# Soluzione della prova scritta di Fisica 1 del 1/07/2009

## 1 Quesito

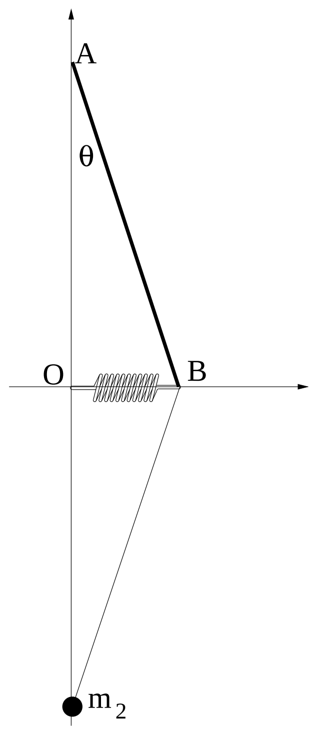


Figura 1: Quesito 1

La soluzione del primo quesito si ricava imponendo che l'energia potenziale complessiva associata al sistema meccanico abbia derivata nulla (condizione di equilibrio) nella configurazione in cui l'angolo $\theta$=45°. L'energia potenziale complessiva è:

$$U(\theta) = m_1 g l cos\theta + \frac{1}{2} k 4 l^2 (sen\theta - sen\theta_0)^2 - 2 m_2 g l cos\theta \tag{1}$$

Il primo termine rappresenta il contributo gravitazionale associato alla sbarra, il secondo quello associato alla forza elastica esercitata dalla molla, il terzo quello gravitazionale associato alla massa puntiforme $m_2$. (Si è assunto come 0 dell'enegia potenziale gravitazionale il livello corrispondente ad y=0 rispetto ad un sistema di riferimento con asse x lungo il segmento orizzontale OB ed asse y verticale). Il termine associato alla forza elastica è ricavato sfruttando l'informazione che la lunghezza a riposo della molla si ha nella configurazione $\theta_0$=30° ed ha valore $2lsen\theta_0$. L'allungamento della molla per un generico angolo $\theta$ vale quindi $2l(sen\theta - sen\theta_0)$. Derivando rispetto a $\theta$ l'espressione in eq.1, si ottiene:

$$\frac{dU}{d\theta} = -m_1 glsen\theta + 4kl^2(sen\theta - sen\theta_0)cos\theta + 2m_2 glsen\theta \tag{2}$$

Imponendo che $\frac{dU}{d\theta}$=0 in $\theta$=$\theta_{eq}$=45°, e risolvendo rispetto ad $m_2$, si ottiene

$$m_2 = \frac{m_1}{2} - \frac{2kl}{gtan\theta_{eq}}(sen\theta_{eq} - sen\theta_0) \tag{3}$$

Numericamente, $m_2$=5.8 kg.
La soluzione del quesito si può ottenere equivalentemente imponendo che la risultante delle forze esterne applicate alla sbarra ed alla massa $m_2$ sia nulla (vedi figure 1.)

$$\begin{array}{ll} sbarra,\ lungo\ x & N_A - 2kl(sen\theta - sen\theta_0) - Tsen\theta = 0 \\ sbarra,\ lungo\ y & N_B - m_1 g - Tcos\theta = 0 \\ massa,\ lungo\ x & N_C + Tsen\theta = 0 \\ massa,\ lungo\ y & Tcos\theta - m_2 g = 0 \end{array} \tag{4}$$

Si richiede inoltre che la risultante dei momenti delle forze applicate alla sbarra (ad esempio calcolati rispetto al punto A) sia nulla:

$$m_1 glsen\theta + 2lk(sen\theta - sen\theta_0)cos\theta + 2lTsen(2\theta) - 2lN_B sen\theta = 0 \tag{5}$$

Ricavando ad esempio $T$ ed $N_B$ dall'equazione 4 e sostituendo nell'equazione 5 si ricava, per $\theta = \theta_{eq}$ il valore di $m_2$, identico a quello dato nell'equazione 3.

# 2 Quesito

Durante il moto della sbarra dalla configurazione con $\theta$=90° a quella con $\theta$=0°, l'energia meccanica si conserva (i vincoli sono lisci). Assumendo che il livello di zero dell'energia potenziale gravitazionale coincida con la quota

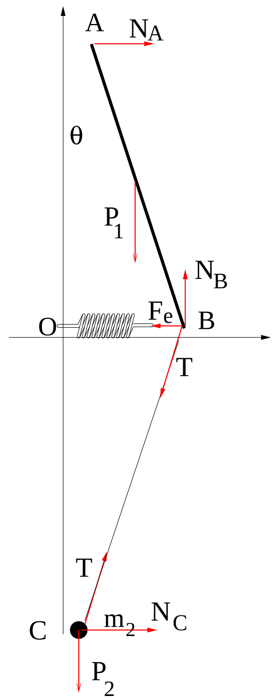


Figura 2: Diagramma delle forze applicate alla sbarra ed alla massa $m_2$

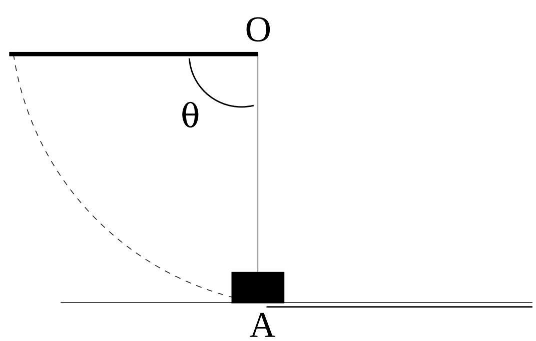


Figura 3: Quesito 2

del punto A, si ha, considerando la variazione di quota del centro di massa della sbarretta nel passaggio da una configurazione all'altra:

$$Mgl = \frac{1}{2}I\omega_0^2 + \frac{1}{2}Mgl \tag{6}$$

in cui $\omega_0$ rappresenta il modulo della velocità angolare della sbarra in $\theta$=0° (quindi subito prima dell'urto) ed $I = Ml^2/3$ è il momento di inerzia della sbarra rispetto ad un asse perpendicolare al piano del foglio e passante per O. Dall'eq.6, segue che:

$$\omega_0^2 = \frac{3g}{l} \tag{7}$$

In corrispondenza di $\theta$=0°, la sbarra urta una particella puntiforme posta in A. Durante l'urto, 1) l'energia cinetica del sistema sbarra+particella si conserva poichè si tratta di un urto completamente elastico 2) la quantità di moto del sistema non si conserva a causa della presenza della reazione vincolare di natura impulsiva applicata alla sbarra in O 3) il momento angolare del sistema calcolato rispetto ad O si conserva poichè il momento delle forze esterne rispetto ad O è nullo. Segue che:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}I\omega_0^2 \qquad & conservazione\ \ dell'energia\ \ cinetica \\ I\omega_0 = mlv_0 \qquad & conservazione\ \ del\ \ momento\ \ angolare \end{aligned} \tag{8}$$

Elevando al quadrato la seconda equazione e dividendo membro a membro, si ricava:

$$m = \frac{I}{l^2} = \frac{1}{3}M \tag{9}$$

Sostituendo questo valore ad esempio nella seconda equazione del sistema 8 e sfruttando l'eq.7 si ottiene

$$v_0 = \sqrt{\frac{MgI}{m^2 l}} = \sqrt{3lg} \tag{10}$$

Numericamente $m$=1 kg, $v_0$=7.6 m/s.
La risposta all'ultima domanda del quesito si ottiene considerando che nel tratto percorso dalla particella subito dopo l'urto, tutta l'energia inizialmente a disposizione viene dissipata a causa dell'azione della forza di attrito esercitata dal piano scabro ($|F_{attr}| = \mu_d|N| = \mu_d mg$, in cui $N$ è la reazione normale esercitata dal piano sulla particella durante il moto sulla guida orizzontale). Eguagliando quindi l'energia della particella subito dopo l'urto al lavoro fatto dalla forza di attrito lungo il cammino percorso prima di arrestarsi si ottiene:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \mu_d mgd \tag{11}$$

da cui

$$d = \frac{3l}{2\mu_d} \tag{12}$$

Numericamente, $d = 4.3$ m.

# 3 Quesito

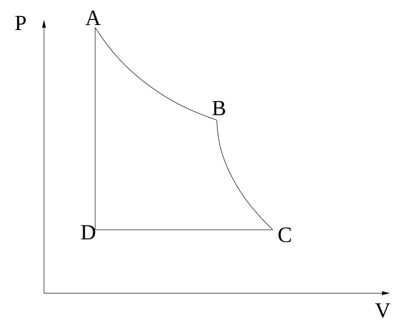


Figura 4: Quesito 3

La rappresentazione grafica del ciclo termodinamico proposto è mostrata in figura 4. Si procede innanzi tutto con la determinazione delle variabili di stato termodinamiche (pressione, volume e temperatura) per gli stati A,B,C e D. Utilizzando l'equazione di stato dei gas perfetti PV=nRT, si determinano rapidamente $V_A$ e $P_B$:

$$\begin{aligned} V_A &= \frac{nRT_A}{P_A} = \ 0.016\ m^3 \\ P_B &= \frac{nRT_B}{V_B} = P_A/2 \end{aligned} \tag{13}$$

Lungo la trasformazione adiabatica BC vale $PV^\gamma$=cost, ciò permette di

| | P | V | T |
|---|---|---|---|
| A | $6.1\ 10^5$ Pa | $0.016$ m$^3$ | 530 K |
| B | $P_A/2$ | $2\ V_A$ | $T_A$ |
| C | $10^5$ Pa | $0.071$ m$^3$ | 388 K |
| D | $P_C$ | $V_A$ | 87.5 K |

Tabella 1: Sommario delle variabili termodinamiche nei 4 stati del ciclo

calcolare $V_C$:

$$V_C = \left(\frac{P_B}{P_C}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \ 0.071\ m^3 \tag{14}$$

Dall'equazione di stato dei gas perfetti si ricavano poi $T_C$=388 K e $T_D$=87.5 K. In tabella è riportato un sommario delle variabili termodinamiche negli stati A,B,C e D.

- Trasformazione AB, isoterma:

$$L_{AB} = Q_{AB} = \int PdV = nRT_A \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = nRT_A ln\frac{V_B}{V_A} \;=\; 6716 \; J$$
$$S_{AB} = \int \frac{dQ}{T} = nR \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = nRln\frac{V_B}{V_A} \;=\; 13 \; J/K$$

- Trasformazione BC, adiabatica:

$$L_{BC} = -\Delta U = nc_V(T_B - T_C) = \; 6490 \; J$$
$$Q_{BC} = 0 \; J$$
$$S_{BC} = 0 \; J/K$$

- Trasformazione CD, isobara:

$$L_{CD} = P_C(V_D - V_C) = \; -5500 \; J$$
$$Q_{CD} = nc_P(T_D - T_C) = -19228 \; J$$
$$S_{CD} = nc_P \int_{T_C}^{T_D} \frac{dT}{T} = nc_P ln\frac{T_D}{T_C} = -95.3 \; J/K$$

- Trasformazione DA, isocora:

$$L_{DA} = 0 \; J$$
$$Q_{DA} = nc_V(T_A - T_D) = 20224 \; J$$
$$S_{DA} = nc_V \int_{T_D}^{T_A} \frac{dT}{T} = nc_V ln\frac{T_A}{T_D} = 82.3 \; J/K$$

La variazione di entropia nel ciclo termodinamico risulta nulla, come deve essere in un ciclo cosituito da trasformazioni reversibili:

$$S_{AB} + S_{BC} + S_{CD} + S_{DA} \sim= 0 \; J/K$$

Il rendimento del ciclo termodinamico vale:

$$\eta = \frac{L_{tot}}{|Q_{ass}|} \;\sim 0.29 \qquad (29\%)$$