Soluzione della prova scritta di Fisica 1 del 29/06/2010

1 Quesito

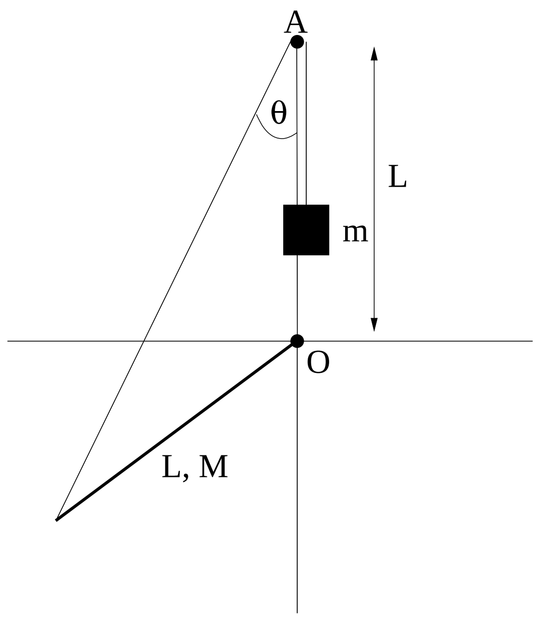

Figura 1: Quesito 1

La soluzione del quesito si può ricavare dallo studio dell'energia potenziale per il sistema constituito dalla sbarra e dal contrappeso (i vincoli sono lisci).

$$
\begin{aligned}
U(\theta) &= -\frac{1}{2}MgLcos2\theta + mg(L - (2L - 2Lcos\theta)) \\
U(\theta) &= -\frac{1}{2}MgLcos2\theta + mgL(2cos\theta - 1)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Il primo termine rappresenta l'energia potenziale associata alla forza peso applicata alla sbarretta (per ovvie ragioni geometriche l'angolo formato dalla sbarretta con la verticale è 2θ). Il secondo termine è l'energia potenziale associata al contrappeso. La sua quota infatti diminuisce, a partire dal massimo valore L, di una quantità pari alla lunghezza totale della fune

(2L) meno la lunghezza della base del triangolo isoscele che ha come lati la sbarretta ed il lato OA. Lo studio degli zeri della funzione derivata prima dell'energia potenziale fornisce i valori di θ per cui si realizza l'equilibrio per il sistema. (Le posizioni di equilibrio del sistema si possono anche ricavare imponendo che la risultate delle forze e dei momenti siano nulle, condizione di staticità).

$$\frac{dU}{d\theta} = Msen2\theta - 2msen\theta = 0 \tag{2}$$

Per m=M/2 si ottiene

$$\frac{dU}{d\theta} = sen\theta(2cos\theta - 1) = 0 \tag{3}$$

Le posizioni di equilibrio del sistema si ottengono dunque per senθ=0 (θ_{eq_1}=0°, θ_{eq_2}=180°) e per cosθ=1/2 (θ_{eq_3}=60°). La loro stabilità dipende dalla natura dei punti di stazionarietà della funzione derivata prima ricavabile dal segno della funzione derivata seconda:

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = 2MgLcos2\theta - 2mgLcos\theta \tag{4}$$

Calcolando la funzione $\frac{d^2U}{d\theta^2}$ nei punti $\theta_{eq1,2,3}$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{d^2U}{d\theta^2}(\theta_{eq_1}) > 0 \quad & \text{equilibrio stabile} \\ \frac{d^2U}{d\theta^2}(\theta_{eq_2}) > 0 \quad & \text{equilibrio stabile} \\ \frac{d^2U}{d\theta^2}(\theta_{eq_3}) < 0 \quad & \text{equilibrio instabile} \end{aligned} \tag{5}$$

2 Quesito

La soluzione alla prima domanda deriva dallo studio della configurazione di equilibrio per il sistema sbarra+sfera, calcolando i punti di stazionarietà per la funzione energia potenziale. A tale scopo, occorre innanzi tutto determinare la posizione del centro di massa del sistema. Per ragioni di simmetria, esso giacerà su una retta collineare alla sbarra e ad centro della sfera. Sfruttando le proprietà della definizione di centro di massa si può scrivere:

$$d_{cm} = \frac{m_{sb}\frac{L}{2} + m_{sf}(l + r)}{m_{sb} + m_{sf}} \tag{6}$$

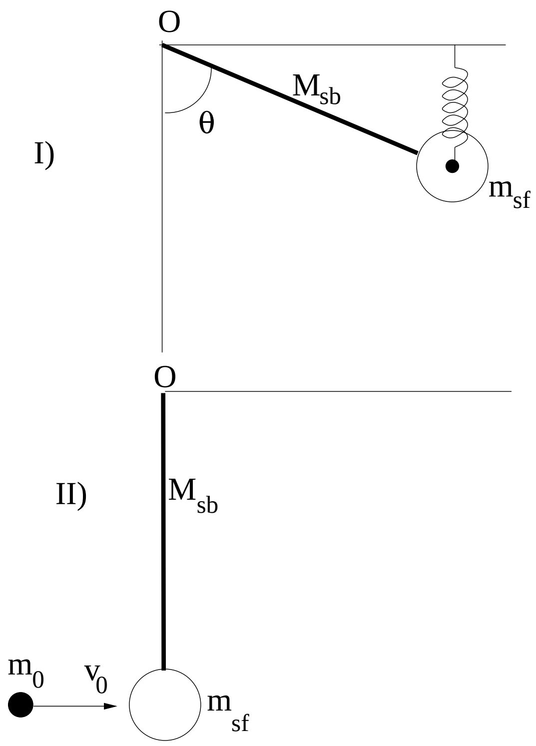

Figura 2: Quesito 2

in cui d_{cm} rappresenta la distanza del centro di massa del sistema dal punto fisso O. L'energia potenziale complessiva si può quindi esprimere come:

$$U(\theta) = -(m_{sb} + m_{sf})d_{cm}gcos\theta + \frac{1}{2}k[(r+l)cos\theta]^2 \tag{7}$$

Il primo termine rappresenta il contributo dovuto alla forza peso agente sul sistema complessivo sbarra+sfera, il secondo contributo è il termine dovuto alla forza elastica applicata nel centro della sfera. Imponendo che la derivata rispetto a θ sia nulla si ottiene (escludendo il caso $sen\theta$=0):

$$\frac{dU(\theta)}{d\theta} = (m_{sb} + m_{sf})d_{cm}gsen\theta + k(r+l)^2cos\theta sen\theta = 0 \tag{8}$$

da cui si ricava

$$cos\theta_{eq} = \frac{(m_{sb} + m_{sf})d_{cm}g}{k(r+l)^2}$$

Numericamente, θ_{eq}=81.4°.
Una volta rimossa la molla, il sistema, libero di ruotare, raggiunge la

posizione verticale ed urta anelasticamente la massa m$_0$. Nell'urto non si conserva l'energia cinetica e neppure la quantità di moto, a causa della presenza di forze di natura impulsiva (le reazioni vincolari applicate all'estremo fisso della sbarra O). Si conserva invece il momento angolare del sistema rispetto ad un polo coincidente con l'estremo fisso della sbarra O.

$$m_0 v_0 (l + r) - I_{tot} \omega_0 = I'_{tot} \omega' \tag{9}$$

ω_0 ed ω' rappresentano i moduli delle velocità angolari del sistema massa+sbarra (il cui momento di inerzia rispetto a un asse orizzontale passante per O è I_{tot}) subito prima dell'urto e del sistema sbarra+sfera+m_0 (il cui momento di inerzia rispetto ad un asse orizzontale passante per O è I'_{tot}) subito dopo l'urto. Il valore di ω_0 si ottiene applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica durante moto del sistema sbarra+sfera a partire dalla configurazione iniziale per θ=θ_{eq} fino al passaggio per la verticale (θ=0°).

$$-(m_{sb} + m_{sf}) g d_{cm} cos\theta_{eq} = -(m_{sb} + m_{sf}) g d_{cm} + \frac{1}{2} I_{tot} \omega_0^2 \tag{10}$$

Si ottiene:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2(m_{sb} + m_{sf}) g d_{cm}}{I_{tot}} (1 - cos\theta_{eq})} \tag{11}$$

Sfruttando l'additività del momento di inerzia ed il teorema di Huyghens-Steiner

$$I_{tot} = \frac{1}{3} m_{sb} l^2 + \frac{2}{5} m_{sf} r^2 + m_{sf} (l + r)^2 \tag{12}$$

Infine, imponendo che la sbarra si arresti subito dopo l'urto (ω'=0) si ottiene il valore di m_0 richiesto.

$$m_0 = \frac{I_{tot} \omega_0}{v_0 (l + r)} \tag{13}$$

Numericamente, m_0= 0.1956 kg

3 Quesito

In figura è rappresentato il ciclo termodinamico descritto nel quesito.

Il calcolo del lavoro associato alla trasformazione AB segue direttamente dal primo principio della termodinamica U$_{AB}$ = Q$_{AB}$ - L$_{AB}$, ovvero L$_{AB}$ =

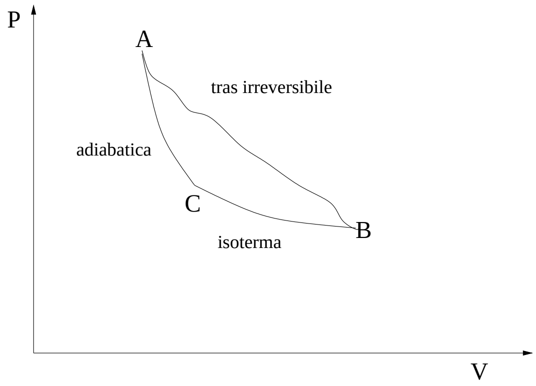

Figura 3: Quesito 3

Q_{AB} - nc_V (T_B - T_A). Numericamente, L_{AB}=9.91 kJ.
Il volume del gas nello stato C si determina sfruttando le prorietà delle trasformazioni adiabatiche reversibili.

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}$$

in cui $\gamma = c_P/c_V = 7/5$ (gas biatomico). Risulta dunque

$$V_C = \left(\frac{T_A}{T_{B,C}}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_A$$

Numericamente, $V_C = 0.050$ m^3.
Il calore scambiato nella trasformazione CB si calcola osservando che per un'isoterma è $U_{BC} = 0$. Ciò implica $Q_{BC} = L_{BC}$.

$$Q_{BC} = L_{BC} = \int_B^C p dV = nRT_{B,C} \int_{V_B}^{V_C} \frac{dV}{V} = nRT_{B,C}\ ln \frac{V_C}{V_B} \tag{14}$$

Numericamente, Q_{BC}=-8.34 kJ.
Infine il calcolo della variazione di entropia sulle singole trasformazioni si calcola come segue:

- trasfomazione AB (irreversibile). La variazione di entropia ad essa associata si può calcolare osservando che

  $$S_{AB,irrev} = S_{AC,rev} + S_{CB,rev}$$

  Poichè $S_{AC,rev}$=0 (AC è una trasformazione adiabatica reversibile) e CB è una trasformazione isoterma reversibile, si ottiene

  $$S_{AB,irrev} = S_{CB,rev} = \int_C^B \frac{dQ_{CB}}{T_{B,C}} = nR\ ln \frac{V_B}{V_C}$$

Numericamente, $S_{AB,irrev}$=29.7 J/K.

- trasformazione BC, isoterma. Dai calcoli effettuati al punto precedente si ottiene $S_{BC,rev}$= - 29.7 J/K
- trasformazione CA (isoterma reversibile) $S_{CA,rev}$= 0 J/K

Tuttavia, l'irreversibilità della trasformazione AB ha delle conseguenze sulla variazione globale di entropia del sistema universo=gas+ambiente. Durante la trasformazione irreversibile AB vale infatti che:

$$S_{AB} > \int \frac{dQ_{AB,irr}}{T}$$

Nel caso specifico, la variazione complessiva di entropia dell'universo ΔS_{univ} è

$$\Delta S_{univ} = -(\frac{Q_{AB}}{T_A} + S_{BC})$$

Numericamente, ΔS_{univ}= 9.7 J/K.