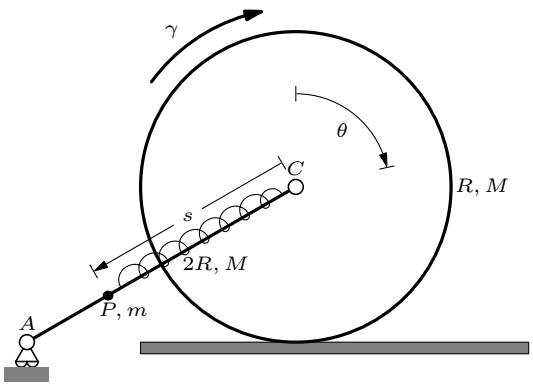
Facoltà di Ingegneria, Università del Salento - Esame di Meccanica Razionale del 28 GIU 2012

In un piano verticale, un disco omogeneo di raggio R e massa M rotola senza strisciare su una guida orizzontale. L'asta AC, omogenea di lunghezza $2R$ e massa M, ha l'estremo A vincolato a scorrere orizzontalmente alla stessa quota della guida e l'estremo C incernierato nel centro del disco. Il punto materiale P di massa m scivola senza attrito lungo l'asta. Un molla lineare, di costante elastica $k = \frac{mg}{R}$ e lunghezza di riposo zero, collega i punti P e C, mentre una coppia oraria γ agisce sul disco. Tutti i vincoli sono da considerarsi ideali. Si scelgano come coordinate libere θ, angolo orario di rotazione del disco, ed s, allungamento della molla orientato come in figura.

1. Calcolare il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse a parallelo all'asta e passante per il punto di contatto disco guida [max 6 pt].
2. Determinare la velocità e l'accelerazione del punto P in funzione delle coordinate libere [max 3 pt].
3. Scrivere le equazioni di Lagrange del sistema [max 7 pt].
4. Determinare la coppia γ che garantisce l'accelerazione costante di C pari a $\frac{1}{\sqrt{3}}g\mathbf{i}$ sapendo che all'istante $t = 0$ il punto P è sovrapposto ad A ed il sistema è istantaneamente in quiete [max 8 pt].
5. Nelle ipotesi del punto precedente, determinare la reazione vincolare in A come funzione del tempo [max 9 pt].



1. Detto a' l'asse passante per i punti A e C, si ha che solamente il disco ha momento d'inerzia non nullo rispetto ad a', quindi:

$$I_{a'} = \frac{1}{4}MR^2.$$

D'altra parte a' è asse di simmetria per l'intero sistema e quindi contiene il baricentro. Il teorema di Huygens-Steiner permette di calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse a parallelo ad a' e passante per il punto di contatto disco guida. Poiché la distanza tra gli assi a' ed a è

$$d = \frac{\sqrt{3}}{2}R,$$

si ha che:

$$I_a = I_{a'} + (2M + m)d^2 = \frac{7}{4}MR^2 + \frac{3}{4}mR^2.$$

2. Fissato un sistema di riferimento cartesiano, con origine sulla guida e l'asse $\mathbf{j}$ diretto come la verticale ascendente, si ha

$$OP = OC + CP = (x_C - \frac{\sqrt{3}}{2}s)\mathbf{i} + \left(R - \frac{s}{2}\right)\mathbf{j}.$$

Tenuto conto che l'asta forma un angolo fisso di $\frac{\pi}{6}$ con l'orizzontale e che, per l'ipotesi di puro rotolamento, $\dot{x}_C = R\dot{\theta}$, si ottiene:

$$\mathbf{v}_P = (R\dot{\theta} - \frac{\sqrt{3}}{2}\dot{s})\mathbf{i} - \frac{\dot{s}}{2}\mathbf{j},$$

$$\mathbf{a}_P = (R\ddot{\theta} - \frac{\sqrt{3}}{2}\ddot{s})\mathbf{i} - \frac{\ddot{s}}{2}\mathbf{j}.$$

3. Le equazioni di Lagrange sono:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial T}{\partial s} = Q_s.$$

L'energia cinetica è la somma di tre contributi:

$$T(\dot{\theta}, \dot{s}) = \underbrace{\frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}^2}_{disco} + \underbrace{\frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2}_{asta} + \underbrace{\frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\theta}^2 - \sqrt{3}R\dot{s}\dot{\theta} + \dot{s}^2\right)}_{punto}.$$

Il lavoro virtuale delle azioni attive agenti sul sistema è

$$\delta L = -mg\delta y_p - kCP \cdot \delta(CP) + \gamma\delta\theta = \left(\frac{mg}{2} - ks\right)\delta s + \gamma\delta\theta.$$

Conseguentemente le equazioni di Lagrange diventano:

$$\left(\frac{5}{2}M + m\right)R^2\ddot{\theta} - \frac{\sqrt{3}}{2}mR\ddot{s} = \gamma \tag{1}$$

$$m\ddot{s} - \frac{\sqrt{3}}{2}mR\ddot{\theta} + ks = \frac{mg}{2}. \tag{2}$$

4. Nell'ipotesi in cui $\mathbf{a}_c = \frac{g}{\sqrt{3}}\mathbf{i}$ si ottiene che $\ddot{\theta} = \frac{g}{\sqrt{3}R}$, che sostituito nell'equazione (2) dà (una volta usato il valore di k dato nel testo):

$$\ddot{s} + \frac{g}{R}s = g.$$

Quest'ultima ammette come soluzione generale:

$$s(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t + \varphi\right) + R.$$

L'ipotesi che a $t = 0$ il sistema sia in quiete con P sovrapposto ad A, fornisce le condizioni iniziali $s(0) = 2R$ ed $\dot{s}(0) = 0$. Si ottiene dunque

$$s(t) = R\left[\cos\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t\right) + 1\right].$$

Sostituendo $s(t)$ nell'equazione (1) e risolvendo per γ otteniamo:

$$\gamma(t) = \left(\frac{5}{2}M + m\right)\frac{R}{\sqrt{3}}g + \frac{\sqrt{3}}{2}mgR\cos\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t\right)$$

5. Consideriamo il sottosistema formato dall'asta ed dal punto. La seconda equazione rispetto al polo C si scrive:

$$\dot{\mathbf{K}}_C + \dot{C} \wedge \mathbf{Q} = \mathbf{M}_C^{(e)} \tag{3}$$

dove $\mathbf{K}_C = CG \wedge M\mathbf{v}_G + CP \wedge m\mathbf{v}_P$. Di conseguenza

$$\dot{\mathbf{K}}_C + \dot{C} \wedge \mathbf{Q} = CG \wedge M\mathbf{a}_G + CP \wedge m\mathbf{a}_P = \frac{1}{2}\left(MR + ms\right)R\ddot{\theta}\mathbf{k}.$$

D'altra parte

$$\mathbf{M}_C^{(e)} = \left(-V_A R + \frac{1}{2}MgR + \frac{1}{2}mgs\right)\sqrt{3}\mathbf{k}.$$

Nell'ipotesi del punto precedente si ha

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{\sqrt{3}R} \qquad s(t) = R\left[\cos\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t\right) + 1\right]$$

e, di conseguenza, l'equazione (3) porta a

$$V_A(t) = \frac{1}{3}\left\{M + m\left[\cos\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t\right) + 1\right]\right\}g.$$