Soluzione della prova scritta di Fisica 1 del 8/09/2009

1 Quesito

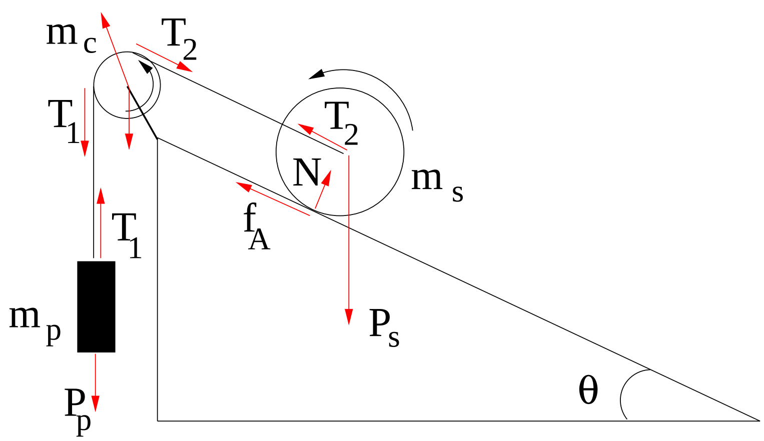

Figura 1: Quesito 1

La soluzione del primo quesito si ricava utilizzando le equazioni cardinali per il sistema meccanico costituito dalla sfera, dalla carrucola e dal peso. In un sistema di riferimento con asse x lungo il piano inclinato e verso positivo per le rotazioni scelto in senso antiorario, si ha che:

$$
\begin{aligned}
Sfera: \ \ forze\ lungo\ x \quad & -f_A + m_s g sen\theta - T_2 = m_s a_s \\
Sfera: \ \ forze\ lungo\ y \quad & N = m_s g cos\theta \\
Sfera: \ \ momento\ lungo\ z \quad & -f_A R = I_s \alpha_s \\
Cond.\ rot.\ puro\ sfera\ e\ carrucola \quad & a_s = -R\alpha_s = -r\alpha_c \\
Carrucola: \ \ momento\ lungo\ z \quad & (T_1 - T_2) r = I_c \alpha_c \\
Peso: \ \ forze\ risultanti \quad & T_1 - m_p g = m_p a_s
\end{aligned}
\tag{1}
$$

f_A rappresenta la forza di attrito statico esercitato dalla superficie del piano sulla sfera, N è la reazione normale al piano, T_1 e T_2 sono le tensioni della fune applicate nel tratto 1 e 2, a_s rappresenta l'accelerazione del centro di massa della sfera lungo l'asse x, α_s e α_c sono i moduli delle accelerazioni angolari

per la sfera e per la carrucola ed I_s e I_c i momenti di inerzia corrispondenti calcolati rispetto ad un asse passante per i rispettivi centri e perpendicolare al piano che li contiene.
Esprimendo f_A in funzione di a_s (tramite la terza e la quarta equazione) e ricavando T_2 in funzione di a_s (tramite la quinta equazione) e di T_1, a sua volta funzione di a_s (tramite la sesta equazione), si ottiene:

$$\begin{aligned} f_A &= \frac{I_s a_s}{R^2} \\ T_1 &= m_p(g + a_s) \\ T_2 &= m_p(g + a_s) + \frac{I_c a_s}{r^2} \\ m_s a_s &= -\frac{I_s a_s}{R^2} + m_s g sen\theta - m_p(g + a_s) - \frac{I_c a_s}{r^2} \end{aligned} \tag{2}$$

Dall'ultima equazione si ricava:

$$a_s = g\frac{m_s sen\theta - m_p}{m_s + m_p + \frac{I_c}{r^2} + \frac{I_s}{R^2}} \tag{3}$$

Utilizzando la definizione di momento di inerzia:

$$\begin{aligned} I_c &= \frac{1}{2} m_c r^2 \\ I_s &= \frac{2}{5} m_s R^2 \end{aligned} \tag{4}$$

si ottiene numericamente, a_s=-4.2 m/s^2, T_1= 11.2 N, T_2= 10.8 N.
La risposta alla seconda domanda deriva dalla condizione di attrito statico $|f_A| \leq \mu|N|$, dove μ identifica il coefficente di attrito. Da quest'ultima espressione, utilizzando l'equazione 2,

$$\mu \geq \mu_{min} = \frac{2}{5}\frac{a_s}{g cos\theta} \tag{5}$$

Numericamente, μ_{min}=0.19.

2 Quesito

La soluzione deriva dal principio di conservazione dell'energia meccanica. Infatti, le forze agenti sul blocchetto sono conservative (la forza peso) oppure

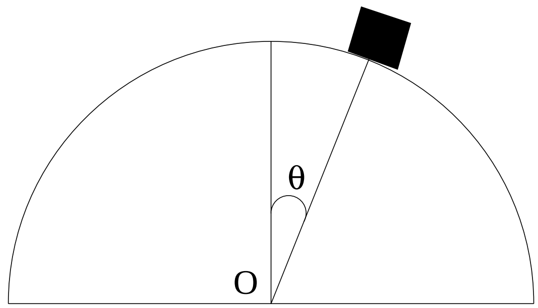

Figura 2: Quesito 2

non compiono lavoro durante il moto (la reazione vincolare è istantaneamente normale alla traiettoria sulla superficie emisferica).

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgR = \frac{1}{2}mv^2 + mgRcos\theta \tag{6}$$

in cui il termine a sinistra è l'energia meccanica del sistema (cinetica più potenziale) nella configurazione in cui il blocchetto è verticale ($\theta = 0°$). Il termine a destra si riferisce alla generica configurazione di $\theta \leq \theta_{lim}$ in cui θ_{lim} identifica l'angolo per cui il blocchetto si stacca dalla superficie emisferica. D'altronde, considerando la risultante delle forze applicate al blocchetto lungo la direzione radiale si può scrivere:

$$m\frac{v^2}{R} = mgcos\theta - N \tag{7}$$

in cui N è la reazione normale. In corrispondenza di $\theta = \theta_{lim}$ la reazione $N = 0$, ed in questo caso, dall'equazione 7 si ottiene:

$$cos\theta_{lim} = \frac{v_{\theta_{lim}}^2}{gR} \tag{8}$$

Sostituendo in equazione 6, si deriva che

$$v_{\theta_{lim}}^2 = \frac{v_0^2 + 2gR}{3} \tag{9}$$

Dall'equazione 8 si ricava infine:

$$cos\theta_{lim} = \frac{v_0^2}{3gR} + \frac{2}{3} \tag{10}$$

Numericamente, θ_{lim}=41.3°.
La risposta al secondo punto si ricava banalmente dall'equazione 7 imponendo che N=0 per $\theta = 0°$. Ciò implica che $v_{\theta_0}^2 = Rg$. Numericamente, v_{θ_0}=10 m/s.

3 Quesito

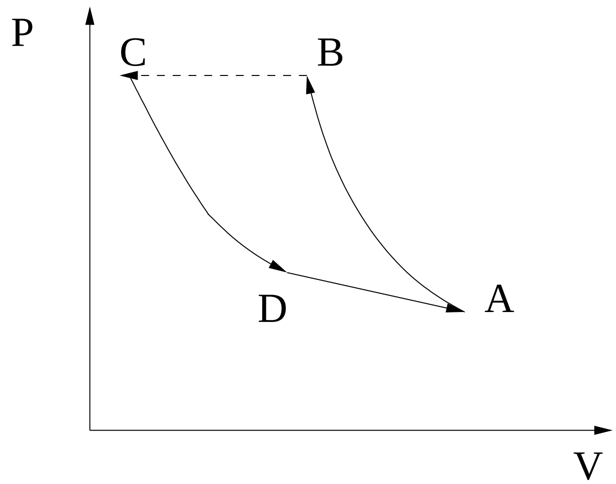

Figura 3: Quesito 3

Si procede innanzitutto con il calcolo delle variabili termodinamiche relative ai vari stati, utilizzando l'equazione di stato dei gas perfetti.

$$
\begin{aligned}
&P_A = nR\frac{T_A}{V_A} \\
&P_B = P_A\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma} && AB \ \ adiabatica \\
&T_B = T_A\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1} && AB \ \ adiabatica \\
&P_C = P_B && BC \ \ isobara \\
&V_C = nR\frac{T_C}{P_C} \\
&T_C = T_D && CD \ \ isoterma \\
&P_D = nR\frac{T_D}{V_D}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Numericamente T_B=506 K.
Il lavoro ed il calore complessivamente scambiati nelle trasformazioni proposte nel quesito possono essere calcolati come segue.
<u>Trasformazione AB</u>, adiabatica reversibile.
Q_{AB}=0, ΔE_{AB}=$nC_V(T_B - T_A)$=$-L_{AB}$, (ΔE_{AB} è la variazione di energia interna del sistema nella trasformazione AB). Numericamente, L_{AB}=-2.5

KJ.
<u>Trasformazione BC</u>, isobara irreversibile.
$\Delta E_{BC} = Q_{BC}$ - L_{BC} resta valido perchè l'energia interna è una funzione di stato. Inoltre, si ha che L_{BC}=$P_B(V_C - V_B)$ perchè la pressione rimane costante durante la trasformazione. Numericamente, L_{BC}=-2.5 KJ. Q_{BC}=ΔE_{BC} + L_{BC} = $nC_V(T_C - T_B)$ + L_{BC}. Numericamente, Q_{BC}=-6.2 KJ.
<u>Trasformazione CD</u>, isoterma reversibile.
ΔE_{CD}=0, Q_{CD}=L_{CD}. Numericamente, Q_{CD}=0.5 KJ
<u>Trasformazione DA</u>, reversivile, pressione correlata linearmente al volume.
$\Delta E_{DA} = Q_{DA}$ - L_{DA}=$nC_V(T_A - T_D)$. Il calcolo del lavoro L_{DA} si può effettuare integrando la funzione $P(V)$ lungo la trasformazione DA:

$$L_{DA} = \int P(V)dV = \int_{V_D}^{V_A} [P_D + (P_A - P_D)(V - V_D)/(V_A - V_D]dV \quad (12)$$

oppure più semplicemente osservando che lo stesso integrale è equivalente all'area del trapezio rettangolo sotteso dal segmento DA. Ciò equivale a dire che L_{DA}=$(V_A-V_D)(P_A+P_D)/2$. Numericamente, L_{DA}=3.4 KJ. Q_{DA}=ΔE_{DA} + L_{DA}. Numericamente, Q_{DA}=4.6 KJ.