Nei precedenti fogli di lavoro, abbiamo esaminato in che modo:

- reperire i dati finanziari delle attività quotate;

- calcolarne il rendimento a partire dai prezzi;

- determinare:
    Rendimento Medio (quindi, il Rendimento Atteso);
    Varianza e Deviazione Standard (Sigma);
    la matrice Varianze-Covarianze;

Disponendo della matrice Varianze-Covarianze, siamo anche in grado di:

- costruire portafogli di attività (in base a quote prefissate arbitrariamente);
- determinare le caratteristiche principali per ciascun portafoglio:
    - Rendimento Atteso,
    - Varianza e Sigma,
    - Covarianza e Correlazione tra due portafogli;

- simulare la relazione Sigma-Rendimento atteso al variare delle quote;

- determinare "Le Frontiere dei Portafogli Efficienti":
    - in assenza di titoli risk-free (determinando le quote ottimali di $\mathbf{P_{mr}}$ ed **M**)
      (simulazione frontiera considerando: $\mathbf{P_{mr}}$, **M**)

    - con un titolo risk-free (determinando le quote ottimali di **M**)
      (simulazione frontiera considerando: $\mathbf{P_0}$, **M**).

Ora proseguiremo a:

- individuare la **"C M L "**;

- esaminare alcuni **usi** della "C M L";

per poi procedere ad individuare:

- I "**BETA**" delle singole attività;

- la **"Security Market Line"**.

Apriamo il file Excel "**CML - BETA - SML**".

---

1. CAPM: “C M L” e Uso della "C M L"

1a. LA CAPITAL MARKET LINE: "C M L"

Considerando le attività rischiose, il Portafoglio di mercato dovrebbe incorporare TUTTE quelle attività che rappresentano l'intero mercato dei capitali.

Quindi, data l'esistenza di un titolo risk-free, la *frontiera efficiente*, costruita combinando in proporzioni differenti il **portafoglio di mercato** con il **titolo privo di rischio**, viene anche indicata come linea del mercato dei capitali o "***Capital Market Line***" (***CML***).

Sotto le ipotesi del CAPM, la CML esprime, perciò, *la relazione di equilibrio tra il rendimento atteso e il rischio dei portafogli efficienti*:

$$\mu_P = r_0 + \left(\frac{\mu_M - r_0}{\sigma_M}\right)\sigma_P$$

Per individuare questa relazione è sufficiente far riferimento a due portafogli efficienti:

I° Portafoglio

Il "I° portafoglio" è **"P0"** (l'attività risk-free)

IL portafoglio **"P0"** è rappresentato dal titolo risk-free e quindi caratterizzato da un Rendimento atteso pari a " r_f " e Varianza pari a zero.

II° Portafoglio

Il "II° portafoglio" è, invece, il portafoglio di Mercato "**M**".

"*Il **portafoglio di mercato** è il portafoglio composto da tutti i titoli (rischiosi) presenti sul mercato, dove le quote dei diversi titoli sono quelle detenute in equilibrio dal mercato nel suo complesso, ossia quelle per cui, per ciascun titolo, la domanda e l'offerta di mercato sono in equilibrio.*"

IL portafoglio **"M"** è, dunque, rappresentato da una combinazione ottimale (cioè, le quote ottimali) delle sole attività rischiose e caratterizzato da un Rendimento atteso pari alla media ponderata dei rendimenti attesi delle singole attività e dalla relativa Varianza.

Il "**vettore M**" delle quote (che costituiscono il portafoglio di Mercato) può essere ottenuto dal rapporto:

$$: \frac{S^{-1}[R - r_f]}{\sum S^{-1}[R - r_f]},$$

dove il numeratore (quello che abbiamo chiamato "vettore colonna z") risulta dal prodotto tra:

- **l'inversa** della matrice Varianze-Covarianze "**S"** e
- il vettore colonna **"(R - r_f)"** (quello che abbiamo chiamato "vettore colonna "Media - C").

mentre il denominatore risulta dalla sommatoria degli elementi del suddetto prodotto.

(Come si può notare, l'unica differenza è che abbiamo sostituito il rendimento del titolo risk-free al valore della costante arbitraria "C".)

Individuate le quote del portafoglio di Mercato, come al solito procediamo al calcolo:

- del Rendimento Medio,
- della VARIANZA,
- del Sigma.

La **Covarianza** e il conseguente indice di **Correlazione** tra **"P0"**ed "**M**" sono invece pari a zero (per l'ipotesi di assenza di correlazione tra titolo risk-free e attività rischiose).

C M L con Excel

Nel foglio di lavoro "C_M_L", le prime tre tabelle riportano sempre, la **matrice Varianze-Covarianze "S"**, i **rendimenti medi** di quattro attività e il **rendimento** del titolo **risk-free**.

Tramite le formule composte sono state calcolate le quote e le caratteristiche del portafoglio di mercato "**M**" (il portafoglio **"P0"** è ovviamente dato).

Disponendo di due portafogli efficienti, possiamo procedere alla consueta simulazione di altri portafogli e alla rappresentazione grafica della relazione rischio-rendimento.

Come possiamo osservare dal grafico:

- i due portafogli "**P0**" ed "**M**" identificano una frontiera efficiente rappresentata da una semi-retta con:

intercetta pari a:

" r_f "

ed inclinazione pari a:

$$\left(\frac{\mu_M - r_0}{\sigma_M}\right)$$

Inserendo nel grafico la linea di tendenza (OLS) e visualizzando la formula della risultante equazione, troviamo conferma dei valori dell'intercetta e dell'inclinazione della semi-retta.

- i portafogli collocati tra "**P0**" ed "**M**" identificano combinazioni tra Portafoglio di mercato e titolo risk-free;

- i portafogli collocati oltre "**M**" identificano "**Portafogli con Debito**";

- qualunque altro portafoglio che non si trovi sulla "**CML**" è un portafoglio (o un'attività) per il quale, a parità di rendimento, il rischio è maggiore.

Come si può osservare, le singole attività giacciono al di sotto della frontiera efficiente.

1b. Uso della "C M L"

Definita la CML, è possibile individuare il rendimento atteso (in equilibrio) di ciascun portafoglio efficiente.

Per far ciò, è sufficiente conoscere il rendimento atteso del portafoglio di mercato e la sua deviazione standard (oltre, naturalmente, al rendimento del titolo risk-free).

Per qualsiasi portafoglio, in base all'equazione della CML, possiamo desumere quale dovrebbe essere il rendimento atteso (di equilibrio) che corrisponde ad un dato livello di rischio.

Nel foglio di lavoro "CAPM ed uso della C M L", innanzitutto, viene mostrato come i rendimenti attesi di portafoglio precedentemente calcolati siano esattamente gli stessi di quelli ottenuti mediante l'utilizzo dell'equazione della CML (in base alla formula impostata per la colonna "CML").

Le due relazioni "rischio-rendimento", graficamente, risultano infatti completamente sovrapposte.

Da un primo punto di vista, il CAPM rappresenta, dunque, uno strumento "*PRESCRITTIVO*" in base al quale un investitore, le cui preferenze sono descritte in termini di media e varianza di portafoglio, può decidere *COME* SCEGLIERE IL PORTAFOGLIO OTTIMALE (secondo le sue preferenze).

In altre parole, il CAPM rappresenta uno strumento di "***ottimizzazione individuale di portafoglio***" (il punto di tangenza tra curve di indifferenza e CML).

Possiamo dunque pensare ad un broker che debba suggerire al proprio cliente quale sia la combinazione ottimale "**P0**" / "**M**" (il portafoglio ottimo) che - IN BASE ALLA QUOTA $\mathbf{a_0}$ - gli permetterebbe:

a) di sopportare un certo livello di rischio (al quale corrisponde uno specifico rendimento atteso),

oppure

b) di ottenere un certo rendimento atteso (al quale corrisponde uno specifico livello di rischio).

Nella seconda parte del foglio di lavoro "CAPM ed uso della C M L", sono riportate le caratteristiche dei due portafogli "**P0**" e "**M**", la loro covarianza e il calcolo di un generico portafoglio "**p**" (al variare della quota di investimento in "**P0**").

Partiamo da un portafoglio "**p**" per il quale la quota in "**P0**" sia pari ad "1" (cioè, $a_0 = 1; (1 - a_0) = 0$).

Ovviamente otteniamo:

- media e sigma pari al portafoglio "**P0**" (il titolo risk-free);

- quote delle singole attività rischiose pari a zero

(ogni quota è data dal prodotto tra la quota di "**M**" e le quote delle singole attività che costituiscono "**M**") ($a_i = (1 - a_0) * a_{iM}$) .

Al variare della quota otteniamo, ovviamente, differenti combinazioni rischio-rendimento.

Obiettivo (I): sigma di portafoglio

Supponiamo, al contrario, di volere individuare quale sia la quota ottimale corrispondente ad uno specifico portafoglio il cui sigma sia pari a “30,00%”.

Possiamo utilizzare uno strumento di EXCEL per il calcolo di un "valore obiettivo" che ci permetterà di generalizzare il calcolo per qualsiasi altro valore obiettivo.

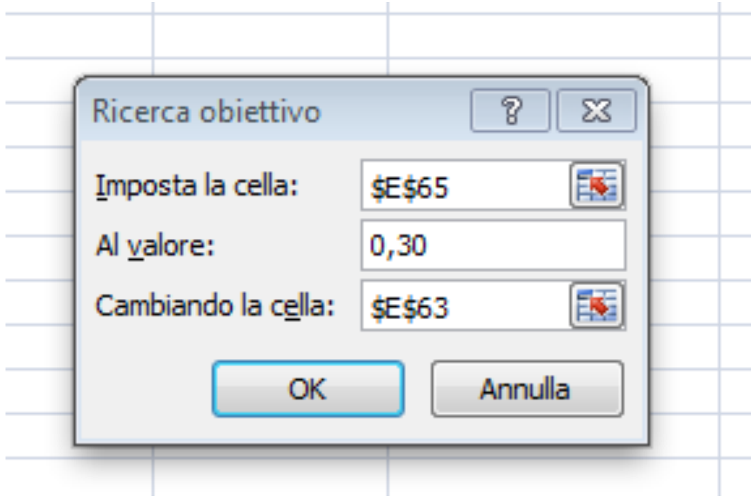
(Cancelliamo i puntini nella cella evidenziata in giallo relativa alla quota di "**P0**”)

Dopo aver impostato:

- le celle per il calcolo di media e sigma in base alla quota di "**P0**"

- le celle per il calcolo delle quote delle singole attività rischiose

Dal menù DATI l ANALISI DI SIMULAZIONE l **RICERCA OBIETTIVO:**



- impostiamo la cella relativa al calcolo dell'**obiettivo** (nel nostro esempio, quella del **sigma** di portafoglio ($E$65))

- scriviamo il **valore obiettivo** (nel nostro esempio, "0,30")

- impostiamo la **cella** rispetto alla quale si determina l'obiettivo (nel nostro esempio, quella relativa alla **quota** del portafoglio "**P0**")

EXCEL restituisce il valore della quota che permette di raggiungere l'obiettivo di un sigma di portafoglio = 0,30 (pari al "30%").

<u>Il risultato è una quota **a_0 = 43,07% (0,4307)**</u>**.**

(Le quote di investimento delle singole attività rischiose sono ottenute di conseguenza in base ad un semplice prodotto)

<u>Obiettivo (II): rendimento di portafoglio</u>

Supponiamo di volere individuare quale sia la quota ottimale corrispondente ad un portafoglio il cui rendimento sia pari a "10%" (ossia compreso tra quello di **P0** e quello di "**M**").

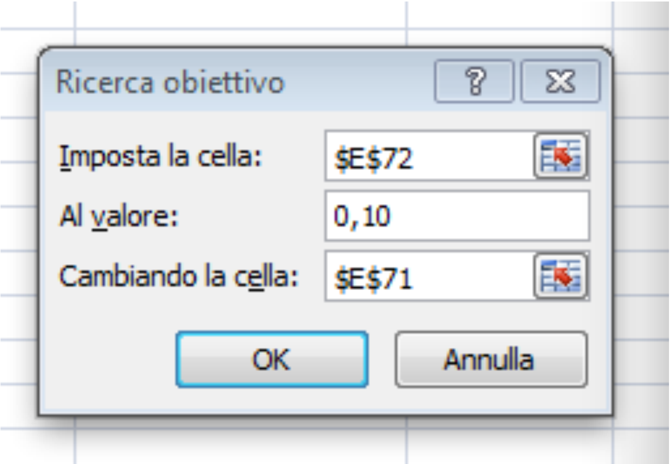
(Cancelliamo i puntini nella cella evidenziata in giallo relativa alla quota di "**P0**")

Dopo aver impostato:

- le celle per il calcolo di media e sigma in base alla quota di "**P0**"

- le celle per il calcolo delle quote delle singole attività rischiose

Dal menù DATI I ANALISI DI SIMULAZIONE I **RICERCA OBIETTIVO:**



- impostiamo la cella relativa al calcolo dell'**obiettivo** (nel nostro esempio, quella della **media di portafogli**o ($E$72))

- scriviamo il **valore obiettivo** (nel nostro esempio, "0,10")

- impostiamo la **cella** rispetto alla quale si determina l'obiettivo (nel nostro esempio, quella relativa alla **quota** del portafoglio "**P0**")

EXCEL restituisce il valore della quota che permette di raggiungere l'obiettivo di una media di portafoglio = - 0,10 (pari al "10%").

Il risultato è una quota **a_0 = 46,45% (0,4645).**

Se invece volessimo ottenere un rendimento maggiore di quello del portafoglio di mercato, dovremmo aspettarci un rischio maggiore di quello del portafoglio di mercato e investire in un portafoglio con debito ($a_0 < 0$).

2. I BETA E LA SECURITY MARKET LINE: "S M L" (un modello perfetto ! …?)

Definita la CML, è possibile definire la SML: "**Security Market Line**" o "**Linea del Mercato delle Attività**".

Si può dimostrare che se esistono "*N*" attività rischiose ed esiste un titolo risk-free, *la "**SML**" esprime la relazione di equilibrio tra il rendimento atteso e il rischio delle singole attività finanziarie, dove il rischio è espresso dal "Beta" delle attività.*

L'equazione della "**SML**", pertanto, risulta:

$$E(r_i) = r_f + \frac{\mathrm{Cov}(r_i, r_M)}{\sigma_M^2}[E(r_M) - r_f]$$

con:

$$\beta_i = \frac{\mathrm{Cov}(r_i, r_M)}{\sigma_M^2}.$$

Per poter determinare questa equazione è, perciò, sufficiente conoscere esclusivamente due variabili (oltre al rendimento del titolo risk-free):

- il rendimento atteso dal mercato nel suo complesso (quello di "**M**");

- il beta del titolo considerato.

Da un secondo punto di vista, perciò, il CAPM introduce uno strumento "*__DECRITTIVO__*" in base al quale gli investitori si aspettano che la relazione rischio-rendimento delle singole attività sia descritta dalla Security Market Line.

In altre parole, il CAPM descrive un "**__equilibrio generale__**" che definisce la relazione rischio-rendimento di ogni singola attività finanziaria (..la SML)

Per individuare l'equazione della "SML" è necessario procedere in tre fasi:

a) individuare il portafoglio di mercato "**M**";

b) determinare i " **Beta** " delle singole attività.

Infine, come <u>test di validità</u>:

c) regredire i rendimenti medi delle singole attività sui rispettivi Beta, ottenendo perciò: I Parametri della " **S M L** "

2a. L'individuazione del portafoglio di mercato

Nel foglio di lavoro "Beta ed "SML" è riportata la matrice dei rendimenti annuali (" **Rend** ") di sei attività, per dieci anni (dal 1974 al 1983).

Procediamo a calcolare:

- il rendimento medio (" **media** ") tramite la funzione Media

- la matrice varianze-covarianze:

  MATR.PRODOTTO(MATR.TRASPOSTA("**Rend**" - "**media**") ; "**Rend**" **-** "**media**") / RIGHE("**Rend**")

  (riportiamo accanto anche i rendimenti medi in un vettore colonna)

- definiamo le caratteristiche del portafoglio "**P0**": " **r_f** " (in questo caso, **pari al "2%"**, mentre varianza e sigma sono pari a zero)

- calcoliamo le quote del portafoglio di mercato "**M**" (" **a_{iM}** "):

  MATR.PRODOTTO(MATR.INVERSA(" **S** ") ; " **media** " **-** " **r_f** ")

  /

  SOMMA(MATR.PRODOTTO(MATR.INVERSA("**S**") ; " **media** " **-** " **r_f** "))

- calcoliamo e definiamo le caratteristiche del portafoglio "**M**":

per la media (" **Media(M)** "):

MATR.PRODOTTO(MATR.TRASPOSTA(" **a_{iM}** ") ; " **media** ")

per la varianza (" **Var(M)** "):

MATR.PRODOTTO(MATR.PRODOTTO(MATR.TRASPOSTA("**a_{iM}**");"**S**");"**a_{iM}**")

per il sigma (" **Sigma(M)** "):

RADQ(" **Var(M)** ")

- definiamo la covarianza e la correlazione tra "**P0**" ed "**M**", entrambe - per definizione - pari a zero.

In realtà, se uno degli indici di borsa (**Dow Jones 30** o **S&P500**) corrispondesse esattamente al portafoglio di mercato che abbiamo individuato, disporremmo già dei rendimenti medi annui del portafoglio di mercato e non avremmo bisogno di determinare né le quote del portafoglio di mercato "**M**" (" a_{iM} "), né i rendimenti medi annui del portafoglio di mercato c " $r_{M\,t}$ ").

Qui invece avendo considerato solo sei attività, abbiamo bisogno di costruire i rendimenti medi annui del portafoglio "M" per ciascuno dei dieci anni considerati.

E' possibile eseguire tale calcolo considerando - per ciascun anno - i **rendimenti** di ognuna delle 6 attività e le rispettive **quote ottimali** (come calcolate in precedenza) per la composizione del portafoglio di mercato "**M**".

Dopo aver riportato la matrice dei rendimenti delle attività, abbiamo appunto affiancato una colonna (quella in rosso) che indica i rendimenti del portafoglio "**M**" per ciascuno dei dieci anni considerati.

Il calcolo di tali rendimenti, come al solito, è determinato (per ogni anno) da una media ponderata in base alle quote " a_{iM} " e ai rendimenti delle singole attività:

- per ciascuna riga (anno di riferimento):

=
MATR.PRODOTTO(MATR.TRASPOSTA("a_{iM}");MATR.TRASPOSTA("**Rend**"))

Da cui otteniamo:

M	costruzione rendimenti annuali d
15,29%	
9,01%	
7,24%	
5,47%	<--
12,47%	=MATR.PRODOTTO(MATR.TRASPOSTA($D$35:$D$40);MATR.TRASPOSTA(C46:H46))
6,90%	
13,14%	
16,26%	
18,98%	
18,62%	

2b. La determinazione dei Beta delle singole attività

A questo punto disponiamo, perciò, di una matrice che, oltre ai rendimenti annuali delle singole attività (" **Rend** ") , riporta anche il rendimento annuale del portafoglio di mercato (" **Rend (M)** ") .

Abbiamo poi ripetuto, per ciascuna delle sei attività e per il portafoglio "**M**", il calcolo dei rendimenti medi (" **media** ") (sempre con la funzione EXCEL *Media*).

Per il calcolo dei **beta** dobbiamo semplicemente rapportare la covarianza tra ogni attività e il portafoglio "**M**" con la varianza dello stesso portafoglio "**M**".

Quindi, per ciascuna attività, il “**BETA**” risulta:

= COVARIANZA (" **Rend** " ; " **Rend (M)** ")

/

VAR.POP((" **Rend (M)** "))

INTERPRETAZIONE GRAFICA

Saremmo pervenuti allo stesso risultato se avessimo calcolato la “**pendenza”** della retta di regressione che interpola i rendimenti annuali di ciascuna delle singole attività (" **y_nota** ") con il rendimento annuale del portafoglio "**M**" (" **x_nota** "):

= PENDENZA(" **Rend** $_{\mathbf{i}}$ " ; " **Rend (M)** ")

"**Intercetta**" e "**R Quadro**" esprimono, ovviamente, le altre caratteristiche della regressione.

2c. L’equazione della " S M L " e Test di validità

I parametri che identificano l’equazione della " **S M L** " di ciascuna attività sono:

L’intercetta, cioè

- il **tasso di rendimento del titolo risk-free**:

$$r_f$$

La pendenza, cioè:

- il **premio per il rischio** tra rendimento atteso dal mercato nel suo complesso (quello di "**M**") e quello del titolo risk-free:

$$[E(r_M)-r_f]$$

Perciò, l'equazione della " **S M L** " di ciascuna attività sarà:

$$E(r_i)=r_f+\frac{\mathrm{Cov}(r_i,r_M)}{\sigma_M^2}[E(r_M)-r_f]$$

dove il **beta** del titolo considerato (come calcolato in precedenza) è :

$$\beta_i=\frac{\mathrm{Cov}(r_i,r_M)}{\sigma_M^2}.$$

Per effettuare un test sulla validità "*DESCRITTIVA*" del CAPM e della SML dobbiamo procedere con una ***regressione dei rendimenti medi delle singole attività (Y) sui rispettivi Beta (x).***

Se i risultati del CAPM sono validi, allora:

- ***l'intercetta** della regressione deve corrispondere al **rendimento del titolo risk-free***
- ***la pendenza** della regressione deve corrispondere al **premio per il rischio.***

Per il calcolo **<u>dell'intercetta</u>** possiamo procedere con la seguente formula:

= INTERCETTA (" **y_nota** " ; " **x_nota** ")

dove:

- per " **y_nota** ", inseriremo il vettore riga dei **rendimenti medi** delle singole attività;

- per " **x_nota** ", inseriremo il vettore riga dei **beta** delle rispettive attività.

Per il calcolo **<u>della pendenza</u>** possiamo procedere con la seguente formula:

= PENDENZA (" **y_nota** " ; " **x_nota** ")

dove:

- per " **y_nota** ", inseriremo il vettore riga dei **rendimenti medi** delle singole attività;

- per " **x_nota** ", inseriremo il vettore riga dei **beta** delle rispettive attività.

L' "**R Quadro**" di questa regressione indica quanto siano valide le conclusioni sulla " **S M L** ":

= RQ (" **y_nota** " ; " **x_nota** ")

dove:

- per " **y_nota** ", inseriremo il vettore riga dei **rendimenti medi** delle singole attività;

- per " **x_nota** ", inseriremo il vettore riga dei **beta** delle rispettive attività.

Nel nostro esempio:

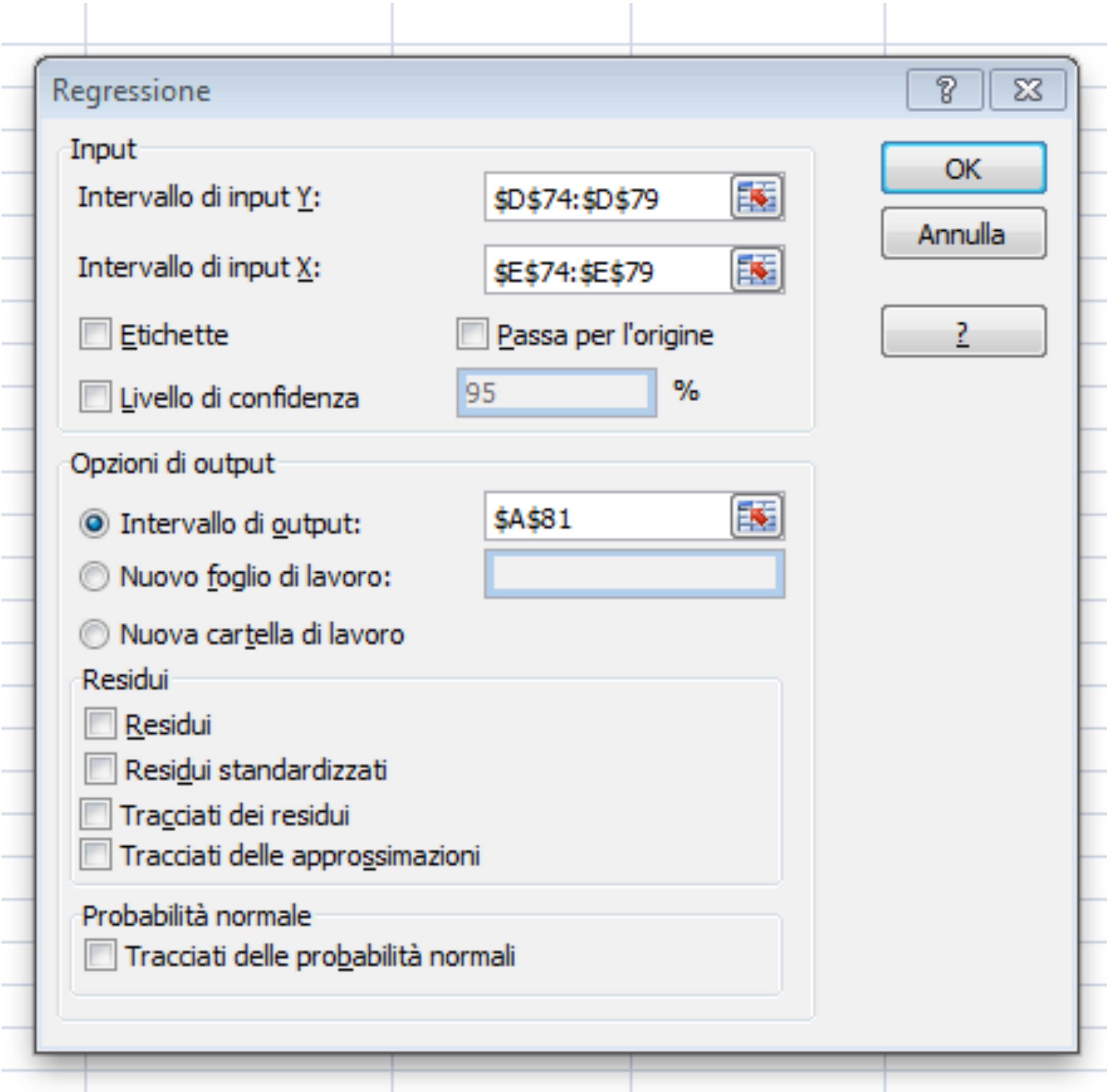
7				**I PARAMETRI DELLA "S M L"**
8	**TEST di Verifica del CAPM**	**..con le formule...**		
9		**Intercetta**	2,00%	<-- =INTERCETTA(C57:H57;C58:H58)
0		**Pendenza**	10,34%	<-- =PENDENZA(C57:H57;C58:H58)
1		**R al quadrato**	1,0000	<-- =RQ(C57:H57;C58:H58)

L' "**R Quadro**" ci informa che spieghiamo il 100% del modello, ed infatti:

- **l'intercetta** corrisponde esattamente al rendimento del titolo risk-free:
- la **pendenza** corrisponde esattamente al premio per il rischio.

Saremmo pervenuti allo stesso risultato (e ad ulteriori caratteristiche della regressione) se avessimo calcolato i parametri della regressione mediante la funzione aggiuntiva ANALISI REGRESSIONE:

menù   DATI   I   ANALISI DATI   I   REGRESSIONE



dove, come prima:

- l' "*intervallo di input di Y*" corrisponde alla " **y_nota** ";

- l' "*intervallo di input di X*" corrisponde alla " **x_nota** ".

———————————————————————————————

Definiti i parametri, e se abbiamo individuato un buon modello (come in questo caso), l'equazione della " **SML** " , deve essere in grado di calcolare perfettamente il rendimento atteso delle attività.

In questo caso, come possiamo osservare, poiché il nostro è un modello perfetto, non c'è alcuna differenza tra:

- rendimenti osservati (le medie che abbiamo calcolato) e

- rendimenti attesi (quelli descritti dalla " **S M L** ").

3. I BETA E LA SECURITY MARKET LINE: "S M L"
(… un modello IMPERFETTO ! …)

Nel foglio di lavoro "S M L" e "S&P500" è riportata la matrice dei rendimenti annuali delle stesse attività prima considerate.

Piuttosto che calcolare il portafoglio di mercato, al suo posto, abbiamo utilizzato **l'indice "S&P500"** .

Sono stati effettuati gli stessi calcoli per le “ **medie** ”, i " **beta** " e per la " **S M L** ".

Ovviamente, in questo caso, i beta di ciascuna attività risultano differenti da quelli prima calcolati (proprio perché è mutato il portafoglio di mercato) ad eccezione del beta di "**M**" (per definizione, sempre pari ad "*1*").

Come accennato, l'indice di borsa (rappresentativo del portafoglio di mercato) risulterebbe efficiente solo se contenesse TUTTE le attività disponibili sul mercato come prescritto dalla teoria del CAPM (in realtà, ciò non accade mai per nessun indice di borsa). Di conseguenza, per stimare i parametri della " **S M L** " sarebbe necessario considerare TUTTE le attività presenti sul mercato e quindi TUTTI i relativi beta.

A differenza di quanto accadeva prima, in cui il valore di "**R Quadro**" (pari al 100%) ci informava che la " **S M L** " era stimata in modo ***perfetto***, in questo caso la stima dei parametri della " **S M L** " spiega solo il 27,93% dei dati.

Infatti, osservando l'equazione della " **S M L** " e i rendimenti attesi che ne derivano, possiamo notare come, in questo caso, ci sia molta differenza tra i rendimenti osservati (le medie) e i rendimenti attesi (quelli descritti dalla " **S M L** ").

Non si tratta perciò di un buon modello!