DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E FISICA "ENNIO DI GIORGI"
Corso di Laurea Magistrale in Matematica
Scheda del corso di Istituzioni Analisi Superiore II – A.A. 2018/19, II semestre – 6 CFU
Prof. Diego Pallara

Obiettivi del corso Il corso si propone di far conoscere agli studenti gli elementi di base della teoria astratta della misura e i metodi elementari dell'Analisi funzionale negli spazi di funzioni sommabili. Vengono studiati i duali degli spazi delle funzioni continue su un compatto metrico e sugli spazi di funzioni sommabili e si danno criteri di compattezza forte in tali spazi. Si studiano le principali proprietà ed applicazioni della trsformata di Fourier. In particolare, lo studente dovrebbe essere in grado di risolvere problemi del tipo:
Determinare proprietà delle misure e delle funzioni misurabili.
Fornire semplici stime di integrali.
Studiare i funzionali lineari e continui sugli spazi di funzioni continue e sugli spazi di funzioni sommabili.
Determinare proprietà e applicazioni delle trasformate di Fourier di funzioni.
Programma del corso

1. *Teoria della misura:* Richiami sulle proprietà delle famiglie di insiemi. Anelli, algebre, σ-algebre. Funzioni di insieme: additività, σ-additività e subadditività. Spazi misurabili, misure positive e loro proprietà (monotonia, criterio di coincidenza). Misure esterne e teorema di estensione di Carathéodory. Assoluta continuità e singolarità di due misure e decomposizione di Lebesgue. Misure in $\mathbb{R}$, funzioni a variazione limitata e funzioni assolutamente continue. Misure di Borel regolari in spazi metrici. Funzioni misurabili, integrale di Lebesgue rispetto a una misura positiva. Teoremi di Levi, Fatou, Lebesgue sul passaggio allimte sotto il segno di integrale e applicazioni agli integrali dipendenti da parametri. Costruzione della misura prodotto e teorema di Fubini-Tonelli. Misura di Lebesgue in $\mathbb{R}$ e in $\mathbb{R}^n$. Misura immagine e cambiamento di variabili negli integrali multipli. Formula dell'area.

2. *Spazi L^p:* Nozioni introduttive sugli spazi L^p, $1 \leq p \leq \infty$. Diseguaglianze di Cauchy-Schwarz, Hölder. Minkowski, Jensen. Completezza degli spazi L^p, separabilità. Teoremi di Lusin, Egorov; diseguaglianze di Chebyšhev, Markov. Teoremi di Lusin ed Egorov. Punti di Lebesgue. Prodotto di convoluzione e diseguaglianza di Young. Funzioni $C_c^\infty(\Omega)$, approssimazione dell'identità, approssimazione di funzioni L^p con funzioni regolari, densità di $C_c^\infty(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$.

3. *Spazi duali:* Misure reali e rappresentazione dello spazio duale di $C(X)$, con X metrico compatto. Complementi sulle topologie deboli in spazi di Banach. Uniforme convessità e riflessività. Rappresentazione del duale di di $L^p(X, \mu)$, $1 \leq p < \infty$. Criteri di compattezza forte in L^p. Convergenza debole in L^p, convergenza in misura.

4. *Trasformata di Fourier:* La Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Proprietà della trasformata. Regole algebriche e analitiche di trasformazione. Convoluzione. Spazio di Schwartz. Teorema di inversione. La Trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Principali trasformate. Applicazioni: il problema di Dirichlet nel semispazio (nucleo di Poisson) e l'equazione del calore in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Equazione del calore e moto browniano.

5. *Serie di Fourier:* convergenza puntuale.

Conoscenze Preliminari: Analisi matematica di base; topologia generale; algebra lineare.
Modalità di verifica delle conoscenze acquisite: l'esame consiste di due prove: nella prima (scritta) è richiesta la risoluzione di esercizi del tipo elencato. Per accedere alla seconda prova bisogna superare la prima. Nella seconda prova (orale) è richiesta l'esposizione di risultati presentati nel corso: definizioni, enunciati, dimostrazioni, esempi.
Orario di ricevimento: L'orario di ricevimento è pubblicato sulla pagina
`https : //www.matfis.unisalento.it/scheda_personale/ − /people/diego.pallara`
Testi di riferimento:
Ambrosio, Da Prato, Mennucci: *Introduction to measure theory and integration*, Ed. Della Normale 2011
Haïm Brézis: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations,* Springer 2010.
A.N. Kolmogorov, S.V. Fomin: *Elementi di teoria delle funzioni e di Analisi Funzionale,* MIR 1980.
E. Lieb, M. Loss: *Analysis,* AMS 2001. W. Rudin, *Real and complex analysis,*, McGraw-Hill, 1987.