Soluzione della prova scritta di Fisica 1 del 21/07/2009

1 Quesito

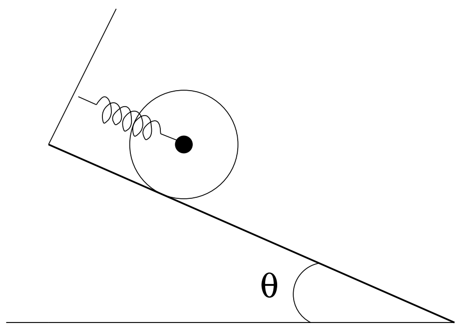

Figura 1: Quesito 1

La soluzione alla prima domanda del quesito si ricava imponendo che l'energia potenziale complessiva associata al sistema meccanico abbia derivata nulla (condizione di equilibrio) rispetto alla variazione dell'allungamento X della molla. L'energia potenziale complessiva è:

$$U(X) = mg(h - Xsen\theta) + \frac{1}{2}kX^2 \tag{1}$$

Il primo termine rappresenta il contributo gravitazionale associato al disco (h è la quota del centro di massa del disco per X=0). Il secondo termine è relativo alla forza elastica esercitata dalla molla. Derivando rispetto a X:

$$\frac{dU}{dX} = -mgsen\theta + kX \tag{2}$$

e imponendo che dU/dX=0 si ottiene:

$$X_{eq} = \frac{mgsen\theta}{k} \tag{3}$$

Numericamente, X_{eq}=7.3 cm.
Lo stesso risultato si ricava equivalentemente imponendo che la risultante

delle forze esterne (e dei momenti) applicate (applicati) al disco siano nulli (condizione di staticità). In un sistema di riferimento con asse x lungo il piano inclinato e verso positivo per le rotazioni scelto in senso antiorario, si ha che:

$$\begin{aligned} Forze\ lungo\ x & \quad -F_s + mgsen\theta - kX = 0 \\ Forze\ lungo\ y & \quad N - mgcos\theta = 0 \\ Momento\ lungo\ z & \quad -F_sR = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

F_s rappresenta la forza di attrito statico esercitato dalla superficie del piano sul disco ed N è la reazione normale al piano. Dall'equazione 4 si ricava che F_s=0 e che $X = mgsen\theta/k$.
La risposta alla seconda domanda segue dalla risoluzione delle equazioni cardinali per il disco che rotola senza strisciare.

$$\begin{aligned} Forze\ lungo\ x & \quad -F_s + mgsen\theta = ma_x \\ Forze\ lungo\ y & \quad N = mgcos\theta \\ Momento\ lungo\ z & \quad -F_sR = I\alpha \\ Cond.\ rot.\ puro & \quad a_x = -R\alpha \end{aligned} \tag{5}$$

a_x rappresenta l'accelerazione del centro di massa lungo l'asse x, α è l'accelerazione angolare ed I il momento di inerzia del disco calcolato rispetto ad un asse passante per il centro del disco e perpendicolare al piano che lo contiene. Dal sistema di equazioni 5 si ottiene il valore della forza di attrito statico F_s

$$F_s = \frac{mgsen\theta}{1 + \frac{mR^2}{I}} \tag{6}$$

D'altronde $|Fs| \leq \mu|N|$, dove μ identifica il coefficente di attrito. Da quest'ultima condizione si ricava

$$\mu \geq \mu_{min} = \frac{tan\theta}{1 + \frac{mR^2}{I}} \tag{7}$$

I deriva dalla definizione di momento di inerzia. Si sfrutta inoltre l'informazione relativa all'andamento della densità del disco $\sigma(r) = c/r$. La massa del disco si può esprimere come:

$$m = \int dm = \int \sigma(r)dS = \int_0^R \frac{c}{r} 2\pi r dr = 2\pi cR \tag{8}$$

Il momento di inerzia è:

$$I = \int r^2 dm = \int_0^R r^2 \frac{c}{r} 2\pi r dr = 2\pi c \int_0^R r^2 dr = \frac{mR^2}{3} \tag{9}$$

Sostituendo l'espressione di I nell'equazione 7 si ottiene

$$\mu_{min} = \frac{tan\theta}{4} \tag{10}$$

Numericamente, μ_{min}=0.14.

2 Quesito

Figura 2: Quesito 2

Durante l'urto la quantità di moto del sistema m+M si conserva (non agiscono forze esterne di natura impulsiva). L'urto avviene nella configurazione in cui la molla ha raggiunto la massima elongazione (in corrispondenza cioè del punto di inversione della velocià per la massa M) ed è completamente anelastico (m resta conficcata in M). Si ha quindi che:

$$mv_0 = (M+m)v' \rightarrow v' = \frac{mv_0}{m+M} \tag{11}$$

in cui v' rappresenta la velocità del sistema m+M subito dopo l'urto. Numericamente, v' =2.7 m/s.
Il valore della massima ampiezza di oscillazione A' si ottiene applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica per il sistema m+M:

$$\frac{1}{2}kA_0^2 + \frac{1}{2}(m+M)v'^2 = \frac{1}{2}kA'^2 \tag{12}$$

il termine a sinistra descrive i contributi di energia potenziale e cinetica del sistema subito dopo l'urto ed il termine a destra rappresenta la massima energia potenziale accumulabile dal sistema. Risolvendo:

$$A' = \sqrt{A_0^2 + \frac{m^2v_0^2}{k(m+M)}} \tag{13}$$

Numericamente, A'=0.53 m.
Infine l'energia dissipata durante l'urto si ricava calcolando la variazione di energia cinetica tra l'istante subito prima e quello subito dopo l'urto.

$$E_{diss} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}(m+M)v'^2 \tag{14}$$

Numericamente, E_{diss}= 41 J.

3 Quesito

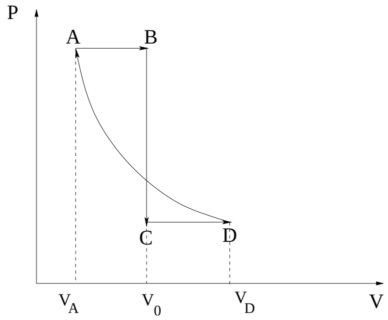

Figura 3: Quesito 3

Il lavoro complessivamente svolto nel ciclo è dato dalla somma dei contributi relativi a ciascuna trasformazione:

$$
\begin{aligned}
&L_{AB} = P_{A,B}(V_B - V_A)\\
&L_{BC} = 0\\
&L_{CD} = P_{C,D}(V_D - V_C)\\
&L_{DA} = \int PdV = nRT_{A,D}\int_{V_D}^{V_A}\frac{dV}{V} = nRT_{A,D}ln\frac{V_A}{V_D}
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Si calcola quindi il valore $V_0 = V_B = V_C$ per cui il lavoro complessivo nel ciclo $L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} + L_{DA}$ si annulla:

$$
P_{A,B}(V_0 - V_A) + P_{C,D}(V_D - V_0) + nRT_{A,D}ln\frac{V_A}{V_D} = 0 \tag{16}
$$

Si osserva inoltre che poichè la trasformazione AD è isoterma e la trasformazione CD è isobara, si ha:

$$
\frac{P_AV_A}{nR} = T_A = T_D = \frac{P_DV_D}{nR} = \frac{P_CV_D}{nR} \tag{17}
$$

Sostituendo nell'equazione 16 a P_A e P_C le corrispettive espressioni in funzione di T_A ricavate dall'equazione 17, si ottiene:

$$
\frac{nRT_A}{V_A}(V_0 - V_A) + \frac{nRT_A}{V_D}(V_D - V_C) + nRT_Aln\frac{V_A}{V_D} = 0 \tag{18}
$$

da cui discende svolgendo i calcoli:

$$V_0 = \frac{V_A V_D}{V_D - V_A} ln \frac{V_A}{V_D} \tag{19}$$

Numericamente, V_0=2 10^{-3} m^3.
Il numero di moli del gas si ricava dall'equazione di stato dei gas perfetti nello stato C, note P_C e T_C.

$$n = \frac{P_C V_C}{R T_C} \tag{20}$$

Numericamente, n=0.081 mol.
Di seguito il quadro riassuntivo delle variabili termodinamiche per ciascuno stato.

	P	V	T
A	5 10^5 Pa	10^{-3} m^3	750 K
B	P_A	2 10^{-3} m^3	5 T_C
C	(1/5) P_A	V_B	300 K
D	(1/5) P_A	5 V_A	750 K

Tabella 1: Sommario delle variabili termodinamiche nei 4 stati del ciclo

La variazione di entropia su ciascuna trasformazione si calcola come segue:

$$\begin{aligned}
S_{AB} &= nc_P \int_{T_A}^{T_B} \frac{dT}{T} = nc_P ln \frac{T_B}{T_A} = 1.64\ J/K \\
S_{BC} &= nc_V \int_{T_B}^{T_C} \frac{dT}{T} = nc_V ln \frac{T_C}{T_B} = -2.70\ J/K \\
S_{CD} &= nc_P \int_{T_C}^{T_D} \frac{dT}{T} = nc_P ln \frac{T_D}{T_C} = 2.14\ J/K \\
S_{DA} &= nR \int_{V_D}^{V_A} \frac{dV}{V} = nR ln \frac{V_A}{V_D} = -1.08\ J/K
\end{aligned} \tag{21}$$

Per verifica, la variazione complessiva di entropia nel ciclo interamente costituito da trasformazioni reversibili è zero.