# Soluzione della prova scritta di Fisica 1 del 12/01/2010

## 1 Quesito

La soluzione alla prima domanda del quesito si ricava imponendo che l'energia potenziale complessiva associata al sistema meccanico abbia derivata nulla (condizione di equilibrio) rispetto alla variazione dell'angolo $\theta$. L'energia potenziale complessiva è:

$$U(\theta) = \frac{1}{2}lsen\theta\ mg + \frac{1}{2}lsen\theta\ mg - m_c(2l - 2lcos\theta) \tag{1}$$

I primi due termini rappresentano i contributi gravitazionali associati alle sbarre ($l/2sen\theta$ è la quota del centro di massa di ciascuna sbarra). Il terzo termine è il contributo gravitazionale associato alla massa $m_c$, la cui quota è data dalla lunghezza della fune meno il tratto BO. Derivando rispetto a $\theta$:

$$\frac{dU}{d\theta} = mglcos\theta - 2m_cglsen\theta \tag{2}$$

e imponendo che $dU/d\theta$=0 si ottiene:

$$m_c = \frac{m}{2tan\theta_0} \tag{3}$$

Numericamente, per $\theta_0$=50°, si ottiene $m_c$=1.68 Kg.
Lo studio del segno della derivata seconda ($d^2U/d\theta^2(\theta_0) < 0$) suggerisce inoltre che si tratta di una posizione di equilibrio instabile.

La risposta alla seconda domanda segue dallo studio della condizione di equilibrio del sistema, ottenuta annullando la risultante delle forze e dei momenti di forze esterne applicate al sistema. All'estremo B sono applicate (vedi figura) la reazione normale N dovuta alla guida orizzontale, la tensione della fune T sia lungo l'asse x che lungo l'asse y, e la forza di attrito $F_s$. All'estremo O sono applicate la reazione vincolare R e la tensione della fune T. Su ciascuna sbarra sono inoltre applicate le rispettive forze peso. Sulla massa $m_c$ è applicata la tensone della fune T e la forza peso, entrambe verticali e di verso opposto (all'equilibrio ciò implica T=$m_c$g). Nell'estremo A sono applicate le mutue forze di contatto tra le sbarre Z, uguali e contrarie nel senso del terzo principio della dinamica. Imponendo che la risultante dei

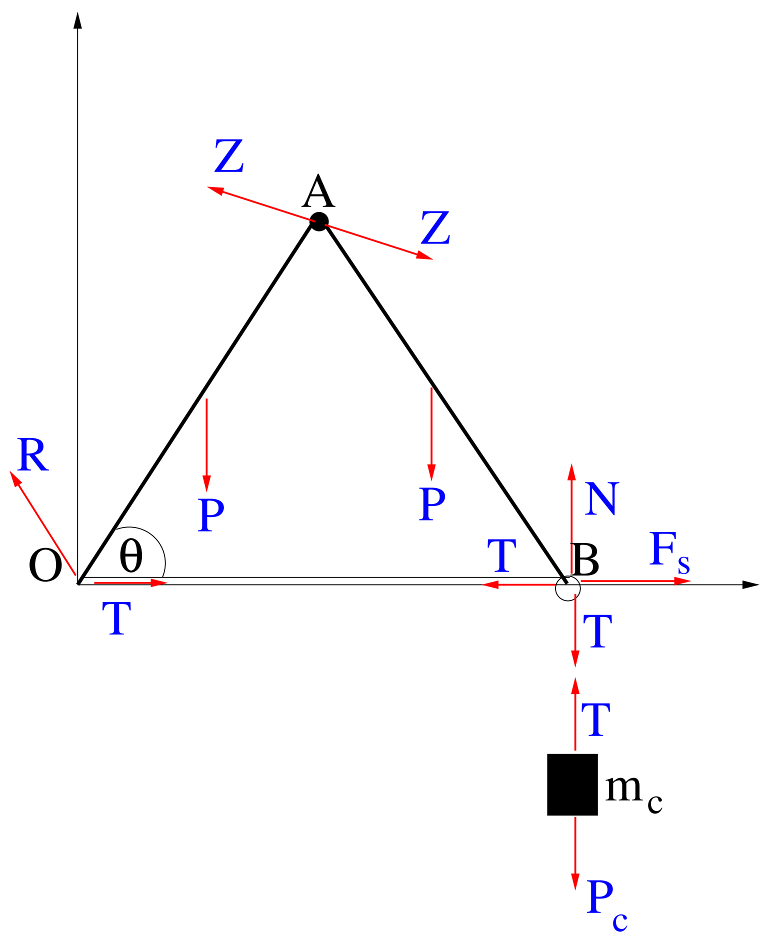


Figura 1: Quesito 1

momenti di forza applicati sulla sbarra AB, calcolati rispetti al polo A, sia nulla, si ottiene:

$$mg\frac{1}{2}lcos\theta - Nlcos\theta - F_s lsen\theta + Tlcos\theta + Tlsen\theta = 0 \tag{4}$$

Imponendo inoltre che la risultante dei momenti di forza applicati al sistema delle due sbarre calcolati rispetti al polo O, sia nulla, si ottiene:

$$-T2lcos\theta + N2lcos\theta - mg\frac{1}{2}lcos\theta - mg\frac{3}{2}lcos\theta = 0 \tag{5}$$

Da quest'ultima equazione si ricava che

$$N = g(m + m_c)$$

Sostituendo in equazione 4, si ottiene

$$F_s = m_c g - \frac{mg}{2tan\theta}$$

L'intervallo di valori di $\theta$ per cui si ha equilibrio si ottiene sfruttando la condizione

$$|F_s| \leq \mu |N|$$

Utilizzando le espressione di $F_s$ e N appena calcolate si ottiene:

$$-\mu(m + m_c) \leq m_c - \frac{m}{2tan\theta} \leq \mu(m + m_c) \tag{6}$$

Risolvendo rispetto a $\theta$ si ha:

$$\frac{m}{2\left[(1+\mu)m_c + \mu m\right]} \leq tan\ \theta \leq \frac{m}{2\left[(1-\mu)m_c - \mu m\right]} \tag{7}$$

Numericamente $42° < \theta < 61°$.

# 2 Quesito

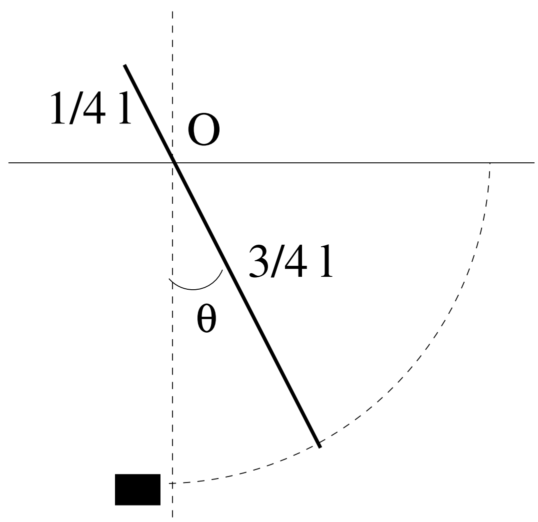


Figura 2: Quesito 2

Il calcolo del momento di inerzia della sbarra rispetto ad un asse perpendicolare al piano di rotazione e passante per il punto O si ottiene applicando il teorema di Huygens-Steiner.

$$I_O = I_{CM} + M(\frac{1}{4}l)^2 = \frac{1}{12}Ml^2 + \frac{1}{16}Ml^2 = \frac{7}{48}Ml^2 \tag{8}$$

Il primo termine rappresenta il momento di inerzia rispetto ad un asse perpendicolare al piano di rotazione e passante per il centro di massa della sbarra ed il secondo termine tiene conto, secondo il citato teorema, della distanza tra quest'asse e l'asse di rotazione passante per O. Numericamente $I_O = 0.73$ kgm$^2$

Per lo studio del moto della sbarra prima dell'urto ci si avvale del principio di conservazione dell'energia meccanica. Sul sistema agisce la forza peso (conservativa) e la reazione vincolare in O, che non fa lavoro. Si avrà quindi in generale:

$$-\frac{1}{4}lcos\theta Mg + \frac{1}{2}I_O\omega^2 = 0 \tag{9}$$

in cui il primo termine rappresenta l'energia potenziale della sbarra per un generico valore dell'angolo $\theta$ ed il secondo termine è l'energia cinetica in corrispondenza del medesimo angolo. Si è assunto come zero dell'energia potenziale la quota per cui la sbarra è in posizione orizzontale. In particolare, sulla verticale:

$$\frac{1}{2}I_O\omega_0^2 = \frac{1}{4}Mgl \tag{10}$$

e quindi

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{Mgl}{I_O}}$$

Numericamente, $\omega_0 = 5.8$ rad/s.

Durante l'urto, si conserva l'energia cinetica del sistema sbarra+massa (si tratta di un urto elastico). L'azione di forze vincolari di natura impulsiva (quelle applicate in O) implica che la quantità di moto non si conservi. Si conserva invece il momento angolare rispetto ad O, poichè il momento di forze ad esse dovuto è nullo.

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}I_O\omega_0^2 = \frac{1}{2}I_O\omega'^2 + \frac{1}{2}mv^2 \\ I_O\omega_0 = I_O\omega' + \frac{3}{4}lmv \end{gathered} \tag{11}$$

La prima (seconda) equazione rappresenta la conservazione dell'energia cinetica (del momento angolare) tra l'istante immediatamente prima dell'urto e quello immediatamente successivo ($\omega^{'}$ è la velocità angolare della sbarra subito dopo l'urto, v è la velocità acquisita dalla massa m in conseguenza dell'urto). Riorganizzando i termini e dividendo ad esempio la prima e la seconda equazione del sistema 11 si ottiene:

$$\begin{aligned} \omega_0 + \omega^{'} &= \frac{4}{3}\frac{v}{l} \\ \omega_0 - \omega^{'} &= \frac{3}{4}\frac{mvl}{I_O} \end{aligned} \tag{12}$$

Risolvendo rispetto a v si ottiene:

$$v = \frac{\omega_0}{\frac{2}{3l} - \frac{3ml}{8I_O}} \tag{13}$$

Numericamente, $v$= 7.5 m/s.

# 3 Quesito

Nella condizione di equilibrio la forza esercitata dalla molla sul pistone dovrà uguagliare la forza generata sul pistone a causa della pressione del gas.

$$kx = PA \tag{14}$$

in cui si è indicato con x l'allungamento della molla (che corrisponde all'altezza del cilindro entro cui il pistone confina il gas), con P la pressione del gas e con A la sezione del pistone. Inoltre, per la relazione dei gas perfetti, all'equilibrio vale PV=nRT, che in questo caso (V=Sx) diviene

$$PAx = nRT \tag{15}$$

Combinando le equazioni 14 e 15 si ottiene

$$kx^2 = nRT \rightarrow n = \frac{kx^2}{RT} \tag{16}$$

Numericamente, n= 4.81 mol.

Il passaggio dallo stato iniziale a quello finale avviene attraverso una trasformazione reversibile di stati quasi statici per ciascuno dei quali vale l'equilibrio meccanico espresso dall'equazione 14. Quindi, il lavoro complessivamente svolto nella trasformazione dalla stato iniziale a quello finale è:

$$L_{if} = \int_i^f PdV = \int_{x_{iniziale}}^{x_{finale}} \frac{kx}{A} Adx = \frac{1}{2}k(x_{finale}^2 - x_{iniziale}^2) \tag{17}$$

Utilizzando l'equazione 16, si ottiene

$$L_{if} = \frac{1}{2}k(x_{finale}^2 - x_{iniziale}^2) = \frac{1}{2}nR(T_{finale} - T_{iniziale}) \tag{18}$$

Numericamente, $L_{if} = 7590$ J.

La variazione di energia interna del sistema è $\Delta U = nc_V(T_{finale} - T_{iniziale})$, da cui $\Delta Q = \Delta U + \Delta L$. Combinando con l'equazione 18 si ottiene:

$$\Delta Q = nc_V(T_{finale} - T_{iniziale}) + \frac{1}{2}nR(T_{finale} - T_{iniziale}) = 3nR(T_{finale} - T_{iniziale})$$

Numericamente, $\Delta Q = 45570$ J