PROBLEMI DI PROBABILITÀ–2

1. Si sceglie a caso un numero X nell'intervallo $(0, 1)$.

(a) Qual è la probabilità che la usa prima cifra decimale sia 1?
(b) Qual è la probabilità che la seconda cifra decimale sia 7?
(c) qual è la probabilità che la prima cifra decimale della sua radice quadrata sia 3?

2. Gli autobus per andare in Università partono ai seguenti orarî: 9:00, 9:15, 9:30, 9:45, 10. Due amici arrivano a caso e indipendentemente alla fermata dell'autobus tra le 9 e la 10. Qual è la probabilità che i due amici viaggino sullo stesso autobus?

3. Sia X una variabile aleatoria uniforme nell'intervallo $(0, 2)$, $X \sim \mathcal{U}(0, 2)$ e sia Y la v.a. definita da $Y = X^2$; si calcolino le probabilità:

(a) $P(Y \leq X)$;
(b) $P\left(X + Y \leq \frac{3}{4}\right)$.

4. La v.a. X ha legge uniforme nell'intervallo $(-1, 1)$, $X \sim \mathcal{U}(-1, 1)$. Si trovi la legge della v.a. X^k, ove k è un numero naturale.

5. Se X è una v.a. con legge di Cauchy, qual è la legge della v.a. $Y := X^{-1}$? Si ricordi che la legge di Cauchy ha densità

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + t^2} \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

6. Nel piano riferito agli assi cartesiani ortogonali $x\,y$ si consideri il triangolo di vertici $(-2, 0)$, $(2, 0)$ e $(0, 2)$. Nello stesso piano si tracci la retta, parallela all'asse delle ascisse $y = Y$, ove Y è una variabile aleatoria di legge uniforme nell'intervallo $(0, 2)$, $Y \sim \mathcal{U}(0, 2)$. Si determini la legge della v.a. S che dà l'area della parte del triangolo dato compresa tra l'asse delle ascisse e la retta $y = Y$.

7. X e Y sono v.a. indipendenti, entrambe con legge uniforme su $(0, 1)$, $X, Y \sim \mathcal{U}(0, 1)$. Si trovi la legge della v.a. $Z := X\,Y$.

8. Sia X una variabile aleatoria di legge $N(m, \sigma^2)$.

(a) Si trovi mla legge della v.a. $Y := e^X$;
(b) si calcoli la media di Y, se esiste.

9. Si controlli che la funzione $f_\theta : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ definita, per $\theta > 0$, da

$$f_\theta(x) := 2\,\theta\,x\,e^{-\theta\,x^2}\,1_{(0,+\infty)}(x),$$

è una densità di probabilità. Se X è una v.a. di densità f_θ,

(a) si calcolino la media e la varianza di X;
(b) si determini la legge della v.a. $Y := X^2$;
(c) si determini la legge della v.a. $Z := e^{-\theta\,X^2}$.

10. Dua v.a. X e Y sono indipendenti ed hanno entrambe legge esponenziale di parametro 1, $X, Y \sim \Gamma(1,1)$. Si calcoli la probabilità che siano reali le soluzioni dell dell'equazione

$$t^2 + 2\,X\,t + Y = 0.$$

(Non occorre arrivare ad una soluzione numerica esplicita).

11. Siano Y_1 e Y_2 due v.a. indipendenti definite sullo stesso spazio di probabilità; entrambe abbiano legge esponenziale di parametro 1, $Y_j \sim \Gamma(1,1)$ $(j = 1,2)$. Qual è la legge della v.a. $X := Y_1 - Y_2$?

12. Sia X una v.a. con legge $\Gamma(n,\theta)$ ove n è un numero naturale e $\theta > 0$; la densità di X è pertanto eguale a

$$f(t) = \frac{\theta^n}{\Gamma(n)}\, t^{n-1}\, e^{-\theta\, t}\, 1_{(0,+\infty)}.$$

Se $x > 0$ e se Y è una v.a. con legge di Poisson di parametro $\lambda = \theta\, x$, $Y \sim \mathcal{P}(\theta\, x)$, si controlli che vale la relazione

$$P(X \le x) = P(Y \ge \lambda).$$

13. Siano X e Y due v.a. tali che $Y = X$; X ha legge uniforme su $(0,1)$, $X \sim \mathcal{U}(0,1)$. Si trovi la funzione di ripartizione congiunta F di X e Y.

14. Nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ le v.a. X e Y sono indipendenti; X assume i valori $+1$ e -1 con probabilità $1/2$, mentre Y ha legge esponenziale di parametro 1, $Y \sim \Gamma(1,1)$. Se $Z := X\,Y$, qual è la legge di Z?

15. (i) Si dimostri la proprietà dell'assenza di memoria di una v.a. X con legge esponenziale: per ogni coppia s e t di numeri reali strettamente positivi, $s, t > 0$, vale

$$P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t).$$

(ii) Se $\alpha > 0$ e $\theta > 0$, si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ definita da

$$f(t) := \theta\,\alpha\, t^{\alpha-1}\, e^{-\theta\, t^\alpha}\, 1_{(0,+\infty)}(t).$$

(a) Si mostri che f cosí definita è una densità di probabilità (detta di Weibull) e se ne calcoli la funzione di ripartizione;
(b) se T è una v.a. con densità f, si calcoli $P(T > s + t \mid T > s)$; per quali valori di α e di θ è crescente la funzione $s \mapsto P(T > s + t \mid T > s)$?
(c) Sia X una v.a. esponenziale di parametro $\theta > 0$, $X \sim \Gamma(1,\theta)$ e sia $\beta > 0$. Si calcoli la legge di X^β.

16. Siano X, Y e Z tre v.a. indipendenti con legge uniforme sull'intervallo $(0,1)$, $X, Y, Z \sim \mathcal{U}(0,1)$.
(a) Si trovino le leggi delle v.a. $X\,Y$ e Z^2;
(b) si trovi la densità del vettore aleatorio $(X\,Y, Z^2)$ e la si usi per calcolare la probabilità $P(X\,Y \le Z^2)$.

17. Dua v.a. X e Y hanno funzione di ripartizione congiunta F.
(a) Si trovino le leggi delle v.a.

$$X_{(1)} := X \wedge Y = \min\{X, Y\} \qquad \text{e} \qquad X_{(2)} := X \vee Y = \max\{X, Y\}.$$

(b) Se X e Y sono indipendenti ed entrambe di legge esponenziale con parametro $\theta > 0$, $X, Y \sim \Gamma(1, \theta)$, si scrivano esplicitamente le leggi di $X_{(1)}$ e di $X_{(2)}$, e si riconosca la legge di $X_{(1)}$.

18. La v.a. X ha legge esponenziale di parametro $\theta > 0$, $X \sim \Gamma(1, \theta)$. Posto

$$Y := [X] + 1,$$

ove $[t]$ denota la parte intera del numero reale t, $[t] := \max\{k \in \mathbf{Z} : k \leq t\}$, si mostri che Y ha legge geometrica e si determini il parametro di tale legge.

19. Sia X una v.a. con legge esponenziale di parametro $\theta > 0$, $X \sim \Gamma(1, \theta)$. Qual è la legge della v.a.

$$U := e^{-\theta X}?$$

20. (a) Si consideri la v.a. X di legge uniforme su $(0, 1)$, $X \sim \mathcal{U}(0, 1)$. Se $Y := X - 1$, si trovi la legge di Y.

(b) Se X_1 e X_2 sono due v.a. indipendenti, entrambe di legge uniforme su $(0, 1)$, si trovi la legge della v.a. $X_1 + X_2$.

21. Sia U una v.a. con legge uniforme sull'intervallo $(0, 1)$, $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$. Si trovi la legge della v.a. $X := e^{-U}$.

22. Se Φ è la funzione di ripartizione della legge $N(0, 1)$, si mostri che, per ogni $t \in \mathbf{R}$, si ha

$$\Phi(-t) = 1 - \Phi(t).$$

(a) Se la v.a. X ha legge $N(0, 1)$ e la v.a. Y, che è indipendente da X, ha legge data da $P(Y = -1) = P(Y = 1) = 1/2$, si trovi la legge della v.a.$Z := X\,Y$;
(b) si mostri che X e Z sono incorrelate;
(c) sono indipendenti le v.a. X e Z?

23. Nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ siano X e Y due v.a. indipendenti e con varianza finita. Se a, b e c sono numeri reali, scrivano la media e la varianza della v.a.

$$Z := a\,X + b\,Y + c$$

in funzione delle analoghe grandezze di X e di Y. Come occorre modificare il risultato se X e Y sono solo incorrelate anziché essere indipendenti?

24. La v.a. X che rappresenta la durata delle telefonate che giungono ad un centralino segue una legge $\Gamma(1, 1/5)$. Si calcoli la probabilità che una conversazione

(a) duri piú di 5 minuti;
(b) sia compresa tra 5 e 6 minuti;
(c) duri meno di 3 minuti;
(d) duri meno di 6 minuti, sapendo che è maggiore di 3 minuti;
(e) si giustifichi il risultato ottenuto in (d) alla luce di quello di (c).

25. Una v.a. X ha densità data da

$$f(x) = c\,\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\,1_{(0,+\infty)}(x).$$

(a) si calcoli la costante c;

(b) usando il valore trovato in (a) per c, si calcoli la speranza di X.

26. (a) Sia X una v.a. con legge di Cauchy, vale a dire con densità data da

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+x^2} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Se $\alpha >$ e se Y è la v.a. definita da

$$Y := \frac{\alpha}{X^2+1},$$

qual è la legge di Y?

(b) Si controlli se in (a) si sia effettivamente ottenuta una densità di probabilità.

27. Sia U una v.a. con legge uniforme sull'intervallo $(0,1)$, $U \sim \mathcal{U}(0,1)$. Si mostri che si può definire la v.a.

$$X := \ln\left(\frac{U}{1-U}\right),$$

e se ne trovi la legge.

28. Si calcoli la costante k in modo che la funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}_+$ definita da

$$f(x,y) := \begin{cases} k\, e^{-2(x+y)}, & 0 \le x \le y, \\ 0, & \text{altrove,} \end{cases}$$

sia una densità di probabilità. Se f, ove la costante k ha il valore appena trovato, è la densità di probabilità di un vettore aleatorio (X,Y), se calcolino le leggi marginali. Sono indipendenti le v.a. X e Y?

29. Sia X una v.a. esponenziale di parametro 1, $X \sim \Gamma(1,1)$. Si trovi la legge della v.a. $Y := \sqrt{X}$ e se ne calcoli la speranza.

30. Sia X una v.a. di legge gamma, $X \sim \Gamma(\alpha,\theta)$. Quale relazione deve intercorrere tra i parametri α e θ affinché la v.a. $Y := 2\,X$ abbia varianza eguale a 4, $V(Y) = 4$?

31. Di una v.a. X si sa che $\ln X$ ha legge normale ridotta, $\ln X \sim N(0,1)$; si trovi la densità di X.

32. Siano U e V due variabili aleatorie di legge uniforme sull'intervallo $(0,1)$, $U, V \sim \mathcal{U}(0,1)$ e sia F la loro funzione di ripartizione congiunta. Si trovino le leggi delle variabili aleatorie

$$X := \max\{U,V\} \qquad \text{e} \qquad Y := \min\{U,V\}.$$

33. Considerata la funzione di Eulero

$$B(\alpha,\beta) := \int_0^1 x^{\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1}\,dx \qquad \alpha,\beta > 0,$$

si mostri che la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ definita da

$$f(x) := \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\,x^{\alpha-1}\,(1+x)^{-\alpha-\beta}\,1_{(0,+\infty)}(x)$$

è una densità di probabilità; si calcolino la media e la varianza di una variabile aleatoria X che ha la data funzione f come densità.

34. Una variabile aleatoria U ha legge uniforme sull'intervallo $(0, \pi/2)$, $U \sim \mathcal{U}(0, \pi/2)$. Si trovi la legge della variabile aleatoria $X := \sin U$.

36. La variabile aleatoria Θ è distribuita uniformemente sull'intervallo $(0, 2\pi)$, $\Theta \sim \mathcal{U}(0, 2\pi)$. Si trovi la legge della v.a. $X := \cos \Theta$.

37. Sia (X_1, X_2) un vettore aleatorio avente legge uniforme sul cerchio unitario. Sono indipendenti le variabili aleatorie X_1 e X_2? Sono incorrelate?

38. Per quali valori di α la funzione $f_\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ definita da

$$f_\alpha(x) := \frac{\alpha - 1}{2\,|x|^\alpha}\, 1_{\{|x|>1\}}(x)$$

è una densità di probabilità? Per quali valori di α una v.a. X con densità data da f_α ha speranza finita?

39. La v.a. X ha legge uniorme sull'intervallo $(0, 1)$, $X \sim \mathcal{U}(0, 1)$. Se $\alpha > 0$, si trovi la legge della v.a.

$$Y := -\frac{1}{\alpha}\, \ln(1 - X).$$

40. Per $\alpha > 0$ sia data la funzione $f_\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ definita da

$$f_\alpha(x) := \alpha\, |\sin x|\, 1_{(-\pi/2, \pi/2)}(x).$$

(a) si calcoli mal costante α in modo che f_α sia la densità di probabilità di una v.a. X;
(b) si trovi la legge della v.a. $Y := x^2$;
(c) si calcoli la,probabilità $P(Y \le \pi^2/9)$.

41. Sia X una variabile aleatoria con legge uniforme su $(0, 1)$, $X \sim \mathcal{U}(0, 1)$. Se s e t sono reali positivi, $s, t > 0$, con $s + t < 1$, si calcoli la probabilità condizionata $P(X > s + t \mid X > s)$. Fissato $s \in\,]0, 1[$, per quali valori di t si ha

$$P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t)?$$

42. Si controlli che, se $\sigma > 0$, la funzione definita per ogni $x \in \mathbf{R}$ e per ogni $n \in \mathbf{N}$ da

$$f_n(x) = \frac{2\left(\dfrac{n}{2}\right)^{n/2}}{\sigma^n\, \Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\, x^{n-1}\, \exp\left\{-\frac{nx^2}{2\sigma^2}\right\}\, 1_{(0,+\infty)}(x)$$

è una densità di probabilità. Se ne calcoli la speranza.

43. Sia X una variabile aleatoria con legge esponenziale di parametro 1, $X \sim \Gamma(1, 1)$. Si determini la densità della variabile aleatoria $Y := X^2$ e se ne calcoli la speranza.

44. (a) Se una variabile aleatoria X ha densità f, sia determini la legge della variabile aletoria $Y := -X$;
(b) Siano X_1 e X_2 due variabili aleatorie indipendenti con legge uniforme su $(0, 1)$, $X_j \sim \mathcal{U}(0, 1)$. Si trovi la legge della differenza $X_1 - X_2$.

45. Siano date le variabili aleatorie X_1, X_2, $\ldots$, X_n, indipendenti e tutte di legge uniforme su $(0, 1)$, $X_j \sim \mathcal{U}(0, 1)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

(a) Si trovi la legge della variabile aleatoria $Y := -2\,\ln X_1$;
(b) si determini la legge della variabile aleatoria $Z := -\sum_{j=1}^{n} 2\,\ln X_j$ e la si riconosca.

46. Siano α e β due numeri reali strettamente positivi, $\alpha, \beta > 0$.
(a) Si calcoli la costante k in modo che la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ definita da

$$f(x) := \frac{k}{x^{\alpha+1}}\, 1_{(\beta,+\infty)}(x)$$

sia una densità di probabilità;
(b) se X è una variabile aleatoria con densità f, ove la costante k ha il valore calcolato in (a), si indichino i valori di α per i quali esiste finita la speranza di X e si calcoli $E(X)$.

47. Due variabili aleatorie X e Y hanno densità congiunta data da

$$f(x, y) = xy\,\exp\left\{-\frac{(x^2+y^2)}{2}\right\} 1_{R^2_+}(x, y).$$

(a) Si calcolino le densità marginali di X e di Y;
(b) sono indipendenti le variabili aleatorie X e Y?
(c) Si calcoli la probabilità $P(X \le 1, Y \le 1)$.
$(R^2_+ = (0, +\infty) \times (0, +\infty))$.

48. Sia X una variabile aleatoria con legge uniforme nell'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$, $X \sim \mathcal{U}(-\pi/2, \pi/2)$. Si trovi la legge della variabile aleatoria $Y := \tan X$ e la si riconosca.

49. Un pavimento è ricoperto da piastrelle congruenti di forma rettangolare di lati a e b. Si lancia sul pavimento un disco circolare di diametro d con $d < \min\{a, b\}$. Qual è la probabilità che il disco non giaccia interamente in una piastrella?

50. La velocità V delle molecole di un gas in equilibrio ha densità di Maxwell data da

$$f_V(v) := 4\,\sqrt{\frac{b^3}{\pi}}\, v^2\, e^{-bv^2}\, 1_{(0,+\infty)}(v).$$

(a) Si controlli che f_V definisce effettivamente una densità di probabilità;
(b) si calcoli il valor medio $E(V)$.

51. Data la funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}_+$ definita mediante

$$f(x, y) := \frac{k}{1 + x^2 + y^2 + x^2\,y^2} \qquad k > 0,$$

(a) si calcoli la costante k in modo che f sia la densità di probabilità di un vettore aleatorio (X, Y);
(b) si trovino le densità marginali delle variabili aleatorie X e Y;
(c) sono indipendenti X e Y?
(d) si calcoli la probabilità che il vettore aleatorio (X, Y) assuma valori nel quadrato unitario $[0, 1] \times [0, 1]$.

52. La funzione di ripartizione della variabile aleatoria X è data da

$$F(t) = (t/\beta)^\alpha\, 1_{[0,\beta[}(t) + 1_{[\beta,+\infty[}(t),$$

dove $\beta > 0$ e α è un parametro reale.

(a) Si trovi la densità di probabilità di X;
(b) si calcolino media e varianza di X.

53. Data la funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}_+$ definita mediante

$$f(x, y) = \alpha(x + y)\, 1_{(0,2)^2}(x, y).$$

(a) si calcoli la costante α in modo che f sia la densità di probabilità di un vettore aleatorio (X, Y);
(b) si trovino le densità marginali delle variabili aleatorie X e Y e si dica se siano indipendenti X e Y;
(c) si calcoli la probabilità che X sia maggiore di Y.

54. Si controlli che la funzione $f_{\alpha,\beta}$ definita da

$$f_{\alpha,\beta}(t) = \frac{\alpha\, \beta^\alpha}{t^{\alpha+1}}\, 1_{(\beta,+\infty)}(t) \qquad (\alpha > 0,\ \beta > 0)$$

è una densità di probabilità. Se X è una variabile aleatoria con densità data da $f_{\alpha,\beta}$, si determinino i valori di α e β per i quali esiste finita la speranza di X e la si calcoli.

55. In un gas il percorso effettuato da una molecola prima di subire una collisione con un'altra molecola è una variabile aleatoria di legge esponenziale di parametro $\alpha > 0$ che è caratteristico del gas considerato. Sapendo che $P(X < 10) = 0.9$, si determini la costante α e si calcoli la speranza di X.

56. In $[0, 1]$ si scelgono a caso e indipendentemente due numeri X e Y;
(a) Qual è la probabilità che essi differiscano per piú di $1/2$?
(b) Posto $Z := |X - Y|$, si trovino la legge e la speranza di Z.