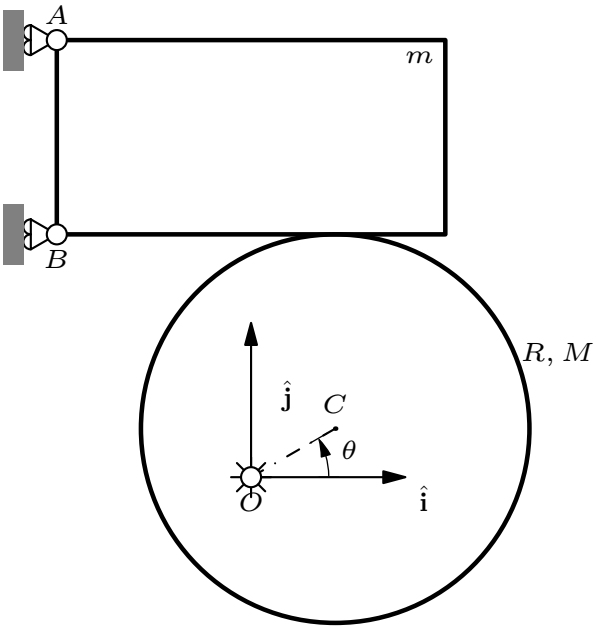
Facoltà di Ingegneria, Università del Salento - Esame di Meccanica Razionale del 20 giugno 2018

Il sistema di figura, sito nel piano verticale con l'asse $\hat{\mathbf{j}}$ diretto come la verticale ascendente, è composto:

- da un disco omogeneo di raggio R, massa M e centro C, incernierato nel punto fisso O posto a distanza $R/2$ da C;
- da una lamina rettangolare omogenea di base $2R$ e altezza R e massa m che trasla verticalmente mantenendo il suo centro sulla verticale passante per O.

Il disco è in contatto con il lato inferiore della lamina. Si considerino tutti i vincoli ideali e si scelga come coordinata libera l'angolo antiorario θ che la congiungente OC forma con l'asse $\hat{\mathbf{i}}$.

1. Calcolare la velocità della lamina in funzione della coordinata libera, nonché la massima e la minima quota del punto B.
2. Determinare le coppie antiorarie γ_i $(i = 1, 2)$ che applicate al disco garantiscono l'equilibrio con C alla stessa quota di O.
3. Per le configurazioni di equilibrio al punto precedente, determinare le reazioni vincolari esterne.
4. Determinare la coppia antioraria $\gamma(t)$ che garantisce una velocità angolare del disco pari a $\boldsymbol{\omega} = \omega_0\hat{\mathbf{k}}$, con ω_0 costante.
5. Nelle ipotesi del punto precedente, determinare la reazione vincolare scambiata tra disco e lamina.



Soluzione

1. Sia H' il punto del disco a contatto con la lamina ed H'' il punto della lamina a contatto con il disco. Risulta

$$OC = \frac{R}{2}\left(\cos\theta\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\hat{\mathbf{j}}\right), \quad CH' = R\hat{\mathbf{j}}, \quad OH' = OC + CH' = \frac{R}{2}\left(\cos\theta\hat{\mathbf{i}} + (\sin\theta + 2)\hat{\mathbf{j}}\right). \tag{1}$$

Sia $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{k}$ la velocità angolare del disco, dall'atto di moto rigido risulta

$$\mathbf{v}(H') = \mathbf{v}_O + \dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \wedge OH' = -\frac{R}{2}\left((\sin\theta + 2)\hat{\mathbf{i}} - \cos\theta\hat{\mathbf{j}}\right)\dot{\theta}. \tag{2}$$

Essendo $\hat{\mathbf{j}}$ il versore normale sia al disco chee alla lamina in H' e H'', si ha contatto tra disco e lamina se $\mathbf{v}(H')\cdot\hat{\mathbf{j}} = \mathbf{v}(H'')\cdot\hat{\mathbf{j}}$, da cui si ricava $\mathbf{v}(H'') = R/2\dot{\theta}\cos\theta\hat{\mathbf{j}}$. Possiamo concludere che la lamina trasla verticalmente con velocità $\mathbf{v} = R/2\dot{\theta}\cos\theta\hat{\mathbf{j}}$.

Inoltre essendo

$$y_B = y_C + R = \frac{R}{2}\left(\sin\theta + 2\right), \tag{3}$$

si ottiene facilmente

$$y_B^{\max} = \frac{3}{2}R, \quad y_B^{\min} = \frac{R}{2}. \tag{4}$$

2. Indicato con G il baricentro della lamina, si ottiene

$$y_G = y_C + R, \tag{5}$$

di conseguenza gli spostamenti virtuali di G e C saranno

$$\delta y_G = \delta y_C = \frac{R}{2}\cos\theta\delta\theta. \tag{6}$$

Il lavoro virtuale delle forze attive $\delta L^{(a)}$ risulta essere

$$\delta L^{(a)} = -mg\delta y_G - Mg\delta y_C + \gamma\delta\theta = \left[\gamma - \frac{R}{2}(m+M)g\cos\theta\right]\delta\theta. \tag{7}$$

Per $\theta \in \mathbb{R}$ vale

$$y_C = y_O \Leftrightarrow \theta = k\pi, \qquad k \in \mathbb{N},. \tag{8}$$

Essendo i vincoli ideali e bilateri, condizione necessaria e sufficiente all'equilibrio è $\delta L^{(a)} = 0 \quad \forall\delta\theta$, ossia

$$\gamma - \frac{R}{2}(m+M)g\cos\theta = 0. \tag{9}$$

Dalla condizione (9) si ricava

$$\gamma_1 = \frac{R}{2}(m+M)g, \quad \gamma_2 = -\frac{R}{2}(m+M)g, \tag{10}$$

rispettivamente per $\theta_1 = 2k\pi, \theta_2 = (2k+1)\pi$.

3. Siano $\mathbf{\Phi}_O = H_O\hat{\mathbf{i}} + V_O\hat{\mathbf{j}}, \mathbf{\Phi}_A = H_A\hat{\mathbf{i}}$ e $\mathbf{\Phi}_B = H_B\hat{\mathbf{i}}$ le reazioni vincolari in O, A, B rispettivamente. Dalla prima equazione cardinale $R_y^{(e)} = 0$, risulta facilmente che $V_O = (m+M)g$, mentre da $R_x^{(e)} = 0$ risulta

$$H_A + H_B + H_O = 0. \tag{11}$$

Svincolando il disco dalla lamina e considerando $\mathbf{\Phi}_{H''} = V_H\hat{\mathbf{j}}$ la reazione vincolare in H'' e $\mathbf{\Phi}_{H'} = -V_H\hat{\mathbf{j}}$ la reazione vincolare in H', dall'equazione cardinale della statica $R_x^{(e)} = 0$ per il solo disco risulta $H_O = 0$, mentre dalla seconda equazione cardinale della statica $M_{H_z''}^{(e)} = 0$ per la sola lamina si ricava

$$mgx_{H''} - RH_B = 0, \tag{12}$$

da cui segue,

$$H_B = \frac{mg}{2}\cos\theta_i \ (i = 1, 2). \tag{13}$$

e da (13) e (11), si ricava $H_A = -H_B$. Pertanto per $\theta = \theta_1$,

$$H_B = \frac{mg}{2}, \quad H_A = -\frac{mg}{2}, \tag{14}$$

e per $\theta = \theta_2$

$$H_B = -\frac{mg}{2}, \quad H_A = +\frac{mg}{2}. \tag{15}$$

4. L'equazione pura del moto è fornita dal teorema dell'energia cinetica $\dot{T} = \Pi$. Risulta $T = T^L + T^D$, e

$$T^L = \frac{1}{2} m v_G^2 = \frac{1}{8} m R^2 \dot{\theta}^2 \cos^2\theta \tag{16}$$

ed essendo $\mathbf{v}_C = R/2\dot{\theta}\left(-\sin\theta\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\hat{\mathbf{j}}\right)$, $v_C^2 = R^2/4\dot{\theta}^2$, $I_{C_z} = 1/2MR^2$, si ha

$$T^D = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_{C_z}\omega^2 = \frac{1}{8} M R^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4} M R^2\dot{\theta}^2 = \frac{3}{8} M R^2\dot{\theta}^2. \tag{17}$$

L'energia cinetica totale è

$$T = \frac{1}{8} R^2\dot{\theta}^2\left(m\cos^2\theta + 3M\right), \tag{18}$$

che derivata rispetto al tempo dà

$$\dot{T} = \frac{1}{4} R^2\dot{\theta}\left[m\left(\ddot{\theta}\cos^2\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta\right) + 3M\ddot{\theta}\right]. \tag{19}$$

La potenza delle azioni agenti sul sistema è

$$\Pi = -mg\dot{y}_C - Mg\dot{y}_G + \gamma\dot{\theta} = \left[\gamma - \frac{1}{2}(m+M)gR\cos\theta\right]\dot{\theta}. \tag{20}$$

Sostituendo $\theta = \omega_0 t, \dot{\theta} = \omega_0$ e $\ddot{\theta} = 0$ in $\dot{T} = \Pi$ si ricava

$$\gamma(t) = \frac{R}{2}\left[(m+M)g\cos(\omega_0 t) - \frac{R}{4}\omega_0^2 m\sin(2\omega_0 t)\right]. \tag{21}$$

5. Dalla componente verticale della prima equazione cardinale della dinamica per la sola lamina, si ha $R_y^{(e)} = \dot{Q}_y$, essendo $Q_y = m\frac{R}{2}\dot{\theta}\cos\theta$ ed $\dot{Q}_y = m\frac{R}{2}\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right)$, nelle ipotesi del punto precedente,

$$V_{H''} - mg = m\frac{R}{2}\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right) \Rightarrow V_{H''} = m\left(g - \frac{R}{2}\omega_0^2\sin\omega_0 t\right). \tag{22}$$