PROVA DEL 15/11/2017

1) Discutere e risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2x + y - 2t = 0 \\ x - y + z + 2t = 1 \\ y - 2z + t = 2 \\ 2x - 7y + 8z + 8t = -2 \end{cases}$$

Consideriamo la matrice completa (A, B) associata al sistema nel quale abbiamo cambiato l'ordine delle equazioni

$$(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -7 & 8 & 8 & -2 \end{pmatrix}$$

Utilizzando l'eliminazione di Gauss si giunge alla matrice (A', B') ridotta a scala

$$(A', B') = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -9 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ora $rgA = rgA' = 3$ mentre $rg(A, B) = rg(A', B') = 4$. Per il teorema di Rouchè Capelli il sistema è dunque incompatibile.

2) In R^4 si consideri l'insieme $\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3, \overrightarrow{v}_4\}$ con $\overrightarrow{v}_1 = (1, 2, h, 0)$, $\overrightarrow{v}_2 = (1, 4, -1, 9)$, $\overrightarrow{v}_3 = (0, 2, 1, -1)$ e $\overrightarrow{v}_4 = (1, 0, -3, 1)$. Determinare al variare di $h \in R$ la dimensione del sottospazio generato da $\overrightarrow{v}_1$, $\overrightarrow{v}_2$, $\overrightarrow{v}_3$, $\overrightarrow{v}_4$. Stabilire, giustificando la risposta, per quali valori di h il vettore $\overrightarrow{v}(-1, 0, 0, 1)$ si può scrivere come combinazione lineare dei vettori $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3, \overrightarrow{v}_4$.

i) Consideriamo la matrice che ha per righe le componenti dei vettori dati e riduciamola in forma a scala:

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & h & 0 \\ 1 & 4 & -1 & -9 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & h & 0 \\ 0 & 2 & -1-h & -9 \\ 0 & 0 & 2+h & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = 4 \text{ a patto che sia } h \neq -2$$

Per $h = -2$ si ha

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & h & 0 \\ 1 & 4 & -1 & -9 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & h & 0 \\ 0 & 2 & -1-h & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

In conclusione:

- per $h \neq -2$ si ha $\dim L(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3, \overrightarrow{v}_4) = 4$
- per $h = -2$ si ha $\dim L(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3, \overrightarrow{v}_4) = 3$

ii) Per $h \neq -2$ si ha

$$L(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3, \overrightarrow{v}_4) = R^4 \text{ e } \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3, \overrightarrow{v}_4\} \text{ è una base di } R^4$$

da cio segue che ogni vettore di R^4, e quindi anche il vettore $\overrightarrow{v}$, si può scrivere come combinazione lineare dei vettori $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3, \overrightarrow{v}_4$.

Per $h = -2$, dal punto i) segue che $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3$ sono linearmente indipendenti mentre $\overrightarrow{v}_4$ si ottiene come loro combinazione lineare. Possiamo quindi concludere che in questo caso $\overrightarrow{v}$ sarà combinazione lineare di $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3$, $\overrightarrow{v}_4$ a patto che $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3$ e $\overrightarrow{v}$ siano linearmente dipendenti. Poichè

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = 4$$

si ha che $\overrightarrow{v}$ non è combinazione lineare di $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2$ e $\overrightarrow{v}_3$.

3) In R^4 si considerino i vettori $\overrightarrow{v}_1 = (1, 0, 1, 0), \overrightarrow{v}_2 = (2, h, 2, h)$ e $\overrightarrow{v}_3 = (1, 1 + h, 1, 2h)$ e sia $W = L(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3)$. Al variare di h in R, determinare una base di W ed un sottospazio V di R^4 tale che $W \oplus V = R^4$

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & h & 2 & h \\ 1 & 1+h & 1 & 2h \end{pmatrix}$ la matrice che ha per righe le componenti dei vettori dati. Utilizzando l'eliminazione di Gauss otteniamo

$$rgA = rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & h & 0 & h \\ 0 & 1+h & 0 & 2h \end{pmatrix}$$

Se $h = 0$ si ha $rgA = rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$ e $\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_3\}$ è base di W da cui $\dim W = 2$. In questo caso si avrà $\dim V = 2$. Consideriamo la seguente matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in cui le prime due righe sono i vettori della base di W. Poichè B è una matrice triangolare superiore con 4 pivot non nulli, ossia tale che $rgB = 4$, possiamo concludere che i vettori $\overrightarrow{e}_3, \overrightarrow{e}_4$, che costituiscono le ultime due righe della matrice, rappresentano una base per V. In questo caso quindi $V = L(\overrightarrow{e}_3, \overrightarrow{e}_4)$.

Se $h \neq 0$ si ha che $rgA < 3$ se e solo se

$$\frac{1+h}{h} = \frac{2h}{h} \Leftrightarrow h = 1$$

Se $h = 1$ si ha $rgA = rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2$ e si ritorna al caso precedente.

Se $h \neq 0$ e $h \neq 1$ si ha $rgA = 3$ e $\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\}$ è base di W da cui $\dim W = 3$. In questo caso si avrà $\dim V = 1$. Consideriamo la seguente matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & h & 0 & h \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h-1 \end{pmatrix}$$

in cui le prime due righe e l'ultima sono i vettori della base di W. Poichè $rgB = 4$ possiamo concludere che il vettore $\overrightarrow{e}_3$, che costituisce la terza riga della matrice B, rappresenta una base per V. In questo caso quindi $V = L(\overrightarrow{e}_3)$.

4) Siano $U = \{(0, b, c, d) \mid b, c, d \in R\}$ e $V = \{(q, p, q, r) \mid p, q, r \in R\}$ due sottoinsiemi di R^4. Verificare che U e V sono sottospazi vettoriali di R^4, trovare $U \cap V$ e $U + V$ e stabilire se la somma è diretta

i) Siano $(0, b, c, d)$,$(0, b', c', d') \in U$ e sia $\lambda \in R$, si ha

$$\begin{aligned} (0, b, c, d) + (0, b', c', d') &= (0, b + b', c + c', d + d') \in U \\ \lambda(0, b, c, d) &= (0, \lambda b, \lambda c, \lambda d) \in U \end{aligned}$$

da cui segue che U, essendo chiuso rispetto la somma ed il prodotto per uno scalare, è un sottospazio vettoriale. Se consideriamo

$$(0, b, c, d) = b(0, 1, 0, 0) + c(0, 0, 1, 0) + d(0, 0, 0, 1)$$

possiamo concludere che $\{\overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3, \overrightarrow{e}_4\}$ è una base per U.

Analogamente si prova che V è un sottospazio vettoriale. Se consideriamo

$$(q, p, q, r) = q(1, 0, 1, 0) + p(0, 1, 0, 0) + r(0, 0, 0, 1)$$

posto $\overrightarrow{v}_1(1, 0, 1, 0)$ si ha che $\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_4\}$ è una base per V.

ii) Un vettore $\overrightarrow{v}(x, y, z, t) \in R^4$ appartiene a $U \cap V$ se e solo se $\overrightarrow{v} \in U$ e $\overrightarrow{v} \in V$ da cui

$$\begin{cases} q = 0 \\ p = b \\ q = c \\ r = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = c = 0 \\ p = b \\ r = d \end{cases}$$

da cui

$$\overrightarrow{v} \in U \cap V \Leftrightarrow \overrightarrow{v} = (0, b, 0, d) = b(0, 1, 0, 0) + d(0, 0, 0, 1)$$

ossia $\{\overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_4\}$ è una base di $U \cap V$ e la somma di U e V non è diretta.

Dalla relazione di Grassman sappiamo che

$$\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim U \cap V = 3 + 3 - 2 = 4$$

Abbiamo quindi che $U+V$ essendo un sottospazio vettoriale di R^4 di dimensione 4, non può che essere R^4 stesso.

5) Siano $\overrightarrow{v}_1 = (0,0,2,-1)$, $\overrightarrow{v}_2 = (-1,1,2,1)$, $\overrightarrow{v}_3 = (0,1,0,2)$, $\overrightarrow{v}_4 = (0,0,0,1)$ quattro vettori di R^4. Stabilire, giustificando la risposta, se esiste un unico endomorfismo f di R^4 tale che

$$f(\overrightarrow{v}_1) = f(\overrightarrow{v}_2) = \overrightarrow{v}_1 - \overrightarrow{v}_3 \quad f(\overrightarrow{v}_3) = \overrightarrow{v}_1 \quad f(\overrightarrow{v}_4) = \overrightarrow{0}$$

Determinare la matrice $M_C(f)$ associata ad f rispetto la base canonica C di R^4.

i) L'endomorfismo dato è unico a patto che $\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3, \overrightarrow{v}_4\}$ costituiscano una base per R^4. Consideriamo allora la matrice che ha per righe le componenti dei vettori e verifichiamo che abbia rango 4.

$$rg \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

L'endomorfismo è quindi univocamente determinato.

ii) Per determinare la matrice richiesta bisogna calcolare $f(\overrightarrow{e}_i)$ come combinazione lineare di $\overrightarrow{e}_i$ per ogni $i = 1, ..., 4$ sapendo che

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{v}_1) &= f(0,0,2,-1) = (0,-1,2,-3) \\ f(\overrightarrow{v}_2) &= f(-1,1,2,1) = (0,-1,2,-3) \\ f(\overrightarrow{v}_3) &= f(0,1,0,2) = (0,0,2,-1) \\ f(\overrightarrow{v}_4) &= f(0,0,0,1) = (0,0,0,0) \end{aligned}$$

ossia che

$$\begin{cases} f(2\overrightarrow{e}_3 - \overrightarrow{e}_4) = -\overrightarrow{e}_2 + 2\overrightarrow{e}_3 - 3\overrightarrow{e}_4 \\ f(-\overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_2 + 2\overrightarrow{e}_3 + \overrightarrow{e}_4) = -\overrightarrow{e}_2 + 2\overrightarrow{e}_3 - 3\overrightarrow{e}_4 \\ f(\overrightarrow{e}_2 + 2\overrightarrow{e}_4) = 2\overrightarrow{e}_3 - \overrightarrow{e}_4 \\ f(\overrightarrow{e}_4) = \overrightarrow{0} \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} f(\overrightarrow{e}_1) = 2\overrightarrow{e}_3 - \overrightarrow{e}_4 \\ f(\overrightarrow{e}_2) = 2\overrightarrow{e}_3 - \overrightarrow{e}_4 \\ f(\overrightarrow{e}_3) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{e}_2 + \overrightarrow{e}_3 - \frac{3}{2}\overrightarrow{e}_4 \\ f(\overrightarrow{e}_4) = \overrightarrow{0} \end{cases}$$

e $M_C(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

6) Sia f :$R^3 \rightarrow R^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, -x + 2y + 2z, 2x - y - z)$$

Determinare nucleo e immagine di f.

Sia A la matrice associata ad f rispetto la base canonica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si ha $rg(A) = 2 = \dim \operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Im} f = L\left(f(\overrightarrow{e}_1), f(\overrightarrow{e}_2)\right)$ da cui segue che $\dim K\,\mathrm{erf} = 1$. Ora

$$\overrightarrow{x}(x, y, z) \in K\,\mathrm{erf} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x + y + z = 0 \\ -x + 2y + 2z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{array} \right.$$

da cui segue

$$\overrightarrow{x}(x, y, z) \in K\,\mathrm{erf} \Leftrightarrow \overrightarrow{x} = (0, -z, z)$$

e quindi $K\,\mathrm{erf} = L((0, -1, 1))$