,* $X \subseteq [m; +\infty[$

Definizione 3. *Sia* $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, *allora:*

X *si dice limitato superiormente se e solo se* X *ha un maggiorante*
X *si dice limitato inferiormente se e solo se* X *ha un minorante*

Definizione 4. *Sia* $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$. $M \in \mathbb{R}$ *si dice massimo per* X *se e solo se* M *è un maggiorante per* X *e* $M \in X$.

Definizione 5. *Sia* $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$. $m \in \mathbb{R}$ *si dice minimo per* X *se e solo se* m *è un minorante per* X *e* $m \in X$.

Definizione 6. *Sia* $X \subseteq \mathbb{R}$*,* $X \neq \emptyset$*,* X *limitato superiormente. Posto* $M(X) := \{M \in \mathbb{R} | M \text{ maggiorante per } X\}$ *si definisce*

$$sup(X) := min\{M(X)\}$$

Definizione 7. *Sia* $X \subseteq \mathbb{R}$*,* $X \neq \emptyset$*,* X *limitato inferiormente. Posto* $m(X) := \{m \in \mathbb{R} | m \text{ minorante per } X\}$ *si definisce*

$$inf(X) := max\{m(X)\}$$

Per l'assioma di Dedekind, l'estremo superiore e l'estremo inferiore esistono.

Caratterizzazione 1 (dell'estremo superiore)**.** *Sia* $X \subseteq \mathbb{R}$*,* $X \neq \emptyset$*,* X *limitato superiormente*

$$L = sup(X) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in X \quad x \leq L \\ \forall \epsilon > 0 \quad \exists x \in X \quad x > L - \epsilon \end{cases}$$

Caratterizzazione 2 (dell'estremo inferiore)**.** *Sia* $X \subseteq \mathbb{R}$*,* $X \neq \emptyset$*,* X *limitato inferiormente*

$$l = inf(X) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in X x \geq l \\ \forall \epsilon > 0 \quad \exists x \in X \quad x < l + \epsilon \end{cases}$$

Osservazioni 1.1.1. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Posto $\lambda A := \{\lambda a | a \in A\}$, si ha se $\lambda < 0$:

$$sup(\lambda A) = \lambda inf(A) \qquad e \qquad inf(\lambda A) = \lambda sup(A)$$

se $\lambda > 0$:

$$sup(\lambda A) = \lambda sup(A) \qquad e \qquad inf(\lambda A) = \lambda inf(A)$$

1.2 Esercizi proposti

1 Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ limitato superiormente e sia $M \in \mathbb{R}$. Si provi che:

$$M = \max(A) \;\Leftrightarrow\; M = \sup(A) \text{ e } M \in A.$$

2 Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ non vuoti. Si provi che se $A \subseteq B$ allora $\sup(A) \leq \sup(B)$ e $\inf(A) \geq \inf(B)$.

É vero che se $A \subseteq B$ e $A \neq B$, allora $\sup(A) < \sup(B)$?

3 Calcolare sup e inf dei seguenti insiemi numerici, precisando caso per caso se essi siano massimi o minimi:

(a)	$\{-1, -\frac{3}{5}, -\frac{6}{7}\}$	(b)	$(]2,4[\cap[3,6[) \cup \{5\}$
(c)	$\left\{\frac{n-1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$	(d)	$\left\{\dfrac{n-1}{n} \,:\, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$
(e)	$\left\{\frac{1}{x} \,:\, x > 0\right\}$	(f)	$\mathbb{Q}\cap]0,1]$
(g)	$\mathbb{Q}\cap]0,\sqrt{2}[$		

4 Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Si provi che:

$$A \quad \text{è limitato} \;\Leftrightarrow \exists M > 0 \qquad \forall x \in A \; |x| \leq M.$$

5 Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ limitato inferiormente. Si dimostri che:

(a) $\forall t > \inf A \qquad A \cap [\inf A, t[\neq \emptyset,$

(b) $\forall t \in \mathbb{R} : \qquad t \leq \inf(A) \;\Leftrightarrow\; \forall a \in A \;\; t \leq a.$

Si dica, inoltre, se vale la seguente equivalenza:

$$\forall t \in \mathbb{R} : \qquad t < \inf A \;\Leftrightarrow\; \forall a \in A \;\; t < a.$$

1.3 Soluzioni

1 Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ limitato superiormente e sia $M \in \mathbb{R}$. Si provi che:

$$M = \max(A) \;\Leftrightarrow\; M = \sup(A) \text{ e } M \in A.$$

Soluzione "$\Rightarrow$" Sia M massimo per A. Allora vale che per ogni $x \in A$ $x \leq M$. In particolare, banalmente $M \in A$ e M è un maggiorante per l'insieme. Resta da provare che M è il minimo dei maggioranti. Supponiamo per assurdo che M non sia il minimo, allora deve esistere M' per cui per ogni $x \in A$ $x \leq M'$ e $M' < M$. Ma $M \in A$, allora anche $M \leq M'$ che è un maggiorante. Da qui, l'assurdo. Ne segue che M è il minimo dei maggioranti, cioè l'estremo superiore.
"$\Leftarrow$" Se M è estremo superiore, in particolare, M è un maggiorante. Inoltre, $M \in A$ quindi è proprio il massimo di A.

Soluzione alternativa"$\Rightarrow$" Sia M' un maggiorante per A. Allora, per ogni $x \in A$, $x \leq M'$. In particolare, $M \leq M'$ poiché $m \in A$. Dunque M è il minimo dei maggioranti, cioè l'estremo superiore.

2 Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ non vuoti. Si provi che se $A \subseteq B$ allora $\sup(A) \leq \sup(B)$ e $\inf(A) \geq \inf(B)$.

É vero che se $A \subseteq B$ e $A \neq B$, allora $\sup(A) < \sup(B)$?

Soluzione Essendo $A \subseteq B$ vale che tutti i maggioranti per B lo sono anche per A. Pertanto l'insieme dei maggioranti di A contiene l'insieme dei maggioranti di B. Si noti che $\sup(B)$ è un maggiorante per B e quindi anche per A. Allora posto poiché $\sup(A)$ è il minimo dei maggioranti di A, ne segue che $\sup(A) \leq \sup(B)$.
Il secondo asserto non è valido. Infatti se consideriamo gli insiemi $A := [0, 1[$ e $B := [0, 1]$, allora $A \subset B$ e $A \neq B$. Ma $\sup(A) = 1 = \sup(B)$.

3 Calcolare sup e inf dei seguenti insiemi numerici, precisando caso per caso se essi siano massimi o minimi:

(a)	$\{-1, -\frac{3}{5}, -\frac{6}{7}\}$	(b)	$(]2,4[\cap[3,6[) \cup \{5\}$
(c)	$\left\{\frac{n-1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$	(d)	$\left\{\dfrac{n-1}{n} \,:\, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$
(e)	$\left\{\frac{1}{x} \,:\, x > 0\right\}$	(f)	$\mathbb{Q}\cap]0,1]$
(g)	$\mathbb{Q}\cap]0,\sqrt{2}[$		

Soluzione Si lascia la verifica al lettore.

4 Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Si provi che:

$$A \quad \text{è limitato} \;\Leftrightarrow \exists M > 0 \qquad \forall x \in A\ |x| \leq M.$$

Soluzione "$\Rightarrow$"se A è limitato, allora esistono l e L che limitano inferiormente e superiormente A. Se scelgo $M := max\{|l|, |L|\}$, vale banalmente la tesi.
"$\Leftarrow$"Dalla disequazione segue direttamente che per ogni $x \in X$ $-M \leq x \leq M$ dunque A è limitato.

5 Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ limitato inferiormente. Si dimostri che:

(a) $\forall t > \inf A \qquad A \cap [\inf A, t[\neq \emptyset$,

(b) $\forall t \in \mathbb{R} : \qquad t \leq \inf(A) \;\Leftrightarrow\; \forall a \in A \;\; t \leq a$.

Si dica, inoltre, se vale la seguente equivalenza:

$$\forall t \in \mathbb{R} : \qquad t < \inf A \;\Leftrightarrow\; \forall a \in A \;\; t < a.$$

Soluzione (a) Per la caratterizzazione dell' $\inf(A)$ si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x \in A$ per cui $x < \inf(A) + \varepsilon$. Sia $t > \inf(A)$, poniamo $\varepsilon := t - \inf(A)$, allora $t = \varepsilon + \inf(A)$, quindi esiste $x \in A$ per cui $x < \inf(A) + \varepsilon = t$. Da qui, l'intervallo d'interesse è non vuoto.
(b) "$\Rightarrow$"Se $t \leq \inf(A)$ allora t è un minorante per A. In particolare, per ogni $a \in A$ si ha che $t < a$.
"$\Leftarrow$" Se t è un minorante allora $t \leq \inf(A)$ in quanto $\inf(A)$ è il massimo dei minoranti per A.

Non è, però detto che $t \neq \inf(A)$. In particolare, se $\inf(A)$ non è minimo per A (cioè non appartiene ad A) può essere che $t = \inf(A)$. Ad esempio, nell'intervallo $A :=]0,1]$ si ha che posto $t := 0$ vale che $t < a$ per ogni $a \in A$, ma $t = 0 = \inf(A)$.
Soluzione alternativa (b) "$\Rightarrow$" Sia $t > \inf(A)$. Allora t non è minorante per A, dunque esiste $\bar{x} \in A$ tale che $\inf(A) \leq \bar{x} \leq t$. Pertanto, $A \cap [\inf(A), t[\neq \emptyset$.

CAPITOLO 2

Il principio di induzione

2.1 Teoria essenziale

Definizione 8. *Sia* $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, *allora diciamo che* A *è un insieme induttivo se e solo se* $1 \in A$ *e* $\forall a \in A \quad 1 + a \in A$

Poniamo

$$\mathbb{N} := \bigcap_{A \subseteq \mathbb{R} \quad \textit{induttivo}} A = \{x \in \mathbb{R} \quad | \quad \forall A \subseteq \mathbb{R} \quad \textit{induttivo} \quad x \in A\}$$

Principio 1 (di induzione)**.** *Per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *sia* $P(n)$ *una proposizione,* $n \in \mathbb{N}$, *se*

1 $P(1)$ *è vera*

2 $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) \Rightarrow P(n+1)$

allora $P(n)$ *è vera, per ogni* $n \in \mathbb{N}$.

Principio 2 (di induzione, forte)**.** *Sia* $P(n)$ *una proposizione,* $n \in \mathbb{N}$,
$n_0 \in \mathbb{N}$ *se*

1 $P(n_0)$ *è vera*

2 $\forall n \geq n_0 \quad P(n) \Rightarrow P(n+1)$

allora $P(n)$ *è vera per ogni* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

2.2 Esercizi proposti

1 $x^{n+1} - y^{n+1} = (x-y)(x^n + x^{n-1}y + x^{n-2}y^2 + ... + xy^{n-1} + y^n)$

2 $\forall n \in \mathbb{N} \qquad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3 $\forall n \in \mathbb{N} \qquad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

4 $\forall n \in \mathbb{N} \qquad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$

5 $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5 \qquad 2^n > n^2 + 1$

6 $\forall x \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \qquad (1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$

7 $\forall n \in \mathbb{N} \qquad 2^{n-1} \leq n!$

2.3 Soluzioni

$\forall x, y \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$

1 $x^{n+1} - y^{n+1} = (x-y)(x^n + x^{n-1}y + x^{n-2}y^2 + ... + xy^{n-1} + y^n)$

2 $\forall n \in \mathbb{N} \qquad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Soluzione Per $n = 1$ vale che

$$1^2 = 1 = \frac{1(2)(3)}{6}$$

Quindi è verificato il passo base. Assumiamo $P(n)$ e valutiamo $P(n+1)$, vale che

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2$$

applicando l'ipotesi induttiva

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Quest'ultima risulta essere la tesi cercata. Pertanto $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ $\square$

3 $\forall n \in \mathbb{N} \qquad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

Soluzione Per $n = 1$ vale che $\frac{1}{1(2)(3)} = \frac{1}{6} = \frac{1(4)}{4(2)(3)}$ Quindi è verificato il passo base. Assumiamo $P(n)$ e valutiamo $P(n+1)$, vale che

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

applicando l'ipotesi induttiva

$$\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{n(n+3)^2+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)}$$

Si verifica facilmente che $n(n+3)^2+4 = (n+1)^2(n+4)$. Pertanto sostituendo e semplificando si ha che

$$\frac{n(n+3)^2+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}$$

. Segue la tesi. Quindi $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
$\square$

4 $\forall n \in \mathbb{N} \qquad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$

Soluzione Per $n = 1$ si ha che $\frac{1}{1(3)} = \frac{1}{3}$. Ne segue che $P(1)$ è vero. Supponiamo $P(n)$, valutiamo $P(n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2n-1)(2n+3)}$$

applicando l'ipotesi induttiva sul primo addendo si ottiene che:

$$\frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(2n-1)+1}{(2n-1)(2n+3)} = \frac{2n^2-n+1}{(2n-1)(2n+3)} =$$

$$= \frac{(2n-1)(n+1)}{(2n-1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}$$

Quest'ultimo verifica che $P(n) \Rightarrow P(n+1)$
$\square$

5 $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5 \qquad 2^n > n^2+1$

Soluzione Per $n = 5$ vale che $2^5 = 32 > 26 = 5^2+1$, pertanto è verificata l'ipotesi induttiva. Assumiamo per ipotesi $P(n)$ e consideriamo $P(n+1)$:

$$2^{n+1} = 2^2 2$$

a cui applichiamo l'ipotesi induttiva

$$(n^2+1)2$$

Consideriamo una disuguaglianza ausiliaria

$$2n^2+2 > (n+1)^2+1$$

vale l'ipotesi induttiva su quest'ultima e si verifica (in maniera analoga) che $P'(n) \Rightarrow P'(n+1)$[1].
Sfruttiamo questa disuguaglianza nel nostro esercizio, pertanto

$$2^{n+1} > 2n^2 + 2 > (n+1)^2 + 1$$

Si è quindi provato che $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Da cui, la tesi.
□

6 $\forall x \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N} \qquad (1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$
Soluzione Si verifica facilmente che vale il passo base, infatti

$$1 + x \geq 1 + x$$

Supponiamo, allora, il passo $P(n)$ e consideriamo $P(n+1)$, vale che

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x)$$

sfruttando l'ipotesi induttiva si ottiene che

$$(1+x)^n(1+x) \geq (1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2)(1+x) =$$

$$= 1 + nx + \frac{n)n-1)}{2}x^2 + x + nx^2 + \frac{n(n-1)}{2}x^3 =$$

$$= 1 + (n+1)x + \left(\frac{n(n-1)+2n}{2}\right)x^2 + \frac{n(n-1)}{2}x^3 \geq$$

$$\geq 1 + (n+1)x + \frac{(n+1)n}{2}x^2$$

Si noti che questa è proprio $P(n+1)$. Da cui, si è verificata la tesi.
□

7 $\forall n \in \mathbb{N} \qquad 2^{n-1} \leq n!$
Soluzione Si noti che per $n = 1$ vale che

$$2^0 = 1 \leq 1!$$

pertanto è verificato il passo $P(1)$. Supponiamo vero il passo $P(n)$ e consideriamo il $P(n+1)$:

$$2^n = 2^{n-1}2 \leq n!2$$

[1] Dove con $P'(n)$ si è indicata la disuguaglianza ausiliaria al passo n

inoltre si osservi che $n \geq 1$, quindi $2 \leq n+1$:

$$n!2 \leq n!(n+1) = (n+1)!$$

Pertanto, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ e la tesi è verificata.
$\square$

CAPITOLO 3

I numeri complessi

3.1 Teoria essenziale

Sia

$$\mathbb{C} := \{(a;b) \quad | \quad a,b \in \mathbb{R}\}$$

dotato delle seguenti operazioni:

$$+ : (a;b) + (c;d) = (a+c; b+d)$$

$$\cdot : (a;b) \cdot (c;d) = (ac - bd; bc + ad)$$

allora $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ è detto il campo dei complessi.
Poniamo $i := (0,1)$, si ha che $i^2 = (0,1)^2 = (-1,0)$. Pertanto, $i = \sqrt{-1}$.

Definizione 9. *Dato un numero complesso $z = (a;b)$ chiameremo a la parte reale di z e la indicheremo con $Re(z)$. Allo stesso modo, chiamiamo b la parte immaginaria di z e la indicheremo $Im(z)$.La scrittura di z nella forma*

$$z = a + ib$$

è detta la forma algebrica del numero complesso $z = (a;b)$

Osservazioni 3.1.1. Se $z \in \mathbb{C}$ allora $z = Re(z) + iIm(z)$

Definizione 10. *Chiamiamo modulo di $z = a + ib \in \mathbb{C}$ il numero reale*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Ribadiamo che il modulo di un numero complesso (anche se puramente immaginario) è sempre un numero reale.

Definizione 11. *Dato un numero complesso $z = a + ib$ in forma algebrica, definiamo il coniugato di z come segue*

$$\bar{z} = a - ib$$

Proprietà 3.1.2. *Siano $z, w \in \mathbb{C}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora:*

1. $|z| \geq 0$
2. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
3. $|z| = |-z|$
4. $|zw| = |z||w|$
5. $|z + w| \leq |z| + |w|$ *(detta disuguaglianza triangolare)*
6. $|\lambda z| = |\lambda||z|$ *(che è equivalente alla proprietà 4, per $z \in \mathbb{R}$)*

Spesso risulta più utile identificare un numero complesso z utilizzando una seconda forma di scrittura, detta forma polare cioè tramite la coppia (ρ, θ) nel piano polare .

Osservazioni 3.1.3 (Trasformazione di coordinate)**.** Sia $z \in \mathbb{C}$ e sia $a + ib$ la sua forma algebrica. Allora

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

e valgono le seguenti relazioni su θ:

$$\begin{cases} cos\theta = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ sin\theta = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

Ne segue

$$tg\theta = \frac{b}{a}$$

con $a \neq 0$.
Quest'ultimo metodo per ricavare θ risulta "meno sicuro". In effetti, la tangente risulta la medesima sia in α che in $\pi + \alpha$. É necessario, pertanto, accertarsi di quale dei due angoli si tratta. Nello specifico, basta osservare la positività delle funzioni seno e coseno e trarre le giuste conclusioni goniometriche.[1]

Teorema 3.1.4. *Siano* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *e siano* $z_1 = \rho_1(cos\theta_1 + isin\theta_1)$ *e* $z_2 = \rho_2(cos\theta_2 + isin\theta_2)$. *Allora:*

1. $z_1 z_2 = \rho_1\rho_2(cos(\theta_1 + \theta_2) + isin(\theta_1 + \theta_2))$
2. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}(cos(\theta_1 - \theta_2) + isin(\theta_1 - \theta_2))$
3. $z^n = \rho^n(cos(n\theta) + isin(n\theta))$

Infine, può risultare anche utile una terza forma di scrittura di un numero complesso z detta scrittura esponenziale.Osservando che

$$e^{i\theta} := cos\theta + isin\theta$$

si ottiene:

$$z = \rho e^{i\theta}$$

e si possono utilizzare le regole di trasformazione precedentemente enunciate.

Teorema 3.1.5 (Radici n-esime)**.** *Sia* $z \in \mathbb{C}$ *e sia* $n \in \mathbb{N}$ *allora vi sono* n *soluzioni di*

$$w^n - z = 0$$

e si calcolano

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$$

con $k = 0, \cdots, n-1$ *e* $z = \rho e^{i\theta}$

[1] Si consiglia al lettore inesperto di goniometria la lettura di *Appunti di Goniometria*

3.2 Esercizi proposti

Si risolvano nel campo dei numeri complessi le seguenti equazioni e se ne rappresentino le soluzioni nel piano di Gauss:

1 $[(z+i)^3 - i + \sqrt{3}] \cdot [z^2 - z\overline{z}] = 0$

2 $\left(z^3 - \frac{1-i}{1+i}\right)\left(z^2\overline{z} - |z|\right) = 0$

3 $z^6 + z^3 + 1 = 0$

4 $\left(z^4 - \sqrt{3} + i\right)\left(\mathrm{Im}(iz) - 1\right) = 0$

5 $\left(z^6 - \frac{1-i}{1+i}\right)\left(z\overline{z} - 2 + i\right) = 0$

6 $\left(z^4 - \frac{1+i}{1-i}\right)\left(z^2 - |z|\right) = 0$

7 $((1-i)z^4 + (\sqrt{3}+i)^3)(\mathrm{Im}(z^2 - i)) = 0$

8 $(z^5 - (1+i)z)(\overline{z}z^2 - 2i) = 0$

9 $(z^4 - (1+i)(1-\sqrt{3}i))(\overline{z}|z|^2 - \overline{z}) = 0$

10 $(z^5 - \frac{2-2i}{\sqrt{3}-i})(\mathrm{Im}(z^2) - 1) = 0$

11 $(z^6 - \frac{3-3i}{\sqrt{3}-i})(\mathrm{Re}(z^2) - 1) = 0$

12 $z^6 - 2z^4 + (i+1)(z^2 - 2) = 0$

13 $z^3\overline{z} + 3i|z| = 0$

14 $|z|z^4 + 4\overline{z}^2 = 0$

15 $z|z| = 5z - 6$

16 $(z+1)^3 = -z^3$

17 $z^3\overline{x} + 3z^2 - 4 = 0$(sugg.: $z^3\overline{z} = z^2|z|^2$)

18 $|z^3 + 1| = z + 1$(sugg.: si provi che $z \in \mathbb{R}$.)

3.3 Soluzioni

1 $[(z+i)^3 - i + \sqrt{3}] \cdot [z^2 - z\overline{z}] = 0$
Soluzione Per la legge di annullamento del prodotto:

$$(z+i)^3 - i + \sqrt{3} = 0 \quad \vee \quad z^2 - z\bar{z} = 0$$

Posto $t := z + i$ si ha:

$$t^3 = i - \sqrt{3}$$

Vale che $\rho = \sqrt{1+3} = 2$ e che $tg(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ e quindi $\theta = \frac{5}{6}\pi$. Pertanto, applicando la formula di Eulero per le radici n-esime si hanno:

$$w_0 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{5}{6}\pi\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{5}{18}\pi}$$

$$w_1 = \sqrt[3]{2}e^{i\left(\frac{5}{6}\pi + 2\pi\right)\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{17}{18}\pi}$$

$$w_2 = \sqrt[3]{2}e^{i\left(\frac{5}{6}\pi + 4\pi\right)\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{29}{18}\pi}$$

La seconda equazione risulta

$$z^2 - z\bar{z} = 0$$

$$z(z - \bar{z}) = 0$$

Le cui soluzioni sono $z = 0$ e $z = \bar{z}$, cioè $z \in \mathbb{R}$.

2 $\left(z^3 - \frac{1-i}{1+i}\right)\left(z^2\overline{z} - |z|\right) = 0$
Soluzione L'equazione $z^3 = \frac{1-i}{1+i}$ effettuando la razionalizzazione diventa:

$$z^3 = \frac{1-i}{1+i}\frac{1-i}{1-i} = \frac{(1-i)^2}{2} = \frac{1}{2}(1+1-2i) = 1-i$$

Applicando la formula di Eulero con $\rho = \sqrt{2}$ e $\theta = \frac{7}{4}\pi$:

$$w_0 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{7}{12}\pi}$$

$$w_1 = \sqrt[6]{2} e^{i\left(\frac{7}{4}\pi + 2\pi\right)\frac{1}{3}} = \sqrt[6]{2} e^{i\frac{5}{4}\pi}$$

$$w_2 = \sqrt[6]{2} e^{i\left(\frac{7}{4}\pi + 4\pi\right)\frac{1}{3}} = \sqrt[6]{2} e^{i\frac{23}{12}\pi}$$

Il secondo fattore:

$$z^2|z| - |z| = 0$$

ricordando che $z\bar{z} = |z|^2$,

$$z|z|^2 - |z| = 0$$

$$|z|(z|z| - 1) = 0$$

Per cui $z = 0$ e $z|z| - 1 = 0$. Si osservi che z è sicuramente un numero reale positivo, in quanto pari a $\frac{1}{|z|}$. Allora $z = 1$.

3 $z^6 + z^3 + 1 = 0$
Soluzione Effettuando la sostituzione $t := z^3$ si ha l'equazione $t^2 + t + 1 = 0$, le cui soluzioni risultano

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Infine, risolvendo tramite la formula di Eulero le equazioni:

$$z^3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \vee z^3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

si ottengono le soluzioni.

4 $\left(z^4 - \sqrt{3} + i\right)(\mathrm{Im}(iz) - 1) = 0$
Soluzione Dall'equazione $Im(iz) - 1 = 0$ si ha $Im((a+ib)i) = 1$, cioè

$$Im(ai - b) = 1$$

Pertanto $a = 1$. Ne deduciamo che $b \in \mathbb{R}$

5 $\left(z^6 - \frac{1-i}{1+i}\right)(z\bar{z} - 2 + i) = 0$
Soluzione La seconda equazione risulta

$$z\bar{z} = 2 - i$$

cioè

$$|z|^2 = 2 - i \in \mathbb{C}$$

Ma questo risulta impossibile perché $|z|^2 \in \mathbb{R}$.

6 $\left(z^4 - \frac{1+i}{1-i}\right)(z^2 - |z|) = 0$
Soluzione Nella seconda equazione abbiamo

$$z^2 = |z| \in \mathbb{R}^+$$

Ne segue che $z = x \vee z = ib$ altrimenti avremmo doppi prodotti immaginari. Si ottengono due casi differenti:

$$x^2 = |x| \Leftrightarrow x = \pm 1$$

oppure

$$(iy)^2 = |y| \Leftrightarrow -y^2 = |y|$$

quest'ultima ha l'insieme delle soluzioni vuoto.

7 $((1-i)z^4 + (\sqrt{3}+i)^3)(\mathrm{Im}(z^2 - i)) = 0$
Soluzione Da $Im(z^2 - i) = 0$ effettuando la sostituzione $z = a + ib$ si ha

$$Im(a^2 - b^2 - 2abi - i) = 0$$

Questo vale se e solo se

$$ab = -\frac{1}{2}$$

8 $(z^5 - (1+i)z)(\overline{z}z^2 - 2i) = 0$
Soluzione La seconda equazione $Re(z^2) - 1 = 0$ si risolve applicando la precedente sostituzione algebrica per cui

$$a^2 - b^2 = 1$$

che rappresenta ancora un'iperbole. Il ché rappresenta un'iperbole equilatera.

9 $(z^4 - (1+i)(1-\sqrt{3}i))(\overline{z}|z|^2 - \overline{z}) = 0$

10 $(z^5 - \frac{2-2i}{\sqrt{3}-i})(\mathrm{Im}(z^2) - 1) = 0$

11 $(z^6 - \frac{3-3i}{\sqrt{3}-i})(\mathrm{Re}(z^2) - 1) = 0$

12 $z^6 - 2z^4 + (i+1)(z^2-2) = 0$

13 $z^3\overline{z} + 3i|z| = 0$
Soluzione L'equazione $\bar{z}z^3 + 3i|z| = 0$ è equivalente a

$$|z|^2 z^2 + 3i|z| = 0$$

Raccogliendo per $|z|$ si ha $z = 0$ come prima soluzione e

$$|z|z^2 + 3i = 0$$

cioè

$$|z|z^2 = -3i$$

Calcolando il modulo di entrambi si ha che

$$|z|^3 = 3$$

cioè $|z| = \sqrt[3]{3}$. Sostituendo nell'ultima equazione si ha che

$$\sqrt[3]{3}z^2 = -3i \Leftrightarrow z^2 = -i\frac{3}{\sqrt[3]{3}}$$

Da qui, basti ricavare le radici quadrate del numero, come indicato nella formula di Eulero.

14 $|z|z^4 + 4\overline{z}^2 = 0$

15 $z|z| = 5z - 6$

16 $(z+1)^3 = -z^3$

17 $z^3\overline{x} + 3z^2 - 4 = 0$(sugg.: $z^3\overline{z} = z^2|z|^2$)

18 $|z^3 + 1| = z + 1$(sugg.: si provi che $z \in \mathbb{R}$

CAPITOLO 4

Teoremi su continuità e uniforme continuità

4.1 Teoria essenziale

Teorema 4.1.1 (Permanenza del segno). *Sia* $X \subseteq \mathbb{R}$*,* $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ *punto di accumulazione per* X *ed* $f : X \to \mathbb{R}$ *per cui* $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$*.*
Se $L > 0$ *allora esiste* I *intorno di* x_0 *per cui*

$$\forall x \in X \cap I - \{x_0\} \qquad f(x) > 0$$

Se $L < 0$ *allora esiste* I *intorno di* x_0 *per cui*

$$\forall x \in X \cap I - \{x_0\} \qquad f(x) < 0$$

Teorema 4.1.2 (dei Carabinieri). *Siano* $f, g, h : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* x_0 *punto di accumulazione per* X*.*
Se $\forall x \in X - \{x_0\}$ *si ha che* $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ *e*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = L$$

allora anche

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = L$$

Definizione 12. *Sia $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diciamo che f è continua in $x_0 \in X$ se x_0 punto isolato oppure x_0 punto di accumulazione per X e*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Definizione 13. *Una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice continua in X se è continua per ogni $x_0 \in X$*

Teorema 4.1.3 (dei valori intermedi)**.** *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : I \to \mathbb{R}$ continua. Allora $\forall x_1, x_2 \in I$ tali che $f(x_1) < f(x_2)$ si ha che se $f(x_1) < y < f(x_2)$ allora esiste $\bar{x} \in I$ tale che $f(\bar{x}) = y$*

Definizione 14. *Sia $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diciamo che f è uniformemente continua se*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad | \quad \forall x, y \in X \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Teorema 4.1.4 (Heine-Cantor)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, allora f è uniformemente continua*

4.2 Esercizi proposti

1 Sia $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzioni continua tale che esiste ed è finito $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Si dimostri che f è uniformemente continua su $[a, +\infty[$.

2 Sia $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzioni continua per cui esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x\to+\infty} f(x) - \alpha x - \beta = 0$. Si dimostri che f è uniformemente continua su $[a, +\infty[$.

3 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. Si dimostri che esiste il minimo di f (suggerimento: utilizzare il teorema di Weierstrass su di un opportuno intervallo chiuso e limitato).

4 Sia $f : [a, b] \to [a, b]$ una funzione continua. Si dimostri che f ha un punto fisso, cioè un punto $\overline{x} \in [a, b]$ tale che $f(\overline{x}) = \overline{x}$ (suggerimento: si applichi il teorema di esistenza degli zeri alla funzione $g(x) = f(x) - x$).

5 Sia $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) < 0$ e $f(a) > 0$. Si provi che esiste uno zero per la funzione f.

6 Si provi che la funzione definita da $f(x) = \log x - e^x + 3x$ ha almeno due zeri in $]0, +\infty[$ e se ne stimi la posizione.

7 Si consideri la funzione $f(x) = x^2 - \log_2 x$. Si provi che esiste $x \in]1, 2[$ tale che $f(x) = e$.

4.3 Soluzioni

1 Sia $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzioni continua tale che esiste ed è finito $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Si dimostri che f è uniformemente continua su $[a, +\infty[$.

Soluzione Sia $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continua e supponiamo che esista $l := \lim_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbb{R}$.
Dalla definizione di limite si ha che

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists k > 0 \quad | \quad \forall x \geq k \quad |f(x) - l| < \varepsilon$$

Pertanto consideriamo

$$[a, +\infty[\quad = \quad [a, k] \quad \cup \quad]k, +\infty[$$

Nel primo intervallo di definizione la funzione f risulta continua su di un compatto, allora sono verificate le ipotesi del teorema di Heine-Cantor. Ne segue che la funzione è uniformemente continua in $[a, k]$.
Siano, pertanto, $x, y \in]k, +\infty[$ allora

$$|f(x)-f(y)| = |f(x)-l+l-f(y)| \leq |f(x)-l|+|f(y)-l| < \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon$$

Soluzione alternativa Sia $\varepsilon > 0$. Per la definizione di limite

$$\exists k > 0 \quad \forall x \geq k \quad |f(x) - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Per l'uniforme continuità in $[a, k]$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x, y \in [a, k]$ vale che

$$|x - y| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

inoltre, per ogni $x, y \in [k, +\infty[$, $|x - y| < \delta$ si ha

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - l| + |f(y) - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

2 Sia $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzioni continua per cui esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x\to+\infty} f(x) - \alpha x - \beta = 0$. Si dimostri che f è uniformemente continua su $[a, +\infty[$.

Soluzione Sia $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, per la definizione di limite:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k > 0 \quad \forall x \geq k \quad |f(x) - \alpha x - \beta| < \varepsilon$$

Analogamente all'esercizio precedente suddividiamo l'intervallo $[a, +\infty[$ in due. In $[a, k]$ la funzione f è uniformemente continua in compatto, allora vale Heine-Cantor e la funzione è anche uniformemente continua. Consideriamo, ora, l'intervallo $]k, +\infty[$ e siano $x, y \in]k, +\infty[$:

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - \alpha x - \beta + \alpha x + \beta - f(y)| \leq$$

$$\leq |f(x) - \alpha x - \beta| + |f(y) - \alpha x - \beta| < \varepsilon + |f(y) - \alpha x - \beta|$$

e ancora

$$\varepsilon + |f(y) - \alpha x - \beta| = \varepsilon + |f(y) - \alpha x - \beta + \alpha y - \alpha y| \leq$$

$$\leq \varepsilon + |f(y) - \alpha y - \beta| + |\alpha y - \alpha x| < \varepsilon + \varepsilon + |\alpha y - \alpha x|$$

Consideriamo, infine, la funzione $h(x) = \alpha x$. Questa è evidentemente una retta, allora essa è uniformemente continua. Quindi esiste $\delta > 0$ per cui se $|x - y| < \delta$ vale che $|h(x) - h(y)| < \varepsilon$. Ora, se $x, y \in]k, +\infty[$ e $|x - y| < \delta$, allora

$$\varepsilon + \varepsilon + |\alpha x - \alpha y| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$$

Soluzione alternativa Si osservi che la funzione $g(x) := f(x) - \alpha x$ ammette limite per x che tende all'infinito ($= \beta$) ed è continua. Pertanto valgono le ipotesi dell'esercizio precedente.

3 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$. Si dimostri che esiste il minimo di f (suggerimento: utilizzare il teorema di Weierstrass su di un opportuno intervallo chiuso e limitato).

Soluzioni Per i limiti in ipotesi si ha

$$\forall M > 0 \quad \exists a > 0 \quad | \quad \forall x \geq a \quad f(x) > M$$

e

$$\forall M' > 0 \quad \exists b < 0 \quad | \quad \forall x \leq b \quad f(x) > M'$$

Fissiamo $M, M' > 0$ e consideriamo l'intervallo chiuso e limitato $[b, a]$. Essendo questo un compatto e data la continuità di f sono verificate le ipotesi del Teorema di Weierstrass, quindi f ha un minimo in $[b, a]$. Sia x_{min} tale che $f(x_{min})$ è il minimo per f.
Ora, per ogni $x \in]-\infty, b[\cup]a, +\infty[$ allora

$$f(x) > \bar{M} \geq f(a), f(b) \geq f(x_{min})$$

con $\bar{M} = max\{M, M'\}$.
Soluzione alternativa Sia $f(\bar{x}) := \min\limits_{[-1,1]} f(x)$ che esiste per il teorema di Weierstrass. Per ipotesi, esiste $k > 1$ tale che per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$|x| \geq k \Rightarrow \quad f(x) \geq f(\bar{x})$$

Sia, ora, $f(\bar{y}) := \min\limits_{[-k,k]} f(x)$. Allora, per ogni $x \in \mathbb{R}$ valgono:
se $|x| \leq k \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(\bar{y})$
se $|x| > k \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(\bar{x}) \geq f(\bar{y})$.
In particolare, $f(\bar{y})$ è il minimo di f su $\mathbb{R}$.

4 Sia $f : [a, b] \to [a, b]$ una funzione continua. Si dimostri che f ha un punto fisso, cioè un punto $\overline{x} \in [a, b]$ tale che $f(\overline{x}) = \overline{x}$ (suggerimento: si applichi il teorema di esistenza degli zeri alla funzione $g(x) = f(x) - x$).

Soluzione Vogliamo poter applicare il teorema di esistenza degli zeri sulla funzione ausiliaria $g(x) = f(x) - x$. Infatti,

$$g(\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow f(\bar{x}) - \bar{x} = 0 \Leftrightarrow f(\bar{x}) = \bar{x}$$

Si noti che $f : [a, b] \to [a, b]$, pertanto $a \leq f(x) \leq b$. Se $f(a) = a$ o $f(b) = b$, la tesi è banalmente verificata. Se così non fosse

$$g(a) = f(a) - a < 0$$

in quanto $f(a) < a$ e

$$g(b) = f(b) - b > 0$$

in quanto $f(b) > b$. Sono, quindi, verificate le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri e la funzione f ammette un punto fisso.

5 Sia $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) < 0$ e $f(a) > 0$. Si provi che esiste uno zero per la funzione f.

Soluzione Sia $l := \lim_{x\to+\infty} f(x)$ con $l < 0$. Allora per il teorema di permanenza del segno (o del confronto) esiste un intorno $I = [a, +\infty[$ in cui la funzione f acquisisce valori negativi. Allora esiste almeno un punto $c \in [a, +\infty[$ per cui $f(c) < 0$. In particolare, per il teorema di esistenza degli zeri f ha almeno uno zero in $[a, c]$.

6 Si provi che la funzione definita da $f(x) = \log x - e^x + 3x$ ha almeno due zeri in $]0, +\infty[$ e se ne stimi la posizione.

Soluzione Si consideri la funzione $f(x) = \log x - e^x + 3x$ che risulta essere continua e definita solo per x strettamente positive. Proviamo a trovare uno zero di f nell'intervallo $[1, e]$. Si ha che per $f(1) = 3-e > 0$ e $f(e) = 1 - e^e + 3 < 0$ vale il teorema di esistenza degli zeri. Inoltre, si osservi che la funzione per $x \to 0^+$ tende a valori negativi. Allora per il teorema di permanenza del segno esiste $c \in]0, \delta[$ per cui $f(c) < 0$. Infine, per il teorema degli zeri in $[c, 1]$ si ha la tesi.
Dallo studio di questa funzione può facilmente verificarsi che questi due zeri sono unici.

7 Si consideri la funzione $f(x) = x^2 - \log_2 x$. Si provi che esiste $x \in]1, 2[$ tale che $f(x) = e$.

Soluzione Consideriamo la funzione $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$; f è continua ed è facile osservare che $f(1) = 1$ e $f(2) = 3$. Per il teorema dei valori intermedi (in una delle tre versioni enunciate) la funzione f assume tutti i valori tra 1 e 3 in quanto continua in $[1, 2]$. In particolare $1 < e < 3$ allora esiste $\bar{x} \in [1, 2]$ per cui $f(\bar{x}) = e$.
In maniera analoga si può provare l'asserto applicando il teorema degli zeri alla funzione $g(x) = f(x) - e$.

CAPITOLO 5

Il dominio delle funzioni

5.1 Teoria essenziale

Di seguito riportiamo una breve tabella con i domini delle funzioni elementari. Sia $A : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $B : Y \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\mathbf{f(x)}$	$\mathbf{Dom(f)}$
$\dfrac{A(x)}{B(x)}$	$x \in A \cap B$ e $B(x) \neq 0$
$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$	$\mathbb{R}$
$\log_a A(x)$	$x \in X$ e $A(x) > 0$
$\sqrt[2n]{A(x)}$	$x \in X$ e $A(x) \geq 0$
$\sqrt[2n+1]{A(x)}$	$x \in X$

$\sin A(x), \cos A(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan A(x)$	$A(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\cot A(x)$	$A(x) \neq k\pi$
$\arcsin A(x)$	$-1 \leq A(x) \leq 1$
$arccos A(x)$	$-1 \leq A(x) \leq 1$
$\arctan A(x)$	$x \in X$
a^x	$x \in X$
x^α	se $\alpha \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{Z} \quad x \in X \cap [0, +\infty[$
x^α	se $\alpha \in \mathbb{R}^- - \mathbb{Z} \quad x \in X \cap]0, +\infty[$

5.2 Esercizi proposti

Determinare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni:

1 $\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\left(\arctan\frac{x-\pi}{x-4}\right)}$

2 $\sqrt{100^{\sin^2 x-\cos^2 x} - 10^{\tan^2 x-2}}$

3 $\arctan\sqrt{\frac{|x^2-2|+1}{x^2-1}}$

4 $\tan\sqrt{1-\log^2_{\frac{\pi}{4}}(x+1)}.$

5 $f(x) = \log\left(\sqrt{|\sin x|} - \sqrt{2}\sin x\right).$

6 $f(x) = \sqrt{\frac{\arcsin\log_1 2x}{2\cos^2 - 5\sin x+1}}$

7 $f(x) = \log_3\left(\frac{3-|x|}{\sqrt{x+2}} - \sqrt{x}\right)$

8 $f(x) = \log_3\frac{\pi-6\arccos|x|}{\arcsin(x-1)}$

9 $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(e^{-2x}\log x^2 - e^{-x}\log x).$

10 $f(x) = \log\frac{2^x-\alpha}{\cos(\sin x)}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

11 $f(x) = \log_x(\arctan x - \alpha)$

12 $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{\pi}{2}}(2\arcsin x) - 1}.$

5.3 Soluzioni

CAPITOLO 6

Integrazione

6.1 Teoria essenziale

Definizione 15. *Sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I intervallo. Chiamiamo F* primitiva *di f se e solo se F è continua in I e vale che*

$$\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$$

Si noti che se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ allora anche $F(x) + c$ è una primitiva per $f(x)$ per ogni $c \in \mathbb{R}$.
Scegliamo di non definire il concetto di integrale, in quanto devierebbe il testo su aspetti eccessivamente teorici e con scarsa utilità negli esercizi. Osserviamo, però, il seguente risultato:

Teorema 6.1.1 (Fondamentale del calcolo integrale)**.** *Se $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua su I intervallo, allora per ogni $x_0 \in I$ la funzione*

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

è una primitiva per f.

Ne concludiamo che la risoluzione di $\displaystyle\int f(t)dt$ equivale a trovare, a meno di costanti $c \in \mathbb{R}$ una primitiva di f. A tal proposito osserviamo che se $G(x)$

è un'altra primitiva di $f(x)$ allora esiste $k \in \mathbb{R}$ per cui $G(x) = F(x) + k$. Ne segue che trovare una primitiva per f equivale a trovarle tutte a meno di una costante additiva.

Osservazioni 6.1.2. L'integrale è un operatore lineare:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

e

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Risulta essenziale la consultazione della tavola delle primitive fondamentali posta nelle **Appendici**.

Esempio 6.1.3. $\int 3x^3 + \log x - 3\cos x dx = 3\int x^3 dx + \int \log x dx - 3\int \cos x dx = 3\frac{x^4}{4} + \frac{1}{x} - 3\sin x + c$

Sfortunatamente l'integrale non è un operatore lineare rispetto al prodotto, infatti

$$\int f(x)g(x)dx \neq \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$$

Si noti che, in maniera strettamente analoga, anche la derivata è un operatore lineare nella somma e non nel prodotto. In particolare, è noto che

$$D(f\cdot g) = D(f)\cdot g + D(g)\cdot f \quad \Rightarrow \quad f(x)\cdot g(x) = \int f'(x)\cdot g(x)dx + \int g'(x)\cdot f(x)dx$$

Da questa relazione segue la **Formula di integrazione per parti**:

$$\int f'(x)\cdot g(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)dx$$

Esempio 6.1.4. $\displaystyle\int xe^x dx$

Si osservi che è possibile considerare la funzione e^x come $f'(x)$, dove $f(x) = e^x$. Di conseguenza applichiamo il metodo di sostituzione per parti con $g(x) = x$. Ne segue che

$$\int xe^x dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x dx$$

Pertanto $F(x) = xe^x - e^x + c$ con $c \in \mathbb{R}$ risulta una primitiva di xe^x.

Ulteriore metodo di risoluzione, degno di nota, è il **Metodo di sostituzione**. Spesso risulta utile sostituire una funzione $f(x)$ più volte ricorrente nell'integrale con una variabile ausiliaria t. In tal caso è necessario sostituire in maniera opportuna anche il differenziale dx. I due procedimenti che seguono ci permettono di comprendere come:

1. Se è possibile isolare all'interno dell'integrale il termine $f'(x)dx$ allora risulta particolarmente utile effettuare la sostituzione:
$$dt = f'(x)dx$$
2. Qualora non sia possibile isolare il termine $f'(x)dx$ è necessario calcolare la funzione inversa e ricavare il valore esplicito di $x = f^{-}(t)$. In tal caso, si sostituisce
$$dx = D(f^{-}(t))dt$$
che è già presente nell'integrale assegnato.

Esempio 6.1.5. $\displaystyle\int \frac{\log x}{x} dx$

É facile osservare che sostituendo $t := \log x$ la sua derivata $f'(x) = \frac{1}{x}$ si può isolare con dx. Ne segue che

$$\int \frac{\log x}{x} dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\log^2 x}{2} + c$$

Esempio 6.1.6. $\displaystyle\int \log x dx$

In questo caso, volendo porre $t := \log x$ come sopra, non è possibile trovarne la sua derivata. Ne segue che $x = e^t$ e quindi $dx = e^t dt$. Pertanto

$$\int \log x dx = \int te^t dt$$

da risolvere tramite la Formula di integrazione per parti.

Osservazioni 6.1.7. Grazie a questo metodo è possibile ampliare la tavola delle primitive note sostituendo ad x la funzione $f(x)$ e al differenziale dx il nuovo differenziale $f'(x)dx$. Ad esempio:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad \Rightarrow \quad \int f^n(x) f'(x) dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c$$

Il caso delle funzioni fratte Ultimo caso in analisi è quello delle funzioni integrande in forma di frazione:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

con $P(x), Q(x)$ polinomi.
Posto $deg(P)$ il grado del polinomio P e analogamente per Q, possiamo suddividere tre casi differenti:

$deg(P) > deg(Q)$ In questo caso si può effettuare la divisione tra il polinomio $P(x)$ e il polinomio $Q(x)$. Allora esistono $A(x)$ e $R(x)$ polinomi per cui

$$P(x) = A(x)Q(x) + R(x)$$

con $R(x)$ tale che $deg(R) < deg(P)$. Integrando si ha

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{A(x)Q(x) + R(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{A(x)Q(x)}{Q(x)} + \frac{R(x)}{Q(x)}dx$$

e quindi

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int A(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$$

Grazie a questa semplificazione abbiamo ottenuto l'integrale di un polinomio (di elementare risoluzione per la linearità dell'integrale) ed un secondo integrale che rientra nel caso 3.

$deg(P) = deg(Q)$ Questo caso è spesso trattabile per addizione e sottrazione di monomi che possano rendere il numeratore e il denominatore coincidenti che rendano la frazione pari a 1. Il resto delle "aggiunte" andranno a ricadere in un secondo integrale che è risolvibile tramite il caso 3.

$deg(P) < deg(Q)$

6.2 Esercizi proposti

6.3 Soluzioni

Parte II

Prove scritte ed esoneri

CAPITOLO 7

Esoneri

7.1 Simulazione Primo esonero (Novembre 2017)

1 Studiare l'insieme di definizione e il segno della seguente funzione

$$f(x) = \arccos\left|\frac{1}{\sqrt{e^x+1}}\right| \cdot \left(\log_2\left|\frac{x^2-4}{x-1}\right| + 1\right)$$

Soluzione Le condizioni necessarie a definire il dominio di f sono

$$\left|\frac{1}{\sqrt{e^x+1}}\right| \leq 1$$

$$\left|\frac{x^2-4}{x-1}\right| > 0$$

e

$$x - 1 \neq 0$$

É facile notare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale che

$$e^x + 1 \geq 1$$

$$\sqrt{e^x+1} \geq 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{e^x+1}} \leq 1$$

Pertanto la prima condizione è sempre verificata. Nella seconda, basta osservare che il modulo è sempre non negativo quindi ci riduciamo a studiare

$$\frac{x^2-4}{x-1} \neq 0$$

in particolare, $x \neq \pm 2$. Infine, $x \neq 1$.
Ne concludiamo che il dominio di f è $\mathbb{R} - \{-2, 1, +2\}$
Per lo studio del segno, nell'insieme di definizione di f si ha che l'arcoseno è sempre positivo, mentre poniamo la condizione

$$\left|\frac{x^2-4}{x-1}\right| < 2 \Leftrightarrow -2 < \frac{x^2-4}{x-1} < 2$$

da cui, studiando il sistema, si ottiene la seguente soluzione

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow 1-\sqrt{3} \leq x < 1 \vee x \geq 1+\sqrt{7}$$

2 $\forall n \in \mathbb{N} \qquad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

Soluzione Per $n=1$ vale che $\frac{1}{1(2)(3)} = \frac{1}{6} = \frac{1(4)}{4(2)(3)}$ Quindi è verificato il passo base. Supponiamo $P(n)$ e valutiamo $P(n+1)$, vale che

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

applicando l'ipotesi induttiva

$$\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{n(n+3)^2+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)}$$

Si verifica facilmente che $n(n+3)^2+4 = (n+1)^2(n+4)$. Pertanto sostituendo e semplificando si ha che

$$\frac{n(n+3)^2+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}$$

. Segue la tesi. Quindi $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

3 Risolvere la seguente equazione nel campo complesso:

$$((i+i)^8 z^5 - (i-1)z)(Im(z) + Re(z) - |z|^2) = 0$$

Soluzione Applicando la legge di annullamento del prodotto studiamo le due equazioni separatamente.
Per la prima equazione si osserva che $z = 0$ è una soluzione. Pertanto, raccogliendo, si ottiene:

$$z^4 = \frac{i-1}{(i+1)^8}$$

dove $i + 1 = \sqrt{2}e^{i\pi/4} \Rightarrow (i+1)^8 = 2^4 e^{i2\pi} = 16$, quindi

$$z^4 = \frac{i-1}{16}$$

Ora, applicando la formula di Eulero, si ottengono le quattro radici del numero.
Per la seconda parte, operiamo sostituendo $z = x + iy$. L'equazione diventa quindi:

$$y + x - x^2 - y^2 = 0$$

cambiando i segni si ottiene chiaramente

$$x^2 + y^2 - x - y = 0$$

che rappresenta le piano complesso una circonferenza di raggio $\frac{1}{2}$ e centro $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Tutti i punti su di essa sono soluzioni della nostra equazione.

4

$$\lim_{x\to 0} 2^{\frac{1}{x}} log(\cos x)$$

Soluzione Studiamo il limite destro e sinistro in 0.
Per $x \to 0^-$ il limite tende evidentemente a 0 in quanto l'esponenziale 2^y per $y \to -\infty$ tende a 0 e $\lim_{x\to 0} \log(\cos x) = 0$.
Diversamente, per il limite destro si ha:

$$\lim_{x\to 0^+} 2^{\frac{1}{x}} log(\cos x) = \lim_{x\to 0^+} 2^{\frac{1}{x}} \frac{log(1 + (-1 + \cos x))}{\cos x - 1} \frac{\cos x - 1}{x^2} x^2$$

Inoltre, vale che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+(-1+\cos x))}{\cos x - 1} = \lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0^+} 2^{\frac{1}{x}} x^2 = +\infty$$

Ne segue che il limite non esiste.

5 Dimostrare che $X \subseteq \mathbb{R}, x_0$ punto di accumulazione per X e $f, g : X \to \mathbb{R}$ per cui $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ed esiste $k > 0$ per cui per ogni $x \in X$ $g(x) \leq k$, allora

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$$

Vale lo stesso risultato per $g(x) > 0$?

Soluzione Per ogni $x \in X$ vale che $f(x)g(x) \leq f(x)k$. Per il teorema del confronto si ha che $f(x)k \to +\infty$ e quindi anche $f(x)g(x)$ diverge in per x che tende a x_0.
Nel secondo caso, prendendo per $x_0 = +\infty$ e per $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ per cui valgono le ipotesi necessarie, si ha che $f(x)g(x) = 1$ e, pertanto, non è verificata la tesi.

CAPITOLO 8

Prove scritte

8.1 Prova scritta del 05/09/2017

1 Si studi la seguente funzione

$$f(x) = |x| + |\arctan 2x|$$

Soluzione Si osservi che il dominio delle funzione coincide con $\mathbb{R}$ in quanto sia il polinomio x che $\arctan x$ sono definite sull'intera retta reale. Pertanto $Dom(f) = \mathbb{R}$.
É chiaro, inoltre, che la funzione risulta positiva per ogni x nel dominio. Quindi $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $f(x) = 0$ solo per $x = 0$.
Vale che

$$f(-x) = |-x| + |\arctan(-2x)| = |x| + |-\arctan 2x| =$$
$$= |x| + |\arctan 2x| = f(x)$$

per la parità del modulo e la disparità dell'arcotangente. Ne segue che la funzione $f(x)$ è pari e la studieremo solo per $x \leq 0$, ribaltando il grafico di f solo al termine dell'esercizio.
Valutiamo il comportamento di f agli estremi, quindi, solo per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} |x| + |\arctan 2x| = \infty + \frac{\pi}{2} = +\infty$$

Infine, derivando la funzione in $x \geq 0$ si ha

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{(2x)^2 + 1} \cdot 2$$

ed è chiaro che la derivata risulti positiva per ogni $x \geq 0$, quindi la funzione è crescente per x positive.
Essendo la funzione pari, verifichiamo cosa succede alla derivata in $x = 0$. Si noti che $f'(0) = 3$ per $x \to 0^+$ ed è, inoltre, noto che se una funzione è pari la sua derivata è dispari, quindi $f'(0) = -3$ per $x \to 0^-$. Ne segue che $x = 0$ è un punto angoloso. Calcoliamo, infine, la derivata seconda di f per $x \leq 0$, cioè

$$f''(x) = \left(1 + \frac{2}{(2x)^2 + 1}\right)' = -2 \cdot \frac{2 \cdot (2x) \cdot 2}{((2x)^2 + 1)^2}$$

che risulta negativa per $x \leq 0$. In particolare, f è concava in $[0; +\infty[$.

Parte III

Appendici

Tavole

8.2 Tavola dei domini delle funzioni elementari

$\mathbf{f(x)}$	$\mathbf{Dom(f)}$
$\dfrac{A(x)}{B(x)}$	$B(x) \neq 0$
$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$	$\mathbb{R}$
$\log_a A(x)$	$A(x) > 0$
$\sqrt[2n]{A(x)}$	$A(x) \geq 0$
$\sqrt[2n+1]{A(x)}$	$\mathbb{R}$
$\sin A(x), \cos A(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan A(x)$	$A(x) \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
$\cot A(x)$	$A(x) \neq k\pi$
$\arcsin A(x)$	$-1 \leq A(x) \leq 1$
$arccos A(x)$	$-1 \leq A(x) \leq 1$
$\arctan A(x)$	$\mathbb{R}$
a^x	$\mathbb{R}$

8.3 Tavola dei limiti notevoli

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log_a e}$
$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log_a e$
$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^c - 1}{x} = c$
$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$
$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
$\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$
$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

8.4 Tavola delle derivate fondamentali

f(x)	**f'(x)**
k	0
x^n	nx^{n-1}
$\|x\|$	$\frac{x}{\|x\|}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e$
$\log x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
e^x	e^x
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

8.5 Tavola delle primitive fondamentali

f(x)	**F(x)**
x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\log \lvert x \rvert$
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
e^x	e^x
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\arccos x$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$

[1]

[1]Si invita il lettore a compilare una tabella più generica in cui si sostituisce $x \mapsto f(x)$ e si moltiplica per $f'(x)$, come nel metodo di sostituzione. Ad esempio data $f(x)^n \cdot f'(x)$ la primitiva risulta $F(X) = \dfrac{f(x)^{n+1}}{n+1}$.

8.6 Tavola dei principali sviluppi in serie di Taylor

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log_a e}$
$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log_a e$
$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^c - 1}{x} = c$
$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$
$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
$\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$
$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$