SOLUZIONI
26 SETTEMBRE 2013

Si indichino con chiarezza il nome, il numero di matricola e il numero di crediti. Si giustifichino, seppur brevemente, i passaggi. Tempo a disposizione: **3 ore**.

1. *Si estraggono senza restituzione* 3 *palline da un'urna che ne contiene tre bianche e due colorate. Si calcoli*

(a) *la probabilità di estrarre tre palline bianche;*
(b) *la probabilità di estrarre due palline bianche e una colorata.*
(c) *la probabilità che la seconda pallina estratta sia bianca mentre la terza è colorata.*

Lo spazio dei risultati è

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \neq x_j \ (i \neq j)\} \ .$$

Poiché l'estrazione avviene senza restituzione si ha $N(\Omega) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

(a) Si chiede di calcolare la probabilità dell'evento (b, b, b) (con ovvio significatro dei simboli); poiché $N(b, b, b) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ si ha

$$\mathbb{P}(b, b, b) = \frac{1}{10} \,.$$

(b) Poiché la pallina colorata può occupare una delle tre posizioni, la probabilità richiesta è

$$3\,\frac{3 \cdot 2 \cdot 2}{60} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \,.$$

(c) L'evento del quale si chiede di calcolare la probabilità è

$$\{(b, b, c)\} \bigcup \{(c, b, c)\} \,,$$

che ha probabilità

$$\mathbb{P}(b, b, c) + \mathbb{P}(c, b, c) = \frac{3 \cdot 2 \cdot 2}{60} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 1}{60} = \frac{12 + 6}{60} = \frac{18}{60} = \frac{3}{10} \,.$$

2. *Si lancia ripetutamente un dado equilibrato; si trovi la legge della variabile aleatoria T_2 che conta il numero di lanci necessario per ottenere* 6 *per due volte.*

Sia X_j la variabile aleatoria che assume il valore 1 o 0 secondo che si ottenga, oppure no, 6 al j–esimo lancio; ovviamente $\mathbb{P}(X_j = 1) = p = 1/6$, $\mathbb{P}(X_j = 0) = q = 5/6$.

Si ponga, al solito,

$$S_n := \sum_{j=1}^{n} X_j \,.$$

Vale la relazione

$$\mathbb{P}(T_2 \geq k) = \mathbb{P}(S_{k-1} \leq 1)\,.$$

Perciò

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_2 \geq k) &= \mathbb{P}(S_{k-1} \leq 1) = \mathbb{P}(S_{k-1} = 0) + \mathbb{P}(S_{k-1} = 1) \\ &= q^{k-1} + (k-1)\,p\,q^{k-2}\,,\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_2 = k) &= \mathbb{P}(T_2 \geq k) - \mathbb{P}(T_2 \geq k+1) \\ &= q^{k-1} + (k-1)\,p\,q^{k-2} - q^k - k\,p\,q^{k-1} \\ &= q^{k-1}\,(1-q) + p\,q^{k-2}\,\{(k-1) - kq\} = p\,q^{k-2}\,\{(k-1) - kq + q\} \\ &= p\,q^{k-2}\,(k-1)\,(1-q) = (k-1)\,p^2\,q^{k-2} \\ &= (k-1)\,\left(\frac{1}{6}\right)^2\,\left(\frac{5}{6}\right)^{k-2}\,,\end{aligned}$$

risultato che si poteva scrivere direttamente.

3. *La variabile aleatoria X ha densità data da*

$$f_X(x) = \frac{1}{x^2}\,\mathbf{1}_{(1,+\infty)}(x)\,.$$

Si trovi la legge della variabile aleatoria $Y := \ln X$ e se ne calcoli la speranza.

La funzione di ripartizione di Y è

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(\ln X \leq t) = \mathbb{P}\left(X \leq e^t\right)\,.$$

Ora $F_Y(t) = 0$ per $t \leq 0$ poiché $X \geq 1$ e $e^t \leq 1$. Per $t > 0$ si ha

$$F_Y(t) = \int_1^{e^t} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=1}^{x=e^t} = 1 - e^{-t}\,,$$

che si riconosce subito essere la funzione di ripartizione di una legge esponenziale di parametro 1, sicché la sua speranza è pure eguale a 1.

4. *Nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti; entrambe hanno densità $f(x) = \frac{1}{x^2}\,\mathbf{1}_{(1,+\infty)})(x)$. Si trovi la legge della variabile aleatoria $Z := \sqrt{X\,Y}$.*

La funzione di ripartizione di Z è

$$F_Z(t) = \mathbb{P}(\sqrt{X\,Y} \leq t) = \mathbb{P}(X\,Y \leq t^2)\,.$$

Questa è nulla se $t \leq 1$, mentre per $t > 1$ la densità congiunta di X e Y $f(x,y) = 1/(x^2 y^2)\,\mathbf{1}_{x\geq 1}(x\,\mathbf{1}_{y\geq 1}(y)$ deve essere integrata sul dominio compreso tra le rette

$x = 1$, $y = 1$ e l'iperbole $xy \leq t^2$:

$$F_Z(t) = \int_1^{t^2} \frac{1}{x^2}\, dx \int_1^{t^2/x} \frac{1}{y^2}\, dy = \int_1^{t^2} \frac{1}{x^2} \left[-\frac{1}{y} \right]_{y=1}^{y=t^2/x} dx$$

$$= \int_1^{t^2} \frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{x}{t^2} \right) dx = \int_1^{t^2} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{t^2 x} \right) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{x} - \frac{1}{t^2} \ln x \right]_{x=1}^{x=t^2} = 1 - \frac{1}{t^2} - 2\,\frac{\ln t}{t^2}\,.$$

Derivando si ottiene la densità di Z:

$$f_Z(t) = \left(\frac{2}{t^3} - 2\,\frac{1}{t^3} + 4\,\frac{\ln t}{t^3} \right) \mathbf{1}_{(1,+\infty)}(t) = 4\,\frac{\ln t}{t^3}\, \mathbf{1}_{(1,+\infty)}(t)\,.$$