Università del Salento

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Appunti del corso di Geometria II

Alessandro Montinaro

ANNO ACCADEMICO 2015-2016

L'obiettivo di questi appunti è quello di fornire alcuni concetti fondamentali di una parte dell'Algebra Lineare, della Geometria Proiettiva e della Geometria Affine nel piano, utili per gli studenti del corso di Geometria II.
Gli argomenti affrontati nei quattro capitoli degli appunti sono brevemente descritti qui di seguito.
La prima parte del primo capitolo è dedicata alle proprietà fondamentali delle forme bilineari di uno spazio vettoriale, con particolare riguardo alle forme bilineari simmetriche ed alle forme quadratiche ad esse associate. Nella parte centrale viene trattata la riduzione a forma canonica di una forma quadratica e la classificazione delle forme quadratiche reali attraverso il Teorema di Sylvester. Inoltre, viene fornita una dimostrazione elementare del Criterio di Sylvester per le forme bilineari simmetriche definite positive. Nella parte finale del primo capitolo si studiano gli spazi vettoriali euclidei, cioè gli spazi vettoriali reali muniti di un prodotto scalare, evidenziando come proprietà tipiche dello spazio in cui viviamo, quali la lunghezza di un vettore, l'angolo tra vettori e il Teorema di Pitagora, si generalizzano in modo naturale negli spazi vettoriali euclidei.
Il secondo capitolo è dedicato alle proprietà fondamentali dell'applicazione aggiunta e degli endomorfismi autoaggiunti, analizzando, in particolare, la semplicità di tali endomorfismi e le forme quadratiche da essi indotte.
Nel terzo capitolo si focalizza l'attenzione sullo studio delle isometrie di uno spazio

vettoriale euclideo, analizzandone le proprietà fondamentali e classificandole in dimensione due e tre, rispettivamente.

Infine, oggetto di studio del quarto capitolo sono il piano proiettivo e il piano affine su un campo $\mathbb{K}$ nei casi in cui questo è algebricamente chiuso oppure è il campo dei numeri reali. Nella prima parte viene esaminato il gruppo delle proiettività e la relativa azione su punti e rette del piano proiettivo. Vengono inoltre studiati due notevoli sottogruppi del gruppo delle proiettività: il gruppo delle affinità ed il gruppo delle isometrie nel caso del piano affine euclideo. Nella seconda parte, seguendo l'ottica di Klein nel Programma di Erlangen per lo studio della Geometria, vengono analizzate le proprietà delle coniche lasciate invarianti dalle proiettività, dalle affinità e dalle isometrie, ottenendo una classificazione proiettiva, affine e metrica delle coniche, rispettivamente.

"Welcome to my house. Come freely. Go safely; and leave something of the happiness you bring." (Count Dracula)

1

Forme Bilineari. Spazi Vettoriali Euclidei

In questo capitolo vengono analizzate le proprietà fondamentali delle forme bilineari su spazi vettoriali, con particolare riguardo a quelle simmetriche. La parte finale del capitolo è dedicata all'analisi dei fondamenti degli spazi vettoriali euclidei.

1.1 Forme Bilineari

Definizione 1.1. *Sia* $\mathbf{V}$ *uno spazio vettoriale sul campo* $\mathbb{K}$. *Un'applicazione*

$$\varphi : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{K}$$

si dice ***forma bilineare*** *su* $\mathbf{V}$ *se gode delle seguenti proprietà:*

1. $\varphi(\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x_1}, \mathbf{y}) + \varphi(\mathbf{x_2}, \mathbf{y})$ *per ogni* $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$,
2. $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y_1} + \mathbf{y_2}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y_1}) + \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y_2})$ *per ogni* $\mathbf{x}, \mathbf{y_1}, \mathbf{y_2} \in \mathbf{V}$,
3. $\varphi(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y}) = \lambda\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *per ogni* $\lambda \in \mathbb{K}$ *e* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$.

La forma bilineare φ si dice

- ***simmetrica*** *se* $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ *per ogni* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$*,*
- ***antisimmetrica*** *se* $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ *per ogni* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$*.*

Proposizione 1.1. *φ è antisimmetrica se e solo se $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$.*

Dimostrazione. Se φ è antisimmetrica, per $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, si ha $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ e quindi $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$. Viceversa, per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ risulta

$$0 = \varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

da cui segue $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x})$. □

Esempio 1.1. *L'applicazione $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ è banalmente una forma bilineare, detta **forma bilineare nulla**. Essa è sia simmetrica che antisimmetrica.*

Esempio 1.2. *Siano $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ e*

$$\varphi : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K},\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \longmapsto X^t A Y = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,$$

dove X e Y sono i vettori colonna delle componenti di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{K}^n$. Allora φ è una forma bilineare. Infatti, siano $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ allora vale che

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) &= (X_1 + X_2)^t A Y = (X_1^t + X_2^t) A Y = X_1^t A Y + X_2^t A Y \\ &= \varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + \varphi(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}).\end{aligned}$$

In modo analogo si prova che $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2)$. Infine, siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, allora

$$\varphi(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\lambda X)^t A Y = \lambda X^t A Y = \lambda\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

e analogamente $\varphi(\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y}) = \lambda\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Si noti che se $B = \{\mathbf{e}_1, ...\mathbf{e}_n\}$ è la base canonica di $\mathbb{K}^n$, allora $\varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = a_{ij}$ per ogni $i = 1, ..., n$. È facile vedere che

$$\varphi \text{ è simmetrica} \iff A \text{ è simmetrica}$$

$$\varphi \text{ é antisimmetrica} \iff A \text{ è antisimmetrica}$$

*Infine, se $A = I_n$, allora $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}_1\mathbf{y}_1 + \mathbf{x}_2\mathbf{y}_2 + ... + \mathbf{x}_n\mathbf{y}_n$ si dice **forma bilineare standard** su $\mathbb{K}^n$.*

Esempio 1.3. *La forma bilineare*

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = X^t J_k Y = x_1 y_{k+1} + \cdots + x_k y_n - x_{k+1} y_1 - \cdots - x_n y_k,$$

dove

$$J_k = \begin{pmatrix} 0_k & I_k \\ -I_k & 0_k \end{pmatrix},$$

*è detta **forma alternante standard**.*

Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$, allora

1. $\mathcal{B}(\mathbf{V}) = \{\varphi : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{K} \mid \varphi \text{ è una forma bilineare}\}$;

2. $\mathcal{B}_s(\mathbf{V}) = \{\varphi : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{K} \mid \varphi \text{ è una forma bilineare simmetrica}\}$;

3. $\mathcal{B}_a(\mathbf{V}) = \{\varphi : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{K} \mid \varphi \text{ è una forma bilineare antisimmetrica}\}$.

Proposizione 1.2. *Valgono i seguenti fatti:*

i. $\mathcal{B}(\mathbf{V})$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ rispetto alle seguenti operazioni:

(a) $(\varphi_1 + \varphi_2)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \varphi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varphi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ per ogni $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$;

(b) $(\lambda\varphi)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \lambda\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ e $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$;

ii. $\mathcal{B}_s(\mathbf{V})$ *e* $\mathcal{B}_a(\mathbf{V})$ *sono sottospazi di* $\mathcal{B}(\mathbf{V})$*;*

iii. La somma di $\mathcal{B}_s(\mathbf{V})$ *e* $\mathcal{B}_a(\mathbf{V})$ *è una somma diretta.*

Dimostrazione. I punti (i) e (ii) sono semplici verifiche. Dimostriamo il punto (iii). Sia $\varphi \in \mathcal{B}_a(\mathbf{V}) \cap \mathcal{B}_s(\mathbf{V})$, allora $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = -\varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x})$. Quindi, $\varphi = 0$. □

Osservazione 1.1. *Siano* $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbf{V}_n)$ *e* $B = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ *una base di* $\mathbf{V}_n$*. Se* $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + ... + x_n\mathbf{e}_n$ *e* $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + ... + y_n\mathbf{e}_n$*, dalla bilinearità di* φ *segue che*

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \varphi(e_i, e_j).$$

Quindi, φ *è univocamente determinata dai valori che essa assume su tutte le coppie di vettori della base* B*.*

Sia $A = (a_{ij})$ *una matrice di ordine* n *a coefficienti in* $\mathbb{K}$*, dove* $a_{ij} = \varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ *per ogni* $i, j = 1, ..., n$*, allora*

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = X^t A Y$$

dove X *e* Y *sono i vettori delle componenti di* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *rispetto alla base* B*. Quindi* φ *è univocamente determinata dalla matrice* A*. La matrice* A *è detta* ***matrice associata*** *a* φ *rispetto alla base* B *e la si denota con* $M_B(\varphi)$*.*

Lemma 1.1. *Siano* $\mathbf{V}_n$ *uno spazio vettoriale sul campo* $\mathbb{K}$*,* $B = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ *una base e* $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbf{V}_n)$*, allora*

1. $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbf{V}_n)$ *se e solo se* $M_B(\varphi)$ *è simmetrica;*

2. $\varphi \in \mathcal{B}_a(\mathbf{V}_n)$ *se e solo se* $M_B(\varphi)$ *è antisimmetrica.*

Dimostrazione. $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbf{V}_n)$ se e solo se

$$a_{ij} = \varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \varphi(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) = a_{ji}$$

per ogni $i, j = 1, ..., n$, quindi se e solo se A è una matrice simmetrica.

$\varphi \in \mathcal{B}_a(\mathbf{V}_n)$ se e solo se

$$a_{ij} = \varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = -\varphi(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) = -a_{ji}$$

per ogni $i, j = 1, ..., n$, quindi la matrice A è antisimmetrica. □

Siano $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'insieme delle matrici di ordine n a coefficienti nel campo $\mathbb{K}$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ il sottoinsieme di $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ delle matrici simmetriche di ordine n e $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ il sottoinsieme di $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ delle matrici antisimmetriche di ordine n.

Teorema 1.1. *Siano $\mathbf{V}_n$ uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ e $B = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ una base, allora:*

$$\begin{aligned}
\Psi &: \mathcal{B}(\mathbf{V}_n) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \varphi \longmapsto M_B(\varphi) \\
\Psi_{|\mathcal{B}_s(\mathbf{V}_n)} &: \mathcal{B}_s(\mathbf{V}_n) \longrightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{K}), \quad \varphi \longmapsto M_B(\varphi) \\
\Psi_{|\mathcal{B}_a(\mathbf{V}_n)} &: \mathcal{B}_a(\mathbf{V}_n) \longrightarrow \mathcal{A}_n(\mathbb{K}), \quad \varphi \longmapsto M_B(\varphi)
\end{aligned}$$

sono isomorfismi di spazi vettoriali.

Dimostrazione. Segue dalla definizione della matrice $M_B(\varphi)$ che Ψ è un'applicazione iniettiva. Ora, siano $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + ... + x_n\mathbf{e}_n$ e $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + ... + y_n\mathbf{e}_n$. Sia $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j = X^tAY$, dove X e Y rappresentano i vettori colonna delle componenti di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ rispetto alla base B. Allora $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbf{V}_n)$ è l'unica forma bilineare tale che $\Psi(\varphi) = M_B(\varphi) = A$ per l'Osservazione 1.1. Pertanto φ è bigettiva. Infine, siano $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{B}(\mathbf{V}_n)$, $A_1 = M_B(\varphi_1)$ e $A_2 = M_B(\varphi_2)$. Allora

$$\begin{aligned}
(\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \lambda\varphi_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mu\varphi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda X^tA_1Y + \mu X^tA_2Y \\
&= X^t(\lambda A_1)Y + X^t(\mu A_2)Y = X^t(\lambda A_1 + \mu A_2)Y
\end{aligned}$$

e quindi $M_B(\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2) = \lambda M_B(\varphi_1) + \mu M_B(\varphi_2)$. Cioè

$$\Psi(\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2) = \lambda\Psi(\varphi_1) + \mu\Psi(\varphi_2).$$

Pertanto, Ψ è un isomorfismo di spazi vettoriali. Infine, $\Psi_{|\mathcal{B}_s(\mathbf{V}_n)}$ e $\Psi_{|\mathcal{B}_s(\mathbf{V}_n)}$ sono isomorfismi di spazi vettoriali poiché Ψ è un isomorfismo e vale il Lemma 1.1. $\square$

Teorema 1.2.

1. $\dim \mathcal{B}(\mathbf{V}_n) = n^2$, $\dim \mathcal{B}_s(\mathbf{V}_n) = \frac{n(n+1)}{2}$ e $\dim \mathcal{B}_a(\mathbf{V}_n) = \frac{n(n-1)}{2}$;

2. $\mathcal{B}(\mathbf{V}_n) = \mathcal{B}_s(\mathbf{V}_n) \oplus \mathcal{B}_a(\mathbf{V}_n)$.

Dimostrazione. Poiché $\mathcal{B}(\mathbf{V}_n) \cong \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{B}_s(\mathbf{V}_n) \cong \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ e $\mathcal{B}_a(\mathbf{V}_n) \cong \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ per il Teorema 1.1, segue che $\dim \mathcal{B}(\mathbf{V}_n) = n^2$, $\dim \mathcal{B}_s(\mathbf{V}_n) = \frac{n(n+1)}{2}$ e $\dim \mathcal{B}_a(\mathbf{V}_n) = \frac{n(n-1)}{2}$. Pertanto, vale l'asserto (ii) poiché la somma di $\mathcal{B}_s(\mathbf{V})$ e $\mathcal{B}_a(\mathbf{V})$ è diretta per la Proposizione 1.2. $\square$

Il precedente teorema è particolarmente interessante perché implica che ogni forma bilineare φ su $\mathbf{V}_n$ è somma di un unica forma bilineare simmetrica φ_s e di un'unica forma bilineare antisimmetrica φ_a. Inoltre, vale che se B è una fissata base di $\mathbf{V}_n$

$$\begin{cases} M_B(\varphi_s) = \frac{1}{2}\left(M_B(\varphi) + M_B(\varphi)^t\right) \\ M_B(\varphi_a) = \frac{1}{2}\left(M_B(\varphi) - M_B(\varphi)^t\right) \end{cases}.$$

Definizione 1.2. *Siano $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Allora A e B si dicono* ***congruenti*** *se e solo se esiste $P \in GL(n, \mathbb{K})$ tale che $B = P^tAP$.*

Si osservi che:

1. Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ allora $rg(A) = rg(B)$ (segue, per esempio, dal Teorema del rango per omomorfismi di spazi vettoriali).

2. La congruenza è una relazione di equivalenza su $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposizione 1.3. *Sia $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbf{V}_n)$ e siano B_1, B_2 due basi di $\mathbf{V}_n$. Allora $M_{B_1}(\varphi)$ e $M_{B_2}(\varphi)$ sono congruenti.*

Dimostrazione. Siano $B_1 = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$, $B_2 = \{\mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_n\}$ due basi di $\mathbf{V}_n$ e $P = (p_{ij}) \in GL(n, \mathbb{K})$ la matrice di passaggio dalla base B_2 alla base B_1 ($\mathbf{e}_j = \sum_{h=1}^{n} p_{hj}\mathbf{e}'_h$). Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$, allora $X' = PX$ e $Y' = PY$, dove X e X' sono i vettori colonna delle componenti di $\mathbf{x}$ rispetto alle basi B_1 e B_2, Y e Y' sono i vettori colonna delle componenti di $\mathbf{y}$ rispetto alle basi B_1 e B_2. Se $A = M_{B_1}(\varphi)$ e $A' = M_{B_2}(\varphi)$, allora

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (X')^t A' Y' = (PX)^t A'(PY) = X^t(P^t A' P)Y$$

e quindi $A = P^t A' P$. Pertanto $M_{B_1}(\varphi)$ e $M_{B_2}(\varphi)$ sono congruenti. □

Esempio 1.4. *La forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^3$ definita da*

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_1y_3 + x_3y_1.$$

ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

come la matrice associata a φ rispetto la base canonica $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Sia ora $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ un'altra base di $\mathbb{R}^3$ con $\mathbf{v}_1 = (1,1,0)$, $\mathbf{v}_2 = (1,0,1)$, $\mathbf{v}_3 = (0,1,1)$. Allora la matrice simmetrica associata a φ rispetto tale base è:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Le matrici A e B sono congruenti, infatti $B = M^t AM$, dove

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

è la matrice che rappresenta il cambiamento di base.

Definizione 1.3. *Sia* $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbf{V}_n)$*, allora* $rg(\varphi) = rg\left(M_B(\varphi)\right)$*, dove* B *è una qualsiasi base di* $\mathbf{V}_n$*, è detto* ***rango di*** φ*. Inoltre,* φ *è* ***non degenere*** *se e solo se il rango di* φ *è* n*.*

Si osservi che la definizione è ben posta poiché se B_1 e B_2 sono due basi distinte di $\mathbf{V}_n$, allora $M_{B_1}(\varphi)$ e $M_{B_2}(\varphi)$ sono congruenti per la Proposizione 1.3 e quindi hanno lo stesso rango.

1.2 Forme Bilineari Simmetriche e Forme Quadratiche

L'obiettivo del presente paragrafo e dei successivi è lo studio delle forme bilineari simmetriche e delle forme quadratiche ad esse associate.

Definizione 1.4. *Siano* $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbf{V})$ *e* $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$*. I vettori* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *sono* ***ortogonali*** *se e solo se* $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$*. In tal caso scriveremo* $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$*. Un vettore* $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ *si dice* ***isotropo*** *se e solo se* $\mathbf{v} \perp \mathbf{v}$*.*

Esempio 1.5. *Il vettore* $\mathbf{v} = (0, 0, 1)$ *è isotropo per la forma bilineare simmetrica dell'Esempio 1.4.*

Siano $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ e $\mathbf{S}$ un sottoinsieme di $\mathbf{V}$, allora $\mathbf{S}^{\perp} = \{\mathbf{w} \in \mathbf{V} : \mathbf{v} \perp \mathbf{w}\}$.

Proposizione 1.4. $\mathbf{S}^{\perp}$ *è un sottospazio di* $\mathbf{V}$*.*

Dimostrazione. Siano $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ e $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbf{S}^{\perp}$, allora

$$\varphi(\mathbf{v}, \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{w}) = \varphi(\mathbf{v}, \lambda\mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{v}, \mu\mathbf{w}) = \lambda\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + \mu\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0.$$

Pertanto $\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{w} \in \mathbf{S}^{\perp}$. □

Il sottospazio $\mathbf{V}^{\perp}$ è detto ***nucleo*** di φ e si denota con $\ker(\varphi)$.

Un sottospazio $\mathbf{U}$ di $\mathbf{V}$ si dice ***singolare*** se $\mathbf{U} \cap \mathbf{U}^{\perp} \neq \{\mathbf{0}\}$ e ***totalmente singolare*** se $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{U}^{\perp}$.

Due sottospazi $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ si dicono ***ortogonali*** se $\mathbf{U} \subset \mathbf{W}^{\perp}$. Dalla simmetria di φ segue che:

$$\mathbf{U} \subset \mathbf{W}^{\perp} \Longleftrightarrow \mathbf{W} \subset \mathbf{U}^{\perp}$$

Se $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sono ortogonali e uno è supplementare dell'altro, allora scriveremo

$$\mathbf{V} = \mathbf{U} \perp \mathbf{W}.$$

Lemma 1.2. *Siano $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbf{V})$, $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ sottospazi di $\mathbf{V}$. Se $\mathbf{W}$ è finitamente generato, allora $\mathbf{U}$ è ortogonale a $\mathbf{W}$ se e solo se $\mathbf{U}$ è ortogonale ai vettori di una base di $\mathbf{W}$.*

Dimostrazione. Siano $B = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_k\}$ una base di $\mathbf{W}$ e $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$, allora $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{k} w_i \mathbf{e}_i$. Se $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$, allora

$$\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \varphi\left(\mathbf{u}, \sum_{i=1}^{k} w_i \mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{k} w_i \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{e}_i).$$

Pertanto, se $\mathbf{u} \perp \mathbf{e}_i$ per ogni $i = 1, ..., k$, allora $\mathbf{u} \perp \mathbf{w}$ e quindi $\mathbf{u} \in \mathbf{W}^{\perp}$. Viceversa, se $\mathbf{u} \perp \mathbf{w}$, allora $\mathbf{u} \perp \mathbf{e}_i$ per ogni $i = 1, ..., k$. $\square$

Teorema 1.3. *Se $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbf{V}_n)$, allora $\mathbf{V}_n = \ker(\varphi) \perp \mathbf{S}$, dove $\mathbf{S}$ è un sottospazio non singolare di $\mathbf{V}_n$.*

Dimostrazione. Sia $\mathbf{S}$ un supplementare di $\ker(\varphi)$ in $\mathbf{V}_n$. Allora $\mathbf{V}_n = \ker(\varphi) \oplus \mathbf{S}$. Poiché tutti i vettori di $\ker(\varphi)$ sono ortogonali a tutti i vettori di $\mathbf{V}_n$, vale che $\mathbf{V}_n = \ker(\varphi) \perp \mathbf{S}$.

Ora proviamo che $\mathbf{S}$ è non singolare. Sia $x \in \mathbf{S}$ tale che $x \perp s$ per ogni $s \in \mathbf{S}$. Se $w \in \mathbf{V}_n$, allora $w = k_1 + s_1$ con $k_1 \in \ker(\varphi)$ e $s_1 \in \mathbf{S}$. Ciò implica $\varphi(x, w) = \varphi(x, k_1) + \varphi(x, s_1) = 0$. Pertanto, $x \in \ker(\varphi) \cap \mathbf{S}$ e quindi $x = 0$, essendo $\mathbf{S}$ un supplementare di $\ker(\varphi)$. $\square$

Teorema 1.4. *S* $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbf{V}_n)$, *allora* $rg(\varphi) = n - \dim \ker(\varphi)$.

Dimostrazione. Siano $B = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ una fissata base di $\mathbf{V}_n$ e $A = M_B(\varphi)$. Sia $f \in End(\mathbf{V})$ tale che $A = M_B(f)$. Proviamo che $\ker(\varphi) = \ker(f)$. Per ogni vettore $\mathbf{x}$ denotiamo con X il vettore colonna delle componenti di $\mathbf{x}$ rispetto a B. In particolare E_i denota le componenti di $\mathbf{e_i}$ rispetto alla base B. Quindi E_i è il vettore colonna avente componenti tutte nulle tranne la i-esima che è uguale a 1. Quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{y} \in \ker(f) \iff AY = 0 \iff I_n AY = 0 \\ \iff E_i^t AY = 0, \ \text{per ogni}\, i = 1, .., n \iff X^t AY = 0 \end{aligned}$$

per il Lemma 1.2. Segue che $\ker(f) = \ker(\varphi)$. Dal Teorema del rango segue che $rg(\varphi) = rg(A) = rg(f) = \dim \mathbf{V} - \dim \mathbf{V}^\perp$. □

Corollario 1.1. $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbf{V}_n)$ *è degenere se e solo se* $\ker(\varphi) \neq \{0\}$.

Esempio 1.6. *Consideriamo la forma bilineare simmetrica su* $\mathbb{R}^3$ *definita da:*

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -x_1 y_1 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + 3x_2 y_2 + 2x_3 y_2 + x_3 y_3.$$

Tale forma bilineare è degenere, infatti sia

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

la matrice associata a φ *rispetto alla base canonica* B*, si ha che* $rg(A) = 2$. *Inoltre, sia* $f \in End(\mathbb{R})$ *tale che* $A = M_B(f)$*; determiniamo* $\ker(f)$*:*

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto $\ker(f) = L(1, 1, -2)$*. Preso il vettore* $\bar{\mathbf{x}} = \lambda(1, 1, -2)$ *risulta che* $\bar{\mathbf{x}} \in \ker(f)$ *e quindi*

$$\varphi(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) = 0 \quad \forall\, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3,$$

cioè $\bar{\mathbf{x}} \in \ker(\varphi)$*. D'altra parte* $rg(\varphi) = 2$ *e quindi* $\ker(\varphi) = \ker(f) = L(1, 1, -2)$ *(si veda la dimostrazione del Teorema 1.4)*

Definizione 1.5. *Sia* $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbf{V})$ *e sia*

$$Q : V \longrightarrow \mathbb{K}, \mathbf{x} \longmapsto Q(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}),$$

allora Q *é detta* ***forma quadratica associata a*** φ*.*

Proposizione 1.5. *Se* Q *è la forma quadratica associata a* φ*, allora:*

1. $Q(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^2\mathbf{x}$ *per ogni* $\lambda \in \mathbb{K}$ *e* $\mathbf{x} \in V$*;*

2. $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}\{Q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - Q(\mathbf{x}) - Q(\mathbf{y})\}$.

Dimostrazione. L'asserto (1) è banalmente vero essendo φ bilineare. Ora, sia

$$Q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = Q(\mathbf{x}) + Q(\mathbf{y}) + 2\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

essendo φ bilineare e simmetrica l'asserto (2) segue banalmente. □

La formula (2) della Proposizione 1.5 è detta ***formula di polarizzazione*** e φ è detta ***forma polare*** di Q. Dalla precedente proposizione si evince che che ogni forma bilineare è la forma polare di un unica forma quadratica.

Sia $B = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ una base di $\mathbf{V}_n$ e sia $A = M_B(\varphi)$ con $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbf{V}_n)$. Siano Q la forma quadratica associata a φ e $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + ... + x_n\mathbf{e}_n$ il generico vettore di $\mathbf{V}_n$. Allora

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = X^tAX.$$

Quindi, anche Q viene individuata in modo univoco da A (fissando la base B). Pertanto

$$M_B(Q) = A = M_B(\varphi).$$

Infine, se Q è una forma quadratica allora $rg(Q) = rg(\varphi)$.

Si noti che ogni forma quadratica individua un polinomio omogeneo di grado 2 nelle indeterminate $x_1, ..., x_n$. È vero anche il viceversa. Infatti, considerato il generico polinomio omogeneo $P(x_1, ..., x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} q_{ij}x_ix_j$ individua la forma quadratica $Q(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} q_{ij}x_ix_j$, dove $\mathbf{x}$ è il vettore di componenti $x_1, ..., x_n$ rispetto ad una fissata base B di $\mathbb{K}^n$. La forma quadratica Q, rispetto alla base B, ha associata la matrice $A = (a_{ij})$ con $a_{ii} = q_{ii}$ e $a_{ij} = a_{ji} = q_{ij}/2$ per $i < j$. Chiaramente, se $P_1(x_1, ..., x_n), P_2(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ individuano la stessa forma quadratica, le matrici associate sono congruenti.
Infine è facile vedere che se $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbf{V})$ è la forma polare di Q, fissato un generico sottospazio $\mathbf{W}$ di $\mathbf{V}_n$, la forma indotta da φ su $\mathbf{W}$ è la forma polare della restrizione di Q a $\mathbf{W}$.

1.3 Teorema di Rappresentazione di Riesz

Il Teorema di Rappresentazione di Riesz stabilisce un isomorfismo canonico tra $\mathbf{V}_n$ e il suo duale nel caso in cui $\mathbf{V}_n$ sia munito di una forma bilineare, simmetrica non degenere. E' ben noto che, in generale uno spazio vettoriale finito dimensionale non è canonicamente isomorfo al suo duale. La parte finale di questo paragrafo è dedicata allo studio del reticolo dei sottospazi di $\mathbf{V}_n$ rispetto all'ortogonalità indotta da un forma bilineare e simmetrica.

Teorema 1.5. *(**Riesz**) Sia φ una forma bilineare simmetrica non degenere su $\mathbf{V}_n$. Allora*

$$\Phi : \mathbf{V}_n \to \mathbf{V}_n^*, \quad \mathbf{x} \mapsto \phi_{\mathbf{x}},$$

dove $\phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{x})$, è un isomorfismo (canonico) di spazi vettoriali. In particolare, per ogni $f \in \mathbf{X}^*$ esiste un unico $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ tale che $f = \phi_{\mathbf{x}}$.

Dimostrazione. Proviamo che Φ è lineare. Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{V}_n$, allora $\Phi(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2) = \phi_{\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2}$. Per ogni $\mathbf{w} \in \mathbf{V}_n$, si ha che

$$\phi_{\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2}(\mathbf{w}) = \varphi(\mathbf{w}, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \varphi(\mathbf{w}, \mathbf{v}_1) + \varphi(\mathbf{w}, \mathbf{v}_2) = \phi_{\mathbf{v}_1}(\mathbf{w}) + \phi_{\mathbf{v}_2}(\mathbf{w}),$$

quindi

$$\Phi(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \Phi(\mathbf{v}_1) + \Phi(\mathbf{v}_2).$$

Analogamente $\Phi(\lambda\mathbf{v}) = \phi_{\lambda\mathbf{v}}$ e, per ogni $\mathbf{w} \in \mathbf{V}_n$,

$$\phi_{\lambda\mathbf{v}}(\mathbf{w}) = \varphi(\mathbf{w}, \lambda\mathbf{v}) = \lambda\varphi(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \lambda\phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}),$$

quindi

$$\Phi(\lambda\mathbf{v}) = \lambda\Phi(\mathbf{v}).$$

Pertanto Φ è lineare.
Ora, sia $\mathbf{x} \in \ker\Phi$, allora $\phi_{\mathbf{x}}$ è la forma nulla, cioè $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ per ogni $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$ e quindi $\mathbf{x} \in \ker(\varphi)$, pertanto $\mathbf{x} = 0$ essendo φ non degenere. Quindi Φ è iniettiva e pertanto Φ è bigettiva essendo $dim\mathbf{V}_n = \dim\mathbf{V}_n^*$. □

Corollario 1.2. *Siano φ una forma bilineare simmetrica non degenere su $\mathbf{V}_n$ e $\mathbf{S}$ un sottospazio di $\mathbf{V}_n$, allora per ogni $g \in \mathbf{S}^*$ esiste $\mathbf{x} \in \mathbf{V}_n$ tale che $g(\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.*

Dimostrazione. Siano $g \in \mathbf{S}^*$ e $B_0 = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_k\}$ una base di $\mathbf{S}$. Per il Teorema della base incompleta, B_0 si può estendere ad una base di $\mathbf{V}_n$. Sia $f \in \mathbf{V}_n^*$ tale che $f(\mathbf{e}_i) = g(\mathbf{e}_i)$ per $i = 1, ..., k$, $f(\mathbf{e}_i) = 0$ per $i = k+1, ..., n$. Per Teorema di Riesz esiste $\mathbf{x}$ tale che $f(\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ e quindi $g(\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ per ogni $\mathbf{y} \in \mathbf{S}$. □

Osservazione 1.2. *Nel Corollario 1.2 il vettore $\mathbf{x}$ non è univocamente determinato poiché g si può estendere ad una forma di $\mathbf{V}_n^*$ in diversi modi.*

Teorema 1.6. *Sia $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbf{V}_n)$ non degenere e sia $\mathbf{X}$ un sottospazio di $\mathbf{V}_n$. Allora*

1. $\dim\mathbf{X} + \dim\mathbf{X}^\perp = \dim\mathbf{V}_n$;

2. $\mathbf{X}^{\perp\perp} = \mathbf{X}$

Dimostrazione. Sia $\Phi : \mathbf{V}_n \longrightarrow \mathbf{X}^*$, $\mathbf{x} \longmapsto \phi_\mathbf{x}$ dove $\phi_\mathbf{x} : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{K}$, $\mathbf{y} \longmapsto \phi_\mathbf{x}(\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Chiaramente, Φ è ben posta. Inoltre, Φ è lineare poiché φ è bilineare. Sia $g \in \mathbf{X}^*$, per il Corollario 1.2 esiste $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_n$ tale che $g(\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{v})$. Pertanto, Φ è suriettiva. Sia $\mathbf{w} \in \ker\Phi$, allora $\phi_\mathbf{w}$ è la forma nulla su $\mathbf{X}$. Quindi $\phi_\mathbf{w}(\mathbf{x}) = 0$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ se e solo se $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = 0$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$. Pertanto, $\mathbf{w} \in ker\Phi$ se e solo se $\mathbf{w} \in \mathbf{X}^\perp$. Quindi $\ker\Phi = \mathbf{X}^\perp$. Dal Teorema del rango segue che

$$\dim \mathbf{V}_n = \dim Im\Phi + \dim\ker\Phi = \dim \mathbf{X}^* + \dim \mathbf{X}^\perp = \dim \mathbf{X} + \dim \mathbf{X}^\perp$$

essendo $\mathbf{X} \cong \mathbf{X}^*$. Ciò prova l'asserto (1).
Segue banalmente che $\mathbf{S} \subset \mathbf{S}^{\perp\perp}$. D'altra parte $\dim \mathbf{S}^{\perp\perp} = \dim \mathbf{V}_n - \dim \mathbf{S}^\perp = \dim \mathbf{V}_n - (\dim \mathbf{V}_n - \dim \mathbf{S}) = \dim \mathbf{S}$. Pertanto $\mathbf{S} = \mathbf{S}^{\perp\perp}$, che è l'asserto (2). □

Proposizione 1.6. *Siano $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbf{V}_n)$ e $\mathbf{W}$ un sottospazio di $\mathbf{V}_n$.*

1. *Se $\mathbf{W}$ è totalmente singolare, allora $\mathbf{W} \subset \mathbf{W}^\perp$. In particolare, $\dim \mathbf{W} \leq \frac{n}{2}$;*

2. *se $\mathbf{W}$ non è singolare, allora $\mathbf{V}_n = \mathbf{W} \perp \mathbf{W}^\perp$.*

Dimostrazione. Se $\mathbf{W}$ è totalmente singolare, allora $\dim \mathbf{W} \leq \dim \mathbf{W}^\perp$. D'altra parte, per il Teorema 1.6 (1) vale che

$$\dim \mathbf{V}_n = \dim \mathbf{W} + \dim \mathbf{W}^\perp \geq 2\dim \mathbf{W},$$

pertanto $\dim \mathbf{W} \leq \frac{n}{2}$.
Se $\mathbf{W}$ è non singolare, allora la somma di $\mathbf{W}$ con $\mathbf{W}^\perp$ è diretta, quindi

$$\mathbf{V} = \mathbf{W} \perp \mathbf{W}^\perp,$$

per il Teorema 1.6 (1). □

Proposizione 1.7. *Siano* $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbf{V})$ *e* $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ *due sottospazi di* $\mathbf{V}$. *Allora valgono i seguenti fatti:*

1. *Se* $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{Y}$, *allora* $\mathbf{Y}^\perp \subseteq \mathbf{X}^\perp$;

2. $(\mathbf{X} + \mathbf{Y})^\perp = \mathbf{X}^\perp \cap \mathbf{Y}^\perp$;

3. $\mathbf{X}^\perp + \mathbf{Y}^\perp \subseteq (\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})^\perp$;

4. *Se* $\mathbf{V}$ *è finitamente generato, allora* $\mathbf{X}^\perp + \mathbf{Y}^\perp = (\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})^\perp$.

Dimostrazione. L'asserto (1) è banalmente vero.
Siano $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \subset \mathbf{X} + \mathbf{Y}$, allora, per l'asserto (1), vale che $(\mathbf{X} + \mathbf{Y})^\perp \subseteq \mathbf{X}^\perp$ e $(\mathbf{X} + \mathbf{Y})^\perp \subseteq \mathbf{Y}^\perp$, pertanto $(\mathbf{X} + \mathbf{Y})^\perp \subseteq \mathbf{X}^\perp \cap \mathbf{Y}^\perp$. Ora, siano $\mathbf{t} \in \mathbf{X}^\perp \cap \mathbf{Y}^\perp$ e $\mathbf{u} \in \mathbf{X} + \mathbf{Y}$. Quindi, esistono $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ e $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ tali che $\mathbf{u} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$. Allora

$$\varphi(\mathbf{t}, \mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{t}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{t}, \mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{t}, \mathbf{y}).$$

Siccome $\mathbf{t} \in \mathbf{X}^\perp \cap \mathbf{Y}^\perp$, si ha che $\varphi(\mathbf{t}, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{t}, \mathbf{y}) = 0$. Pertanto, $\mathbf{t} \in (\mathbf{X} + \mathbf{Y})^\perp$ e quindi $\mathbf{X}^\perp \cap \mathbf{Y}^\perp \subseteq (\mathbf{X} + \mathbf{Y})^\perp$. Dalla doppia inclusione segue l'asserto (2).
Siano $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ sottospazi di $\mathbf{V}$. $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \subseteq \mathbf{X}, \mathbf{Y}$, allora $\mathbf{X}^\perp, \mathbf{Y}^\perp \subseteq (\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})^\perp$ e quindi

$$\mathbf{X}^\perp + \mathbf{Y}^\perp \subseteq (\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})^\perp. \tag{1.1}$$

Se $\mathbf{V}$ è finitamente generato, allora

$$\begin{aligned}
\dim(\mathbf{X}^\perp + \mathbf{Y}^\perp) &= \dim \mathbf{X}^\perp + \dim \mathbf{Y}^\perp - \dim(\mathbf{X}^\perp \cap \mathbf{Y}^\perp) \\
&= \dim \mathbf{V} - \dim \mathbf{X} + \dim \mathbf{V} - \dim \mathbf{Y} - \dim(\mathbf{X}^\perp \cap \mathbf{Y}^\perp) \\
&= \dim \mathbf{V} - \dim \mathbf{X} + \dim \mathbf{V} - \dim \mathbf{Y} - \dim(\mathbf{X} + \mathbf{Y})^\perp \\
&= 2\dim \mathbf{V} - \dim \mathbf{X} - \dim \mathbf{Y} - (\dim \mathbf{V} - \dim(\mathbf{X} + \mathbf{Y})) \\
&= \dim \mathbf{V} - \dim \mathbf{X} - \dim \mathbf{Y} + \dim(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) \\
&= \dim \mathbf{V} - \dim(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y}) = \dim(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})^\perp.
\end{aligned}$$

Poiché vale (1.1) e $\dim(\mathbf{X}^\perp + \mathbf{Y}^\perp) = \dim(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})^\perp$, segue l'asserto (4). □

1.4 Diagonalizzazione delle forme quadratiche

Di seguito è fornita la definizione di base ortogonale, o diagonalizzante, per una forma bilineare e simmetrica. In questo paragrafo viene affrontato il problema dell'esistenza di siffatte basi.

Definizione 1.6. *Se $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbf{V}_n)$, una base $B = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ di $\mathbf{V}_n$ si dice* ***base ortogonale*** *(per φ) se $\mathbf{e}_i \perp \mathbf{e}_j$ per ogni $i, j = 1, ..., n$, $i \neq j$.*

Se B è una base ortogonale di $\mathbf{V}$ per φ, allora $M_B(\varphi)$ è diagonale e quindi

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a_{11}x_1y_1 + a_{22}x_2y_2 + ... + a_{nn}x_ny_n.$$

Lemma 1.3. *Se $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbf{V}_n)$ è non degenere, allora esiste una base ortogonale di $\mathbf{V}_n$ per φ.*

Dimostrazione. Proviamo l'asserto per induzione su n. Se $n = 1$ la tesi è banalmente vera. Quindi, supponiamo vera la tesi per $n - 1$ e proviamola per n. Poiché φ è non degenere, esiste $\mathbf{e}_1 \in \mathbf{V}_n$ vettore non isotropo. Infatti, se per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{V}_n$ $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$, allora per l'Osservazione 1.1 φ è anche antisimmetrica. Quindi, $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbf{V}_n) \cap \mathcal{B}_a(\mathbf{V}_n)$ e, per la Proposizione 1.2 (*iii*), $\varphi = 0$. Ma ciò è assurdo poiché φ è non degenere.
Sia $\mathbf{V}_1 = L(\mathbf{e}_1)$, allora $\mathbf{V}_1$ è non singolare. Infatti, se $\mathbf{V}_1$ fosse singolare, allora $\mathbf{V}_1 \subset \mathbf{V}_1^{\perp}$, $\dim \mathbf{V}_1 = 1$, e quindi $\mathbf{e}_1$ sarebbe isotropo, ma ciò è assurdo. Pertanto $\mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_1^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$ e quindi la somma di $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_1^{\perp}$ è diretta. Allora

$$\dim(\mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_1^{\perp}) = \dim \mathbf{V}_1 + \dim \mathbf{V}_1^{\perp} = \dim \mathbf{V}_n,$$

per il Teorema 1.6 (1). Quindi $\mathbf{V}_n = \mathbf{V}_1 \perp \mathbf{V}_1^{\perp}$. Sia φ_1 la forma indotta su $\mathbf{V}_1^{\perp}$. Proviamo che φ_1 è non degenere. Sia $\mathbf{x}_0 \in \ker(\varphi_1)$, allora

$$\varphi_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \tag{1.2}$$

per ogni $\mathbf{y} \in \mathbf{V}_1^\perp$. Sia $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_n$. Poiché esistono $\lambda \in \mathbb{K}$ e $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_1^\perp$ tali che $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{e}_1 + \mathbf{u}$, allora $\mathbf{V}_n = \mathbf{V}_1 \perp \mathbf{V}_1^\perp$. Quindi,

$$\varphi(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{x}_0, \lambda \mathbf{e}_1 + \mathbf{u}) = \lambda \varphi(\mathbf{x}_0, \mathbf{e}_1) + \varphi(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}).$$

Poiché $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{V}_1^\perp$ segue che $\varphi(\mathbf{x}_0, \mathbf{e}_1) = 0$ e per (1.2) $\varphi(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) = 0$. Quindi $\mathbf{x}_0 \in \ker(\varphi)$, allora $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ essendo φ non degenere. Pertanto, φ_1 è non degenere. Siccome $\dim \mathbf{V}_1^\perp = n - 1$, per l'ipotesi induttiva esiste $B_1 = \{\mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ base ortogonale di $\mathbf{V}_1^\perp$ per φ_1 e quindi per φ. Allora $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ è una base ortogonale di $\mathbf{V}_n$ per φ. □

Teorema 1.7. *Se $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbf{V}_n)$, allora esiste una base ortogonale di $\mathbf{V}_n$ per φ.*

Dimostrazione. Se φ è non degenere, la tesi segue banalmente dal Lemma 1.3. Sia quindi φ degenere. Allora

$$\mathbf{V}_n = \ker(\varphi) \perp \mathbf{S}$$

con $\mathbf{S}$ non singolare per il Teorema 1.3. Sia φ_1 la forma indotta da φ su $\mathbf{S}$. Poiché $\mathbf{S}$ è non singolare, φ_1 è non degenere, esiste una base ortogonale $B_\mathbf{S}$ di $\mathbf{S}$ per φ_1 e quindi per φ. Sia B_0 una qualsiasi base di $\ker(\varphi)$, allora $B = B_0 \cup B_\mathbf{S}$ è una base ortogonale di $\mathbf{V}_n$ per φ. □

Corollario 1.3. *Se $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, allora A è congruente ad una matrice diagonale.*

Dimostrazione. Sia $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbb{K}^n)$ data da $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = X^t A Y$, dove $A = M_B(\varphi)$ e B è la base canonica di $\mathbb{K}^n$. Sia $D = M_{B'}(\varphi)$ dove B' è una base ortogonale di $\mathbb{K}^n$ per φ, allora esiste $P \in GL(n, \mathbb{K})$ tale che $D = P^t A P$. □

Teorema 1.8. *Sia $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbf{V}_n)$, dove $\mathbf{V}_n$ è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso, allora esiste una base ortogonale B di $\mathbf{V}_n$ tale che*

$$M_B(\varphi) = \begin{pmatrix} I_r & 0_1 \\ 0_2 & 0_3 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

dove $r = rg(\varphi)$*,* I_r *è la matrice identica di* $\mathcal{M}_r(\mathbb{K})$*,* $0_1 \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{K})$*,* $0_2 \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{K})$ *e* $0_3 \in \mathcal{M}_{n-r,n-r}(\mathbb{K})$ *sono tutte matrici nulle.*

Dimostrazione. Sia $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbf{V}_n)$, allora esiste una base ortogonale $B_0 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ di $\mathbf{V}_n$ per φ. Quindi,

$$M_{B_0}(\varphi) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots 0 & \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Sia $r = rg(\varphi)$, allora $r = rg(M_{B_0}(\varphi))$. Dopo aver eventualmente riordinato gli elementi di B_0, possiamo assumere che $a_{ii} \neq 0$ per $i = 1, ..., r$ e $a_{ii} = 0$ per $i = r+1, ..., n$. Poiché $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso, per ogni $i = 1, ..., r$ esiste $\alpha_i \in \mathbb{K}$ tale che $\alpha_i^2 = a_{ii}$. Sia $B = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_n\}$, dove

$$\mathbf{f}_i = \begin{cases} \alpha_i^{-1}\mathbf{e}_i, \text{ per } i = 1, ..., r \\ \mathbf{e}_i, \text{ per } i = r+1, ..., n \end{cases}$$

allora $\varphi(\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j) = 0$ per $i \neq j$ o per $i = j > r$, mentre per $i = j < r$ risulta $\varphi(\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_i) = \varphi(\alpha_i^{-1}\mathbf{e}_i, \alpha_i^{-1}\mathbf{e}_i) = \alpha_i^{-2}\varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = 1$. Pertanto, B è ortogonale e $M_B(\varphi)$ è come in (1.3). □

Corollario 1.4. *Sia* $A \in S_n(\mathbb{K})$ *con* $\mathbb{K}$ *algebricamente chiuso. Se* $r = rg(A)$*, allora* A *è congruente ad una matrice diagonale della forma (1.3).*

Dimostrazione. Segue banalmente dal Teorema 1.8 procedendo come nel Corollario 1.3. □

Teorema 1.9. ***(Sylvester)*** *Sia* φ *una forma bilineare simmetrica di rango* r *di uno spazio vettoriale reale* $\mathbf{V}_n$*. Allora esiste un intero* $0 \leq p \leq r$ *dipendente solo* *da φ, ed una base $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ di $\mathbf{V}_n$ tale che*

$$M_B(\varphi) = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

dove 0 *denota la matrice nulla di ordini opportuni.*

Dimostrazione. Sia $B_0 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ una base ortogonale di $\mathbf{V}_n$ rispetto a φ, allora

$$M_{B_0}(\varphi) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots 0 & \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Sia $r = rg(\varphi)$, allora $r = rg(M_{B_0}(\varphi))$. Possiamo assumere che $a_{ii} \neq 0$ per $i = 1, ..., r$ e $a_{ii} = 0$ per $i = r+1, ..., n$, e che inoltre i primi $0 \leq p \leq r$ siano positivi (infatti, psssiamo eventualmente riordinare gli elementi di B_0 perché ciò si verifichi). Allora $a_{ii} = \alpha_{ii}^2$ per $i \leq p$ e $a_{ii} = -\alpha_{ii}^2$ per $p+1 \leq i \leq r$. Sia $B = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, ..., \mathbf{e}'_n\}$, dove

$$\mathbf{e}'_i = \begin{cases} \alpha_{ii}^{-1}\mathbf{e}_1 & \text{per } 1 \leq i \leq r \\ \mathbf{e}_i & \text{per } r+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Quindi, $\varphi(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j) = 0$ per $i \neq j$, o per $i = j > r$. Per $i = j \leq r$ risulta $\varphi(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j) = 1$ o -1 a seconda che $i \leq p$ o $i > p$ rispettivamente. Pertanto,

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_r^2.$$

Rimane da provare che p dipende solo da φ e non dalla base scelta. Sia $B' = \{\mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2, ..., \mathbf{e}''_n\}$ una base ortogonale di $\mathbf{V}_n$ rispetto a Q tale che

$$Q(\mathbf{y}) = y_1^2 + ... + y_t^2 - y_{t+1}^2 - ... - t_r^2.$$

Supponiamo $t \neq p$ e quindi $t < p$. Si considerino i sottospazi $S = \langle \mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_p \rangle$ e $T = \langle \mathbf{e}''_{t+1}, ..., \mathbf{e}''_n \rangle$ di $\mathbf{V}_n$. Dalla formula di Grassmann segue:

$\dim S \cap T = \dim S + \dim T - \dim(S+T) = p + n - t - \dim(S+T) \geq p - t > 0.$

Sia $\mathbf{v} \in S \cap T$, $\mathbf{v} \neq 0$. Allora

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{e}'_1 + ... + \lambda_p \mathbf{e}'_p = \mu_{t+1} \mathbf{e}''_{t+1} + ... + \mu_n \mathbf{e}''_n$$

e quindi

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{v}) &= \lambda_1^2 + ... + \lambda_p^2 > 0 \\ Q(\mathbf{v}) &= -\mu_{t+1}^2 - ... - \mu_n^2 < 0 \end{aligned}$$

che è assurdo. Pertanto $t = p$ e quindi la tesi. □

Procedendo come nel Corollario 1.3 vale il seguente

Corollario 1.5. *Se $A \in S_n(\mathbb{R})$, allora A è congruente ad una matrice diagonale come in 1.4 dove $r = rg(A)$ e p è un intero compreso tra 0 e r dipendente solo da A.*

Se Q è una forma quadratica su uno spazio vettoriale reale $\mathbf{V}_n$, allora esiste una base B di $\mathbf{V}_n$ rispetto alla quale

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_r^2 \tag{1.5}$$

dove p ed r sono interi tali che $0 \leq p \leq r$, che dipendono solo da Q. La (1.5) si dice ***forma canonica*** di Q. Gli interi p ed r si dicono ***indice di positività*** e ***di negatività***, rispettivamente. La coppia $(p, r-p)$ è detta ***segnatura*** di Q. Una forma quadratica Q si dice

- ***definita positiva*** se $Q(\mathbf{x}) > 0$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$, $\mathbf{x} \neq 0$;
- ***semidefinita positiva*** se $Q(\mathbf{x}) \geq 0$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$;

- ***semidefinita negativa*** se $Q(\mathbf{x}) \leq 0$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$;
- ***definita negativa*** se $Q(\mathbf{x}) < 0$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$, $\mathbf{x} \neq 0$;
- ***indefinita*** se non è semidefinita positiva o negativa.

Analoga terminologia si applica alla forma polare di Q.

Dal Teorema di Sylvester vale che le possibili forme canoniche delle forme quadratiche non nulle sono le seguenti:

	Forma quadratica	Segnatura
Definita positiva	$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + ... + x_n^2$	$(n, 0)$
Semidefinita positiva	$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + ... + x_r^2$, $r < n$	$(r, 0)$
Semidefinita negativa	$Q(\mathbf{x}) = -x_1^2 - ... - x_r^2$, $r < n$	$(0, r)$
Definita negativa	$Q(\mathbf{x}) = -x_1^2 - ... - x_n^2$	$(0, n)$
Indefinita	$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_r^2$	$(p, r - p)$

In particolare, per $n = 2$, se Q non è la forma nulla, si ha:

	Forma quadratica	Segnatura
Definita positiva	$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$	$(2, 0)$
Semidefinita positiva	$Q(\mathbf{x}) = x_1^2,$	$(1, 0)$
Semidefinita negativa	$Q(\mathbf{x}) = -x_1^2,$	$(0, 1)$
Definita negativa	$Q(\mathbf{x}) = -x_1^2 - x_2^2$	$(0, 2)$
Indefinita	$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2^2$	$(1, 1)$

Per $n = 3$, e Q diversa dalla forma nulla, risulta:

	Forma quadratica	Segnatura
Definita positiva	$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$	$(3,0)$
Semidefinita positiva	$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2,$	$(2,0)$
	$Q(x) = x_1^2,$	$(1,0)$
Semidefinita negativa	$Q(\mathbf{x}) = -x_1^2,$	$(0,1)$
	$Q(\mathbf{x}) = -x_1^2 - x_2^2,$	$(0,2)$
Definita negativa	$Q(\mathbf{x}) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$	$(0,3)$
Indefinita	$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$	$(1,2)$
	$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$	$(2,1)$
	$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2^2$	$(1,1)$

Se $Q(\mathbf{x}) = X^tAX$ è una forma quadratica reale, allora Q è congruente ad una matrice della forma (1.4) per il Teorema di Sylvester. Pertanto è ben posta la seguente definizione:

Definizione 1.7. *Sia $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Allora A si dice* ***definita positiva, semidefinita positiva, semidefinita negativa, definita negativa*** *o* ***indefinita****, se $Q(\mathbf{x}) = X^tAX$ è definita positiva, semidefinita positiva, semidefinita negativa, definita negativa o indefinita rispettivamente.*

Corollario 1.6. *Sia $A \in S_n(\mathbb{R})$, allora A è definita positiva se e solo se esiste $M \in GL(n, \mathbb{R})$ tale che $A = M^tM$.*

Dimostrazione. Per il Teorema di Sylvester, $A \in S_n(\mathbb{R})$ è definita positiva se e solo se è congruente a I_n, cioè $A = M^tM$ con $M \in GL(n, \mathbb{R})$. □

Definizione 1.8. *Il* ***minore principale di ordine*** *k di $A \in M_n(\mathbb{K})$, dove $k = 1, ..., n$, è il determinante della sottomatrice A_k di A ottenuta eliminando le ultime $n - k$ righe e le ultime $n - k$ colonne di A.*

Teorema 1.10. ***(Criterio di Sylvester)*** *Una matrice simmetrica reale A di ordine n è definita positiva se e solo se per ogni $k = 1, ..., n$ il minore principale di ordine k di A è positivo.*

Dimostrazione. Si consideri la forma quadratica su $\mathbb{R}^n$ definita positiva $Q(Y) = Y^t AY$ individuata dalla matrice simmetrica reale A rispetto ad una fissata base B di $\mathbb{R}^n$. Per $k = 1, ..., n$, si consideri la forma quadratica su $\mathbb{R}^k$ definita da $Q_k(X) = X^t A_k X$. Per ogni $\bar{\mathbf{x}} = (x_1, ..., x_k)$ vettore di $\mathbb{R}^k$ si consideri il vettore di $\mathbb{R}^n$ definito da $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_k, 0, ..., 0)$. Vale che:

$$Q_k(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{X}^t A_k \bar{X} = \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij} x_i x_j = X^t AX = Q(\mathbf{x})$$

Allora Q_k è definita positiva poiché Q è definita positiva. Pertanto A_k è definita positiva, e per il Corollario 1.6 esiste $M_k \in GL(k, \mathbb{R})$ tale che $A_k = M_k^t M_k$. Quindi $\det A_k = \det(M_k^t M_k) = \det(M_k)^2 > 0$ per ogni $k = 1, ..., n$.
Proviamo ora per induzione su n che A è definita positiva se e solo $\det A_k > 0$ per ogni $k = 1, ..., n$. Per $n = 1$ l'asserto è banalmente vero. Quindi supponiamo vera la tesi per $n - 1$ e proviamola per n. Si consideri la forma quadratica $Q(\mathbf{x}) = X^t AX$. Si consideri il sottospazio $\mathbf{Y}$ di $\mathbb{R}^n$ costituito dai vettori $\mathbf{y} = (y_1, ..., ...y_{n-1}, 0)$ e la forma quadratica su $\mathbb{R}^{n-1}$ definita da $Q_{n-1}(\bar{\mathbf{y}}) = \bar{Y}^t A_{n-1} \bar{Y}$ con $\bar{\mathbf{y}} = (y_1, ..., ...y_{n-1})$. Segue dall'ipotesi induttiva che Q_{n-1} è definita positiva. Inoltre $Q(\mathbf{y}) > 0$ per ogni $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, poiché $Q_{n-1}(\bar{\mathbf{y}}) = Q(\mathbf{y})$. Per il Teorema 1.8 esiste una base ortogonale $B' = \{\mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_n\}$ di $\mathbb{R}^n$ tale che

$$Q(\mathbf{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda_n y_n^2$$

con $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$. Dal Corollario 1.4 segue che $\det A = (\det P)^2 \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$, dove P è la matrice di passaggio dalla base B alla base B'.
Sia $X = L(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Poiché $\dim \mathbf{Y} = n - 1$ e $\dim \mathbf{X} = 2$, allora $\dim \mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \geq 1$. Sia $\mathbf{w} \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$, $\mathbf{w} \neq 0$. Allora $Q(\mathbf{w}) > 0$ ed esistono scalari $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$\mathbf{w} = w_1 e_1 + w_2 e_2$. Quindi

$$0 < Q(\mathbf{w}) \leq \lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2 \leq \lambda_2 \left(w_1^2 + w_2^2\right)$$

da cui segue che $0 < \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$. D'altra parte $0 < \det A$ e quindi

$$0 < \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n,$$

essendo $\det A = (\det P)^2 \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$. Quindi, $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$. Pertanto, $Q(\mathbf{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda_n y_n^2 > 0$ per ogni $y \neq 0$ e quindi A è definita positiva. $\square$

1.5 Spazi Vettoriali Euclidei

In questo paragrafo sono studiate le proprietà fondamentali degli spazi vettoriali euclidei.

Definizione 1.9. *Sia* $\mathbf{V}$ *uno spazio vettoriale reale. Un forma bilineare e simmetrica* $\langle , \rangle$ *di* $\mathbf{V}$ *definita positiva si dice* ***prodotto scalare****. La coppia* $(\mathbf{V}, \langle , \rangle)$ *si dice* ***Spazio Vettoriale Euclideo****.*

Esempio 1.7. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$, *è uno prodotto scalare su* $\mathbb{R}^n$*, detto* ***prodotto scalare standard.***

Esempio 1.8. *Lo spazio di vettori geometrici di* $\mathbf{V}_3$ *con prodotto scalare definito da:*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{cases} 0 & se\, \mathbf{u} = 0 \; o\, \mathbf{v} = 0, \\ \\ \|u\| \|v\| \cos \hat{\mathbf{u}\mathbf{v}} & se\, \mathbf{u} \neq 0\,, \mathbf{v} \neq 0, \end{cases}$$

è uno spazio vettoriale euclideo.

Esempio 1.9. *Per le proprietà degli integrali si ha che*

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx. \tag{1.6}$$

è un prodotto scalare su $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}\,[a, b]$*.*

Definizione 1.10. *Sia* $(\mathbf{V}, \langle , \rangle)$ *uno spazio vettoriale euclideo.*

$$\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}, \mathbf{x} \longmapsto \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

*si dice **norma** su* $\mathbf{V}$ *indotta dal prodotto scalare* $\langle , \rangle$*. Il numero reale non negativo* $\|\mathbf{x}\|$ *si dice **norma del vettore*** $\mathbf{x}$*.*

Teorema 1.11. ***(Disuguaglianza di Schwarz)***
Sia $(\mathbf{V}, \langle , \rangle)$ *uno spazio vettoriale euclideo, allora per ogni* $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ *risulta*

$$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leq \|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\|$$

e l'uguaglianza vale se e solo se $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *sono paralleli.*

Dimostrazione. Se $\mathbf{w} = 0$, l'asserto è banalmente vero. Quindi, supponiamo che $\mathbf{w} \neq 0$. Siano $a = \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle$ e $b = -\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$. Allora

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle a\mathbf{v} + b\mathbf{w}, a\mathbf{v} + b\mathbf{w} \rangle &= a^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + 2ab \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + b^2 \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle \\ &= \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - 2 \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle^2 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle^2 \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle \\ &= \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle \left(\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle^2 \right) \end{aligned}$$

Poiché $\mathbf{w} \neq 0$, allora $\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle > 0$ e quindi $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle$, cioè $|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leq \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|$.
Si noti che $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle^2 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle$ se e solo se $\langle a\mathbf{v} + b\mathbf{w}, a\mathbf{v} + b\mathbf{w} \rangle = 0$ e ciò si verifica se e solo se $\mathbf{v} = -a\mathbf{w}/b$, essendo $b \neq 0$. □

Proposizione 1.8. *La norma* $\|\|$ *gode delle seguenti proprietà:*

1. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ *per ogni* $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$*, e* $\|\mathbf{x}\| = 0$ *se e solo se* $\mathbf{x} = 0$*;*

2. $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \, \|\mathbf{x}\|$ *per ogni* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$*;*

3. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ *per ogni* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$*. Inoltre l'uguaglianza vale se e solo se* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ *sono paralleli.*

Dimostrazione. Gli asserti (1) e (2) sono banalmente veri in quanto seguono dalla definizione di norma. Proviamo l'asserto (3).
Dalla disuguaglianza di Schwarz segue che se $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ allora

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 &= \|\mathbf{x}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \|\mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| + \|\mathbf{y}\|^2 \\ &\leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 \leq (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2 \end{aligned}$$

Quindi, $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$. Inoltre, vale l'uguaglianza se e solo se $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| = \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|$ e quindi se e solo se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono paralleli. □

Definizione 1.11. *La coppia* $(\mathbf{V}, \|\cdot\|)$ *si dice* ***spazio normato****.*

Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ vettori non nulli di uno spazio vettoriale euclideo $\mathbf{V}$. Allora $\frac{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle|}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|} \leq 1$ e quindi

$$-1 \leq \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|} \leq 1.$$

Poiché $\cos_{|[0,\pi]} : [0, \pi] \to [-1, 1]$ è invertibile, esiste un unico $\theta \in [0, \pi]$ tale che $\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}$. Allora

$$\theta = \arccos\left(\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|}\right)$$

é l'angolo convesso (non orientato) individuato da $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. Pertanto,

$$\langle v, w\rangle = \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|\cos\theta. \tag{1.7}$$

Esempio 1.10. *Si consideri il prodotto scalare standard di* $\mathbb{R}^4$*:*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle_1 = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4.$$

Siano $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0, 1)$*,* $\mathbf{v}_2 = (1, 1, -1, 0)$ *e calcoliamo l'angolo individuato da essi*

$$\theta = \arccos\left(\frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1\rangle_1}{\|\mathbf{v}_1\|_1\,\|\mathbf{v}_2\|_1}\right) = \arccos\frac{2}{3} \Rightarrow \theta \simeq \frac{4}{9}\pi.$$

Ora, su $\mathbb{R}^4$ *si consideri il prodotto scalare definito da*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle_2 = \frac{1}{2}x_1y_1 + \frac{1}{2}x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4. \tag{1.8}$$

L'angolo individuato dai vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ *è:*

$$\theta = \arccos\left(\frac{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle_2}{\|\mathbf{v}_1\|_2 \|\mathbf{v}_2\|_2}\right) = \arccos\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}.$$

Si considerino, infine, i vettori ortogonali rispetto al prodotto scalare standard $\mathbf{w}_1 = (1,1,1,1)$ *e* $\mathbf{w}_2 = (1,0,0,-1)$*, che rispetto al prodotto scalare* $\langle , \rangle_2$ *determinano l'angolo:*

$$\theta = \arccos\left(\frac{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\rangle_2}{\|\mathbf{w}_1\|_2 \|\mathbf{w}_2\|_2}\right) = \arccos -\frac{1}{9} \Rightarrow \theta \simeq \frac{8}{15}\pi.$$

Teorema 1.12. *Siano* $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ *due vettori di uno spazio vettoriale euclideo, allora:*

1. ***(Teorema di Carnot)*** $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|\cos\theta$*, dove* θ *é l'angolo convesso (non orientato) individuato da* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$*;*

2. ***(Teorema di Pitagora)*** $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$ *se e solo se* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ *sono ortogonali.*

Dimostrazione. Vale che:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}\rangle = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|\cos\theta \end{aligned}$$

dove θ è l'angolo convesso (non orientato) individuato da $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ per (1.7). Inoltre, $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$ se e solo se $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 0$, cioè se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono ortogonali. □

Sia $\mathbf{x}$ un vettore di uno spazio vettoriale euclideo $\mathbf{V}$. Allora $\mathbf{x}$ si dice ***versore*** se e solo se $\|\mathbf{x}\| = 1$. In particolare, se $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ allora $\mathbf{e} := \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$ si dice ***versore*** associato a $\mathbf{x}$.

Un insieme finito di vettori $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_t\}$ di $\mathbf{V}$ si dice ***ortogonale*** se $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\rangle = 0$ per ogni $i, j = 1, ..., t$, con $i \neq j$.

Un insieme finito di vettori $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_t\}$ di $\mathbf{V}$ si dice ***ortonormale*** se è un insieme ortogonale e vale che $\|\mathbf{v}_i\| = 1$ per ogni $i = 1, ..., t$.

Se $\dim V = n$ una ***base ortonormale*** è una base $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ tale che $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij}$ per ogni $i, j = 1, ..., n$.

Proposizione 1.9. *Se* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_t\}$ *è un insieme ortogonale di vettori non nulli di* $\mathbf{V}$*, allora* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_t\}$ *è un insieme linearmente indipendente. Inoltre, se* $\dim \mathbf{V} = n$*, un insieme ortogonale di* n *vettori non nulli di* $\mathbf{V}$ *è una base ortogonale.*

Dimostrazione. Siano $\lambda_1, ..., \lambda_t \in \mathbb{R}$ tali che $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + ... \lambda_t \mathbf{v}_t = 0$. Allora per ogni $j = 1, ..., t$ risulta

$$0 = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{v}_i, v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \lambda_j$$

quindi $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_t\}$ è un insieme linearmente indipendente. In particolare, se $\dim V = n$, un insieme ortogonale di n vettori è linearmente indipendente massimale, cioè una base. $\square$

Se $B = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ è una base ortonormale di $\mathbf{V}_n$, allora $M_B(\langle , \rangle) = I_n$, quindi, rispetto a tale base

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + ... + x_n y_n.$$

In altre parole la *rappresentazione* di $\langle , \rangle$ rispetto ad una fissata base ortonormale è la stessa del prodotto scalare standard dei vettori di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica di quest'ultimo.

Teorema 1.13. *Ogni spazio vettoriale euclideo* $\mathbf{V}_n$ *possiede basi ortonormali.*

Dimostrazione. Poiché $\langle , \rangle$ è definito positivo, segue dal Teorema di Sylvester che esiste una base B' tale che $M_{B'}(\langle , \rangle) = I_n$,. Quindi, B' è una base ortonormale di $\mathbf{V}_n$. $\square$

Il seguente teorema rappresenta un algoritmo per costruire basi ortonormali a partire da basi di uno spazio vettoriale euclideo finitamente generato.

Teorema 1.14. ***(di Ortonormalizzazione di Gram-Schmidt)***
Sia $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ *una base di uno spazio vettoriale euclideo* $\mathbf{V}_n$*, allora l'insieme* $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ *in cui* $\mathbf{e}_k = \frac{\mathbf{w}_k}{\|\mathbf{w}_k\|}$ *e*

$$\begin{cases} \mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1, \\ \mathbf{w}_k = \mathbf{v}_k - \sum_{j=1,}^{k-1} \frac{\langle \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_j \rangle}{\langle \mathbf{w}_j, \mathbf{w}_j \rangle} \mathbf{w}_j, \;\; k \geq 2, \end{cases}$$

è una base ortonormale di $\mathbf{V}_n$*.*

Dimostrazione. Dimostriamo per induzione su k che $L(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k) = L(\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_k)$ e che $\mathbf{w}_k \neq \mathbf{0}$ per ogni $k = 1, ..., n$. Per $k = 1$ la tesi è banalmente vera. Supponiamo vera la tesi per $k-1$ e proviamola per k. Supponiamo che $\mathbf{w}_k = 0$, allora

$$\mathbf{v}_k = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_j \rangle}{\langle \mathbf{w}_j, \mathbf{w}_j \rangle} \mathbf{w}_j$$

e pertanto $\mathbf{v}_k \in L(\mathbf{w}_1, ...\mathbf{w}_{k-1}) = L(\mathbf{v}_1, ...\mathbf{v}_{k-1})$ per l'ipotesi induttiva. Quindi $\mathbf{v}_k$ è combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, ...\mathbf{v}_{k-1}$. Ma ciò è assurdo poiché $\{\mathbf{v}_1, ...\mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_k\}$ è un sottoinsieme della base $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$. Pertanto $\mathbf{w}_k \neq \mathbf{0}$.
Vale che:

$$\mathbf{v}_k = -\mathbf{w}_k + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_j \rangle}{\langle \mathbf{w}_j, \mathbf{w}_j \rangle} \mathbf{w}_j$$

e quindi $\mathbf{v}_k \in L(\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_k)$. Pertanto, $L(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k) \subseteq L(\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_k)$. D'altra parte $L(\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_{k-1}) \subseteq L(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{k-1})$ per l'ipotesi induttiva e quindi $\mathbf{w}_k \in L(\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_{k-1}, \mathbf{v}_k) \subseteq L(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)$. Pertanto $L(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k) = L(\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_k)$.
Proviamo ora per induzione su k che $\mathbf{w}_k$ è ortogonale a $\mathbf{w}_j$ per ogni $j = 1, ..., k-1$. Se $k = 2$, vale che:

$$\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1 \rangle = \left\langle \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \right\rangle = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle = 0.$$

Ora supponiamo vera la tesi per $k-1$ e proviamola per k. Per $j = 1, ...k-1$ vale che

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_j \rangle &= \left\langle \mathbf{v}_k - \sum_{i=1,}^{k-1} \frac{\langle \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_i \rangle}{\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i \rangle} \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \right\rangle = \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_j \rangle - \sum_{i=1,}^{k-1} \frac{\langle \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_i \rangle}{\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i \rangle} \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle \\ &= \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_j \rangle - \frac{\langle \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_j \rangle}{\langle \mathbf{w}_j, \mathbf{w}_j \rangle} \langle \mathbf{w}_j, \mathbf{w}_j \rangle = 0.\end{aligned}$$

Pertanto, $\{\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n\}$ è un insieme di n vettori non nulli a due a due ortogonali. Quindi $\{\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n\}$ è una base ortogonale di $\mathbf{V}_n$ per la Proposizione 1.9. Conseguentemente, $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ è una base ortonormale di $\mathbf{V}_n$. $\square$

Esempio 1.11. *Consideriamo il prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$ definito da:*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \frac{1}{2} x_1 y_1 + \frac{1}{2} x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4.$$

Applicando il procedimento di Gram-Schmidt ai vettori

$$\mathbf{v}_1 = (1,\ 1,\ -1,\ -1), \qquad \mathbf{v}_2 = (1,\ 1,\ 1,\ 1),$$

$$\mathbf{v}_3 = (-1,\ -1,\ -1,\ 1), \quad \mathbf{v}_4 = (1,\ 0,\ 0,\ 1),$$

otteniamo:

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_1 &= \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{w}_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1 \\ &= \mathbf{v}_2 + \frac{1}{3} \mathbf{w}_1 \\ &= \frac{2}{3} (2,\ 2,\ 1,\ 1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_3 &= \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle}\mathbf{w}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle}\mathbf{w}_2 \\
&= \mathbf{v}_3 + \frac{1}{3}\mathbf{w}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{w}_2 \\
&= (0,\, 0,\, -1,\, 1)\,, \\
\mathbf{w}_4 &= \mathbf{v}_4 - \frac{\langle \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle}\mathbf{w}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle}\mathbf{w}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_3 \rangle}{\langle \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_3 \rangle}\mathbf{w}_3 \\
&= \mathbf{v}_4 + \frac{1}{6}w_1 - \frac{1}{2}\mathbf{w}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{w}_3 \\
&= \frac{1}{2}\,(1,\, -1,\, 0,\, 0)\,.
\end{aligned}$$

Quindi $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ *è una base ortogonale ed* $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ *è una base ortonormale di* $\mathbb{R}^4$*, dove*

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(1,\, 1,\, -1,\, -1) \\
\mathbf{e}_2 &= \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|} = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\,(2,\, 2,\, 1,\, 1) \\
\mathbf{e}_3 &= \frac{\mathbf{w}_3}{\|\mathbf{w}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(0,\, 0,\, -1,\, 1) \\
\mathbf{e}_4 &= \frac{\mathbf{w}_4}{\|\mathbf{w}_4\|} = \frac{1}{2}\,(1,\, -1,\, 0,\, 0)\,.
\end{aligned}$$

Proposizione 1.10. *Siano* $B = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ *una base ortonormale di* $\mathbf{V}_n$ *e* $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{e}_j$ *un generico vettore di* $\mathbf{V}_n$*, allora per ogni* $i = 1, ..., n$ *risulta* $x_i = \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle$*.*

Dimostrazione. Per ogni $i = 1, ..., n$ risulta

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_j \delta_{ji} = x_i$$

□

La seguente proposizione è stata già provata per le forme bilineari simmetriche. Tuttavia, ivi forniamo una dimostrazione anche nel caso degli spazi vettoriali euclidei.

Proposizione 1.11. *Sia* $\mathbf{W}$ *un sottospazio finito dimensionale di uno spazio vettoriale euclideo* $\mathbf{V}$*, allora* $\mathbf{V} = \mathbf{W} \oplus \mathbf{W}^{\perp}$*.*

Dimostrazione. Sia $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ una base di $\mathbf{W}$. Sia $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ e

$$\mathbf{w} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 + ... + \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_n \rangle e_n.$$

Allora $\mathbf{v} = \mathbf{w} + (\mathbf{v} - \mathbf{w})$ con

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} - \mathbf{w} \rangle &= \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} - \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} \langle \mathbf{v}, e_j \rangle^2 - \sum_{i,j=1}^{n} \langle \mathbf{v}, e_i \rangle \langle \mathbf{v}, e_j \rangle \delta_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \langle \mathbf{v}, e_j \rangle^2 - \sum_{j=1}^{n} \langle \mathbf{v}, e_j \rangle^2 = 0 \end{aligned}$$

Quindi $\mathbf{V} = \mathbf{W} + \mathbf{W}^{\perp}$. Inoltre $\mathbf{W} \cap \mathbf{W}^{\perp} = \langle 0 \rangle$, essendo il prodotto scalare $\langle , \rangle$ definito positivo. □

Definizione 1.12. *Sia* $\mathbf{V}$ *uno spazio vettoriale euclideo ed* $\mathbf{U}$ *un suo sottospazio di dimensione finita. Dalla Proposizione 1.11 segue che per ogni vettore* $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ *esistono e sono unici i vettori* $\mathbf{x_U} \in \mathbf{U}$*,* $\mathbf{x_{U^\perp}} \in \mathbf{U}^{\perp}$ *tale che* $\mathbf{x} = \mathbf{x_U} + \mathbf{x_{U^\perp}}$*. I vettori* $\mathbf{x_U}$ *e* $\mathbf{x_{U^\perp}}$ *si dicono* ***proiezioni ortogonali*** *di* $\mathbf{x}$ *su* $\mathbf{U}$ *e* $\mathbf{U}^{\perp}$*, rispettivamente.*

La seguente proposizione mostra la natura della matrice di passaggio tra basi ortonormali.

Proposizione 1.12. *Siano* $B = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ *e* $B' = \{\mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_n\}$ *due basi di uno spazio vettoriale euclideo* $\mathbf{V}_n$ *e sia* P *la matrice di passaggio da* B *a* B'*. Se* B *è ortonormale, allora* B' *è ortonormale se e solo se* $P^t P = I_n$*.*

Dimostrazione. L' i-esima colonna della matrice P rappresenta le coordinate di $\mathbf{e}'_i$ rispetto a B. Quindi $\mathbf{e}'_i = \sum_h p_{hi} \mathbf{e}_h$. Allora

$$\begin{aligned}\left\langle \mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j \right\rangle &= \left\langle \sum_{h=1}^{n} p_{hi}\mathbf{e}_h, \sum_{k=1}^{n} p_{kj}\mathbf{e}_k \right\rangle = \sum_{h,k=1}^{n} p_{hi}p_{kj} \left\langle \mathbf{e}_h, \mathbf{e}_h \right\rangle \\ &= \sum_{h,k=1}^{n} p_{hi}p_{kj}\delta_{hk} = \sum_{h=1}^{n} p_{hi}p_{hj}.\end{aligned}$$

Quindi, $\left\langle \mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j \right\rangle$ è uguale al prodotto della i-esima riga di P^t per la j-esima colonna di P. Pertanto, $\left\langle \mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j \right\rangle = \delta_{ij}$ se e solo se $P^tP = I_n$. $\square$

"You know that place between sleep and awake; that's the place where you can still remember dreaming? That's where I'll always love you. That's where I'll be waiting." (Peter Pan)

2

Endomorfismi Simmetrici

In questo capitolo vengono analizzate le principali proprietà dell'aggiunta di un'applicazione lineare, e degli endomorfismi autoaggiunti (simmetrici).

2.1 Applicazione aggiunta

Teorema 2.1. *Siano* $(\mathbf{V}_n, \langle\rangle)$ *e* $\left(\mathbf{W}_m, \langle\rangle'\right)$ *spazi vettoriali euclidei e sia* $f : \mathbf{V}_n \longrightarrow \mathbf{W}_m$ *un'applicazione lineare. Allora esiste un'unica applicazione lineare* $f^* : \mathbf{W}_m \longrightarrow \mathbf{V}_n$ *tale che*

$$\langle f(\mathbf{v}), \mathbf{w}\rangle' = \langle \mathbf{v}, f^*(\mathbf{w})\rangle$$

per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_n, \mathbf{w} \in \mathbf{W}_m$. *L'applicazione* f^* *è detta* ***applicazione aggiunta*** *di* f.

Dimostrazione. Sia $\mathbf{w} \in \mathbf{W}_m$ e sia $\theta_\mathbf{w} : \mathbf{V}_n \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $\theta_\mathbf{w}(\mathbf{v}) = \langle f(\mathbf{v}), \mathbf{w}\rangle'$. Poiché f è lineare e $\langle , \rangle'$ è bilineare, segue che $\theta_\mathbf{w}$ è una forma su $\mathbf{V}_n$, cioè $\theta_\mathbf{w} \in \mathbf{V}_n^*$. Per il Teorema di Riesz, esiste un unico $\mathbf{x} \in \mathbf{V}_n$ tale che $\theta_\mathbf{w}(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{x}\rangle$.
Sia, quindi

$$f^* : \mathbf{W}_m \longrightarrow \mathbf{V}_n, \ \mathbf{w} \longmapsto \mathbf{x}.$$

Allora $\langle f(\mathbf{v}), \mathbf{w}\rangle' = \theta_\mathbf{w}(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{x}\rangle = \langle \mathbf{v}, f^*(\mathbf{w})\rangle$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_n, \mathbf{w} \in \mathbf{W}_m$. Ciò prova l'esistenza e l'unicità di f^*. Rimane da provare che f^* è lineare. Siano

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathbf{W}_m$. Allora per ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_n$ vale che:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{v}, f^*(\lambda_1 \mathbf{w}_1 + \lambda_2 \mathbf{w}_2) \rangle &= \langle f(\mathbf{v}), \lambda_1 \mathbf{w}_1 + \lambda_2 \mathbf{w}_2 \rangle' = \lambda_1 \langle f(\mathbf{v}), \mathbf{w}_1 \rangle' + \lambda_2 \langle f(\mathbf{v}), \mathbf{w}_2 \rangle' \\
&= \lambda_1 \langle \mathbf{v}, f^*(\mathbf{w}_1) \rangle + \lambda_2 \langle \mathbf{v}, f^*(\mathbf{w}_2) \rangle \\
&= \langle \mathbf{v}, \lambda_1 f^*(\mathbf{w}_1) + \lambda_2 f^*(\mathbf{w}_2) \rangle
\end{aligned}$$

quindi $f^*(\lambda_1 \mathbf{w}_1 + \lambda_2 \mathbf{w}_2) = \lambda_1 f^*(\mathbf{w}_1) + \lambda_2 f^*(\mathbf{w}_2)$, cioè f^* è lineare. □

Corollario 2.1. *Siano $B = \{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ e $B' = \{\mathbf{e}'_i\}_{i=1}^m$ basi ortonormali di $(\mathbf{V}_n, \langle\rangle)$ e $(\mathbf{W}_m, \langle\rangle')$ spazi vettoriali euclidei rispettivamente, e sia $f : \mathbf{V}_n \longrightarrow \mathbf{W}_m$. Allora*

$$M_{B',B}(f^*) = M_{B,B'}(f)^t.$$

Dimostrazione. Siano $A = M_{B,B'}(f)$ e $A' = M_{B',B}(f^*)$, allora $A = (a_{ij})$ e $A' = (a'_{ij})$. Quindi a'_{ij} è la i-esima componente di $f^*(\mathbf{e}'_j)$ rispetto alla base B, pertanto $a'_{ij} = \left\langle f^*(\mathbf{e}'_j), \mathbf{e}_i \right\rangle$ essendo B una base ortonormale di $\mathbf{V}_n$. Quindi

$$a'_{ij} = \left\langle f^*(\mathbf{e}'_j), \mathbf{e}_i \right\rangle = \left\langle \mathbf{e}'_j, f(\mathbf{e}_i) \right\rangle' = \left\langle f(\mathbf{e}_i), \mathbf{e}'_j, \right\rangle' = a_{ji}$$

essendo $\left\langle f(\mathbf{e}_i), \mathbf{e}'_j, \right\rangle$ la j-esima componente della decomposizione di $f(\mathbf{e}_i)$ rispetto alla base ortonormale B' di $\mathbf{W}_m$. □

Teorema 2.2. *Siano f^* e g^* le applicazioni aggiunte di f e g rispettivamente. Allora si ha che*

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*.$$

Dimostrazione. Siano f, g applicazioni lineari e f^*, g^* le rispettive applicazioni aggiunte. Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}_n$:

$$\langle (f \circ g)(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, (f \circ g)^*(\mathbf{y}) \rangle.$$

D'altra parte,

$$\begin{aligned}
\langle (f \circ g)(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle &= \langle f(g(\mathbf{x})), \mathbf{y} \rangle = \langle g(\mathbf{x}), f^*(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{x}, g^*(f^*(\mathbf{y})) \rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, (g^* \circ f^*)(\mathbf{y}) \rangle.
\end{aligned}$$

Pertanto $\langle \mathbf{x}, (f \circ g)^*(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{x}, (g^* \circ f^*)(\mathbf{y}) \rangle$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}_n$ e quindi

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*.$$

□

In seguito, analizzeremo due particolari classi di endomorfismi, quelli che coincidono con l'aggiunta (endomorfismi simmetrici o autoaggiunti), e quelli che sono invertibili per cui l'applicazione aggiunta coincide con l'inversa (isometrie lineari).

2.2 Endomorfismi simmetrici

Definizione 2.1. *Siano $(\mathbf{V}_n, \langle , \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo, un endomorfismo $f : \mathbf{V}_n \to \mathbf{V}_n$ si dice* ***endomorfismo simmetrico*** *se e solo se*

$$\langle f(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, f(\mathbf{y}) \rangle$$

per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}_n$. Quindi f è simmetrico se coincide con la sua applicazione aggiunta.

Esempio 2.1. *Sia $\mathbf{U}$ un sottospazio di uno spazio vettoriale euclideo finitamente generato $\mathbf{V}$. La proiezione ortogonale $p : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x_U}$ è un endomorfismo simmetrico. Infatti, posto $p(\mathbf{x}) = \mathbf{x_U}$, $p(\mathbf{y}) = \mathbf{y_U}$, si ha che:*

$$\langle p(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x_U}, \mathbf{y} - \mathbf{y_U} + \mathbf{y_U} \rangle = \langle \mathbf{x_U}, \mathbf{y} - \mathbf{y_U} \rangle + \langle \mathbf{x_U}, \mathbf{y_U} \rangle = \langle \mathbf{x}, p(\mathbf{y}) \rangle,$$

in quanto $\langle \mathbf{x_U}, \mathbf{y} - \mathbf{y_U} \rangle = 0$ essendo $\mathbf{y} - \mathbf{y_U} \in \mathbf{U}^\perp$.

Teorema 2.3. *La matrice che rappresenta un endomorfismo simmetrico f di $\mathbf{V}_n$ rispetto ad una base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ è una matrice reale simmetrica.*

Dimostrazione. L'asserto segue dal Corollario 2.1. □

Proposizione 2.1. *Siano $(\mathbf{V}_n, \langle , \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo ed $f : \mathbf{V}_n \to \mathbf{V}_n$ un automorfismo simmetrico. Allora f^{-1} è simmetrico.*

Dimostrazione. Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}_n$ e $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}_n$ tale che $\mathbf{x} = f(\mathbf{v})$ e $\mathbf{y} = f(\mathbf{w})$. Allora:

$$\langle f^{-1}(\mathbf{x}), \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{v}, f(\mathbf{w})\rangle = \langle f(\mathbf{v}), \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{x}, f^{-1}(\mathbf{y})\rangle.$$

□

Se f è un endomorfismo simmetrico di $\mathbf{V}$, la funzione $Q_f : \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ definita da

$$Q_f(\mathbf{x}) = \langle f(\mathbf{x}), \mathbf{x}\rangle, \quad \text{per ogni}\, \mathbf{x} \in \mathbf{V}, \tag{2.1}$$

si dice ***forma quadratica associata ad*** f. Se $\mathbf{V}$ ha dimensione n, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_3) \in \mathbf{V}_n$ e $A = (a_{ij})$ è la matrice associata a f rispetto ad una base ortonormale, allora:

$$Q_f(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = X^t A X.$$

Teorema 2.4. *Si ha una corrispondenza biunivoca tra endomorfismi simmetrici e forme quadratiche ad essi associate.*

Dimostrazione. f individua Q_f attraverso la (2.1). Viceversa, data Q, esiste un unico endomorfismo simmetrico f corrispondente ad essa. Basta osservare che:

$$Q(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \langle f(\mathbf{x}+\mathbf{y}), \mathbf{x}+\mathbf{y}\rangle = Q(\mathbf{x}) + \langle f(\mathbf{x}), \mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{x}, f(\mathbf{y})\rangle + Q(\mathbf{y}),$$

e poiché f è simmetrico si ha che:

$$\langle f(\mathbf{x}), \mathbf{y}\rangle = \frac{1}{2}\{Q(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - Q(\mathbf{x}) - Q(\mathbf{y})\}.$$

□

2.2.1 Autovalori di un endomorfismo simmetrico

In questo paragrafo analizzeremo le proprietà fondamentali relative agli autovalori di un endomorfismo simmetrico.

Teorema 2.5. *Le soluzioni dell'equazione caratteristica di una matrice simmetrica reale sono tutte reali.*

Dimostrazione. Sia $\boldsymbol{P}_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ il polinomio caratteristico associato alla matrice simmetrica e reale A. Come conseguenza del Teorema fondamentale dell'algebra $\boldsymbol{P}_A(\lambda)$ è interamente decomponibile in $\mathbb{C}$. Pertanto, sia $\lambda_1 = a_1 + ib_1$ una soluzione di $\boldsymbol{P}_A(\lambda) = 0$. Si consideri il sistema lineare omogeneo di n equazioni in n incognite

$$(A - \lambda_1 I)X = 0,$$

esso ammette almeno una soluzione $Z_1 = X_1 + iY_1 \in \mathbb{C}^{n,1}$, con $X_1, Y_1 \in \mathbb{R}^{n,1}$ non entrambi nulli. Quindi

$$AZ_1 = \lambda_1 Z_1$$

cioè

$$A(X_1 + iY_1) = (a_1 + ib_1)(X_1 + iY_1).$$

Uguagliando le parti reali ed immaginarie si ottiene:

$$\begin{cases} AX_1 = a_1X_1 - b_1Y_1 \\ AY_1 = b_1X_1 + a_1Y_1. \end{cases}$$

Sia f l'endomorfismo simmetrico di $\mathbb{R}^n$, munito del prodotto scalare standard, avente A per matrice associata rispetto alla base canonica. Allora

$$\begin{cases} f(X_1) = a_1X_1 - b_1Y_1 \\ f(Y_1) = b_1X_1 + a_1Y_1. \end{cases}$$

Pertanto:

$$\langle f(X_1), Y_1\rangle = a_1X_1Y_1 - b_1\|Y_1\|^2, \qquad \langle X_1, f(Y_1)\rangle = b_1\|X_1\|^2 + a_1Y_1X_1,$$

e quindi

$$b_1\left(\|X_1\|^2 + \|Y_1\|^2\right) = 0.$$

Poiché almeno uno tra X_1 e Y_1 è non nullo, allora $\|X_1\|^2 + \|Y_1\|^2 > 0$, quindi $b_1 = 0$. Pertanto, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. $\square$

Corollario 2.2. *Sia f un endomorfismo simmetrico dello spazio vettoriale euclideo $(\mathbf{V}_n, \langle,\rangle)$. Allora tutte le soluzioni dell'equazione caratteristica di f sono reali.*

Dimostrazione. Sia B una base ortonormale di $(\mathbf{V}_n, \langle,\rangle)$; allora $M_B(f)$ è simmetrica e poiché vale $\boldsymbol{P}_f(\lambda) = \boldsymbol{P}_A(\lambda)$, la tesi segue dal Teorema 2.5. $\square$

Teorema 2.6. *Sia f un endomorfismo simmetrico di $(\mathbf{V}_n, \langle,\rangle)$ e siano λ_1, λ_2 due autovalori distinti di f. Allora gli autospazi $V(\lambda_1)$ e $V(\lambda_2)$ sono ortogonali.*

Dimostrazione. Siano $\mathbf{x} \in V(\lambda_1)$ e $\mathbf{y} \in V(\lambda_2)$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Allora $f(\mathbf{x}) = \lambda_1\mathbf{x}$ e $f(\mathbf{y}) = \lambda_2\mathbf{y}$. Poiché f è simmetrico vale che:

$$\langle \lambda_1\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle f(\mathbf{x}), \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, f(\mathbf{y})\rangle = \langle \mathbf{x}, \lambda_2\mathbf{y}\rangle.$$

Quindi

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 0,$$

da cui si ha che $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 0$ essendo $\lambda_1 \neq \lambda_2$. $\square$

Teorema 2.7. *(Spettrale) Sia f un endomorfismo simmetrico di $(\mathbf{V}_n, \langle,\rangle)$, allora esiste una base B ortonormale di autovettori di f. In particolare f è semplice, ovvero $M_B(f)$ è una matrice diagonale.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione sulla dimensione n dello spazio vettoriale. Per $n = 1$ la tesi è banalmente vera. Supponiamo l'asserto vero per $n-1$ e dimostriamolo per n. Sia λ_1 un autovalore reale di f, la sua esistenza è garantita dal Teorema 2.5. Sia $\mathbf{u}_1$ un autovettore di f relativo a λ_1 di norma 1 e sia $\mathbf{V}_{n-1}$

il sottospazio di $\mathbf{V}_n$ ortogonale ad $\mathbf{u}_1$. Si consideri la restrizione $f_{|V_{n-1}}$ di f al sottospazio V_{n-1}. Se $\mathbf{x} \in \mathbf{V}_{n-1}$ allora

$$\langle f(\mathbf{x}), \mathbf{u}_1 \rangle = \langle \mathbf{x}, f(\mathbf{u}_1) \rangle = \langle \mathbf{x}, \lambda_1 \mathbf{u}_1 \rangle = 0$$

e quindi $f(\mathbf{x}) \in \mathbf{V}_{n-1}$. Pertanto $\mathbf{V}_{n-1}$ è f-invariante. Allora $f_{|V_{n-1}}$ è un endomorfismo di $\mathbf{V}_{n-1}$ ed è simmetrico poiché f è simmetrico. Per l'ipotesi induttiva esiste una base ortonormale $\{\mathbf{u}_1, ...\mathbf{u}_n\}$ di $\mathbf{V}_{n-1}$ per $f_{|\mathbf{V}_{n-1}}$ e quindi per f. Allora $\{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_2\}$ è la base ortonormale di $\mathbf{V}_n$ cercata. Rispetto a tale base l'endomorfismo simmetrico f è rappresentato dalla matrice:

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

$\square$

Se $\mathbf{x}$ ha componenti $(x_1, x_2, ..., x_3)$ rispetto alla base ortonormale $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$, si ha:

$$f(\mathbf{x}) = \lambda_1 x_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 x_2 \mathbf{u}_2 + ... + \lambda_n x_n \mathbf{u}_n$$

e quindi

$$Q_f(\mathbf{x}) = \langle f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle = \lambda_1 x_1^2 + ... + \lambda_n x_n^2. \tag{2.2}$$

La (2.2) è detta ***forma canonica della forma quadratica associata ad*** f.

Definizione 2.2. *L'endomorfismo simmetrico f di $\mathbf{V}_n$ si dice* ***semidefinito positivo*** *se tutti i suoi autovalori sono non negativi e quindi $Q_f(\mathbf{x}) \geq 0$, per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{V}_n$. In particolare, f si dice* ***definito positivo*** *se tutti gli autovalori di f sono strettamente positivi.*

Sia f un endomorfismo simmetrico semidefinito positivo e sia $B = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ una base ortonormale di autovettori per f. Sia g l'endomorfismo di $\mathbf{V}_n$ rappresentato dalla matrice

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

rispetto alla base B. Allora g è un endomorfismo simmetrico di $\mathbf{V}_n$ detto ***radice quadrata di*** f e indicato con $\sqrt{f}$.

Rispetto ad una qualsiasi base B l'endomorfismo $\sqrt{f}$ sarà rappresentato da una matrice $M_B(\sqrt{f})$, in generale non diagonale, tale che $M_B(\sqrt{f})^2 = M_B(f)$.

2.2.2 Endomorfismi simmetrici in dimensione 2 e 3

In questo paragrafo si analizzano le proprietà degli automorfismi simmetrici di $\mathbf{R}^n$, dove $n = 2, 3$.

Sia f un endomorfismo simmetrico di $\mathbf{R}^2$. f ha due autovalori reali λ_1, λ_2 che possono essere distinti o coincidenti.

1. $\underline{\lambda_1 \neq \lambda_2.}$

   Per il Teorema 2.6, $V(\lambda_1)$ e $V(\lambda_2)$ sono ortogonali. La base ortonormale di autovettori rispetto a cui f si rappresenta in forma diagonale è costituita da un versore di $V(\lambda_1)$ e da un versore di $V(\lambda_2)$.

2. $\underline{\lambda_1 = \lambda_2.}$

   In questo caso di ha che $f = \lambda_1 I$, l'autospazio di f è tutto $\mathbf{V}_2$ e una base ortonormale di autovettori di f è una qualsiasi base ortonormale.

Sia $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ una base ortonormale e sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

la matrice simmetrica associata ad f rispetto alla base B. Sia $\mathbf{x} = (x, y)$, allora la forma quadratica associata a f è:

$$Q_f(\mathbf{x}) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2,$$

o in forma canonica:

$$Q_f(\mathbf{x}) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2.$$

Sia f un endomorfismo simmetrico di $\mathbb{R}^3$. Allora f ha tre autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

1. $\underline{\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3.}$

   Per il Teorema 2.6 $V(\lambda_1)$, $V(\lambda_2)$, $V(\lambda_3)$ sono a due a due ortogonali. Una base ortonormale di autovettori di f è costituita da tre versori degli autospazi $V(\lambda_1), V(\lambda_2), V(\lambda_3)$.

2. $\underline{\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3.}$

   Si ha che $\dim V(\lambda_1) = 2$ e $\dim V(\lambda_3) = 1$, pertanto una base ortonormale di autovettori di f è costituita da due versori di $V(\lambda_1)$ e da un versore di $V(\lambda_3)$, che è necessariamente ortogonale a $V(\lambda_1)$ per il Teorema 2.6.

3. $\underline{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3}$

   In questo caso $f = \lambda_1 I$ e quindi ogni base ortonormale rappresenta una base ortonormale di autovettori di f.

Sia $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ una base ortonormale e sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

la matrice simmetrica associata ad f rispetto alla base B. Sia $\mathbf{x} = (x, y, z)$, allora la forma quadratica associata a f è:

$$Q_f(\mathbf{x}) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz,$$

o in forma canonica:

$$Q_f(\mathbf{x}) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2.$$

> "The most fantastic, magical things can happen, and it all starts with a wish."
> (Jiminy Cricket)

3

Isometrie

In questo capitolo viene analizzata un'importante classe di automorfismi di uno spazio vettoriale euclideo: le trasformazioni ortogonali o isometrie lineari. Vengono classificate tali trasformazioni nel piano e nello spazio. La parte finale del capitolo è dedicata ai movimenti, o isometrie, che sono trasformazioni (non necessariamente lineari) le quali conservano la distanza indotta dalla norma.

3.1 Trasformazioni ortogonali

In questo paragrafo analizzeremo le proprietà elementari delle trasformazioni ortogonali.

Definizione 3.1. *Sia $(\mathbf{V}, \langle , \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo. Un endomorfismo f di $\mathbf{V}$ si dice **trasformazione ortogonale** (o **isometria lineare**) se:*

$$\langle f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \qquad \textit{per ogni}\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}.$$

Esempio 3.1. *Sia $\mathbf{V}_n = \mathbf{U} \oplus \mathbf{U}^\perp$. L'endomorfismo*

$$f : \mathbf{U} \oplus \mathbf{U}^\perp \to \mathbf{U} \oplus \mathbf{U}^\perp, \; \mathbf{x} = \mathbf{x}_\mathbf{U} + \mathbf{x}_{\mathbf{U}^\perp} \mapsto f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_\mathbf{U} - \mathbf{x}_{\mathbf{U}^\perp},$$

è una trasformazione ortogonale, detta ***simmetria ortogonale*** *rispetto a* $\mathbf{U}$. *Infatti:*

$$\begin{aligned}\langle f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})\rangle &= \langle \mathbf{x_U} - \mathbf{x_{U^\perp}}, \mathbf{y_U} - \mathbf{y_{U^\perp}}\rangle \\ &= \langle \mathbf{x_U}, \mathbf{y_U}\rangle + \langle \mathbf{x_U}, \mathbf{y_{U^\perp}}\rangle - \langle \mathbf{x_{U^\perp}}, \mathbf{y_U}\rangle + \langle \mathbf{x_{U^\perp}}, \mathbf{y_{U^\perp}}\rangle \\ &= \langle \mathbf{x_U}, \mathbf{y_U}\rangle + \langle \mathbf{x_U}, \mathbf{y_{U^\perp}}\rangle + \langle \mathbf{x_{U^\perp}}, \mathbf{y_U}\rangle + \langle \mathbf{x_{U^\perp}}, \mathbf{y_{U^\perp}}\rangle \\ &= \langle \mathbf{x_U} + \mathbf{x_{U^\perp}}, \mathbf{y_U} + \mathbf{y_{U^\perp}}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle,\end{aligned}$$

poiché $\langle \mathbf{x_U}, \mathbf{y_{U^\perp}}\rangle = \langle \mathbf{x_{U^\perp}}, \mathbf{y_U}\rangle = 0$.

Lemma 3.1. *Sia f una trasformazione ortogonale di $\mathbf{V}$, allora f è iniettiva.*

Dimostrazione. Sia $\mathbf{x} \in \ker f$, allora $f(\mathbf{x}) = 0$. Pertanto

$$0 = \langle f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x})\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle,$$

da cui segue che $\mathbf{x} = 0$ e quindi f è iniettiva. □

Teorema 3.1. *Sia* $(\mathbf{V}_n, \langle , \rangle)$ *uno spazio vettoriale euclideo e sia* $f : \mathbf{V}_n \to \mathbf{V}_n$ *un endomorfismo, allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

i. f *è una trasformazione ortogonale;*

ii. $\|f(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$, *per ogni* $\mathbf{x} \in \mathbf{V}_n$*;*

iii. $f^* = f^{-1}$.

Dimostrazione. "$(i) \Rightarrow (ii)$" Siano f una trasformazione ortogonale su $\mathbf{V}_n$ e $\mathbf{x} \in \mathbf{V}_n$, allora

$$\|f(\mathbf{x})\| = \sqrt{\langle f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x})\rangle} = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle} = \|\mathbf{x}\|.$$

"$(ii) \Rightarrow (iii)$" f è iniettiva per il Lemma 3.1, e quindi invertibile, essendo $\mathbf{V}_n$ di dimensione finita. Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}_n$, allora vale che

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}, f^*(f(\mathbf{y}))\rangle &= \langle f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})\rangle \\
&= \frac{1}{2}\left(\|f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})\|^2 - \|f(\mathbf{x})\|^2 - \|f(\mathbf{y})\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\|f(\mathbf{x} + \mathbf{y})\|^2 - \|f(\mathbf{x})\|^2 - \|f(\mathbf{y})\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}|^2 - \|\mathbf{y}\|^2\right) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle.
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} - f^*(f(\mathbf{y}))\rangle = 0$$

per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}_n$. Allora $\mathbf{y} = f^*(f(\mathbf{y}))$ per ogni $\mathbf{y} \in \mathbf{V}_n$, cioè $f^* = f^{-1}$.

"$(iii) \Rightarrow (i)$" Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}_n$ e sia f tale che $f^* = f^{-1}$, allora

$$\langle f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})\rangle = \langle \mathbf{x}, f^*(f(\mathbf{y}))\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle.$$

□

Proposizione 3.1. *Sia* $(\mathbf{V}, \langle , \rangle)$ *uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita ed* f *una trasformazione ortogonale. Allora* f *conserva gli angoli.*

Dimostrazione. Sia f una trasformazione ortogonale, allora

$$\arccos\left(\frac{\langle f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})\rangle}{\|f(\mathbf{x})\|f(\mathbf{y})\|\|}\right) = \arccos\left(\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}\right).$$

$\square$

Il viceversa non è vero. Infatti, sia $f(\mathbf{x}) = \rho\mathbf{x}$, con $\rho \neq \pm 1$. Allora f è una trasformazione che conserva gli angoli:

$$\begin{aligned} \arccos\left(\frac{\langle f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})\rangle}{\|f(\mathbf{x})\|f(\mathbf{y})\|\|}\right) &= \arccos\left(\frac{\langle \rho\mathbf{x}, \rho\mathbf{y}\rangle}{\|\rho\mathbf{x}\|\|\rho\mathbf{y}\|}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{\rho^2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle}{\rho^2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}\right) = \arccos\left(\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}\right). \end{aligned}$$

D'altra parte, se f fosse una trasformazione ortogonale, allora dovrebbe valere che:

$$\|\mathbf{x}\| = \|f(\mathbf{x})\| = |\rho|\|\mathbf{x}\|,$$

e quindi $\rho = \pm 1$, ma ciò è assurdo.

Teorema 3.2. *Se* λ *è un autovalore reale della trasformazione ortogonale* f *di* $\mathbf{V}_n$*, allora* $\lambda = \pm 1$.

Dimostrazione. Sia f una trasformazione ortogonale e supponiamo che λ sia un autovalore reale di f ed $\mathbf{x}$ un autovettore ad esso relativo, allora $\|f(\mathbf{x})\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\|$, e quindi $|\lambda| = 1$ essendo $\|f(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$. Pertanto $\lambda = \pm 1$. $\square$

Esempio 3.2. *Il Teorema non asserisce che le trasformazioni ortogonali hanno sempre autovalori reali, infatti si consideri in* $\mathbb{R}^2$ *munito del prodotto scalare standard l'applicazione* f *tale che*

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

dove B è la base canonica. Allora f è una trasformazione ortogonale ma non ha autovalori reali poiché il polinomio $\boldsymbol{P}_f(\lambda) = \lambda^2 + 1$ non è decomponibile su $\mathbb{R}$.

Esempio 3.3. *Se $\mathbf{V}_n = \mathbf{U} \oplus \mathbf{U}^\perp$, la simmetria ortogonale*

$$f : \mathbf{U} \oplus \mathbf{U}^\perp \to \mathbf{U} \oplus \mathbf{U}^\perp,\ \mathbf{x} = \mathbf{x}_\mathbf{U} + \mathbf{x}_{\mathbf{U}^\perp} \mapsto f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_\mathbf{U} - \mathbf{x}_{\mathbf{U}^\perp},$$

è endomorfismi semplice. Infatti, se $\mathbf{U} = \mathbf{V}_n$ allora $\mathbf{U}^\perp = \{0\}$ e quindi $f = Id$; se $\mathbf{U} = \{0\}$ e $\mathbf{U}^\perp = \mathbf{V}_n$, allora $f = -Id$. Inoltre, se $\mathbf{U} \neq \mathbf{V}_n, \{0\}$, allora $\mathbf{V}_n = \mathbf{U} \oplus \mathbf{U}^\perp$. Sia $B_\mathbf{U}$ base ortonormale di $\mathbf{U}$ e $B_{\mathbf{U}^\perp}$ base di $\mathbf{U}^\perp$. Sia $B = B_\mathbf{U} \cup B_{\mathbf{U}^\perp}$ base ortonormale di $\mathbf{V}_n$, allora:

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}$$

con $k = \dim \mathbf{U}$.

Proposizione 3.2. *Siano B una base ortonormale di uno spazio vettoriale euclideo $(\mathbf{V_n}, \langle , \rangle)$ e f una trasformazione ortogonale $(\mathbf{V_n}$, allora $A = M_B(f)$ è una matrice ortogonale, cioè $A^t = A^{-1}$.*

Dimostrazione. La dimostrazione segue dal Corollario 2.1 e dal punto (iii) del Teorema 3.1. □

Teorema 3.3. *Sia $O(\mathbf{V}_n) = \{f \mid f \text{ è una trasformazione ortogonale di} \mathbf{V}_n\}$, allora $(O(\mathbf{V}_n), \circ)$ è un gruppo.*

Dimostrazione. Siano $f, g \in \mathbf{V}_n$, vale che:

$$\begin{aligned} \langle (f \circ g)(\mathbf{x}), (f \circ g)(\mathbf{y}) \rangle &= \langle f(g(\mathbf{x})), f(g(\mathbf{y})) \rangle \\ &= \langle g(\mathbf{x}), g(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle. \end{aligned}$$

Pertanto $f \circ g \in O(\mathbf{V}_n)$. Inoltre l'identità appartiene a $O(\mathbf{V}_n)$ e $O(\mathbf{V}_n)$ è banalmente associativo. Infine, sia $f \in O(\mathbf{V}_n)$, allora per il Teorema 3.1 f è invertibile e sia f^{-1} la sua inversa. Ora siano $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{V}_n$, tali che $\mathbf{y}_i = f(\mathbf{x}_i)$, per $i = 1, 2$, allora:

$$\begin{aligned} \langle f^{-1}(\mathbf{y}_1), f^{-1}(\mathbf{y}_2)\rangle &= \langle f^{-1}(f(\mathbf{x}_1)), f^{-1}(f(\mathbf{x}_2))\rangle \\ &= \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\rangle = \langle f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2)\rangle \\ &= \langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\rangle, \end{aligned}$$

e quindi $f^{-1} \in O(\mathbf{V}_n)$. Pertanto $O(\mathbf{V}_n)$ è un gruppo. □

Esempio 3.4. *Mostriamo, attraverso un esempio, che* $(O(\mathbf{V}_n), \circ)$ *non è in generale un gruppo abeliano.*
Siano $f, g \in O(\mathbb{R}^2)$ *rappresentati, rispetto alla base canonica* B *di* $\mathbb{R}^2$*, dalle seguenti matrici:*

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad M_B(g) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \ \theta \in [0, \pi],\ \theta \neq 0, \pi.$$

Allora:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Sia

$$O(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^t A = I\},$$

allora è facile vedere che:

- $O(n, \mathbb{R})$ ha la struttura di gruppo rispetto al prodotto righe per colonne di matrici;
- se $A \in O(n, \mathbb{R})$, allora $A^t A = I$ e per il Teorema di Binet vale che $\det A = \pm 1$.

Teorema 3.4. *Sia B una base ortonormale di $(\mathbf{V}_n, \langle , \rangle)$ e sia*

$$F : O(\mathbf{V}_n) \to O(n, \mathbb{R}),\ f \mapsto M_B(f).$$

F è un isomorfismo di gruppi.

Dimostrazione. F è ben posta per la Proposizione 3.2. Siano $f, g \in O(\mathbf{V}_n)$ e B una base ortonormale di $\mathbf{V}_n$, allora:

$$F(f \circ g) = M_B(f \circ g) = M_B(f)M_B(g) = F(f)F(g).$$

Pertanto F è un omomorfismo di gruppi.
Sia $f \in \ker F$, allora $F(f) = I_n$, quindi $f = Id_{\mathbf{V}_n}$. Pertanto F è iniettiva. Infine, sia $A \in O(n, \mathbb{R})$ tale che $A = M_B(f)$ dove B è una base ortonormale di $\mathbf{V}_n$, allora, dalla definizione di applicazione aggiunta, vale che:

$$\langle f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{x}, f^* f(\mathbf{y}) \rangle,$$

cioè

$$\langle A\mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, A^* A\mathbf{y} \rangle,$$

dove $A^* = M_B(f^*)$; per il Corollario 2.1 $A^* = A^t$ e quindi, poiché A è ortogonale

$$\langle f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}) \rangle = \langle A\mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle,$$

cioè f è una trasformazione ortogonale. Pertanto F è suriettiva. Quindi F è un isomorfismo di gruppi. $\square$

Teorema 3.5. *Una matrice reale simmetrica A si può diagonalizzare mediante una matrice ortogonale P, cioè data A esiste P ortogonale tale che*

$$D = P^{-1}AP = P^t AP$$

sia diagonale.

Dimostrazione. Sia A la matrice che rappresenta un endomorfismo simmetrico f di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica. Per il Teorema Spettrale f ammette una base ortonormale $B' = \{\mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_n\}$ di autovettori, la matrice P del cambiamento di base risulta essere una matrice ortogonale per la Proposizione 1.12, pertanto

$$M_B(f) = P^{-1}AP = P^t AP.$$

□

Vale anche il risultato inverso:

Teorema 3.6. *Se A è una matrice reale che si diagonalizza mediante una matrice ortogonale, A è simmetrica.*

Dimostrazione. Sia A una matrice diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale P, allora esiste una matrice diagonale D tale che $D = P^t AP$. Pertanto $A = PDP^t$ e quindi

$$A^t = (PDP^t)^t = P^t D^t (P^t)^t = P^t DP = A.$$

□

Teorema 3.7. *(Decomposizione Polare)*
Sia $f : \mathbf{V}_n \to \mathbf{V}_n$ un automorfismo di uno spazio vettoriale euclideo $\mathbf{V}_n$. Allora, sono univocamente determinati due endomorfismi simmetrici definiti positivi

$\varphi, \psi : \mathbf{V}_n \to \mathbf{V}_n$ ed una trasformazione ortogonale $r : \mathbf{V}_n \to \mathbf{V}_n$ tali che

$$f = r \circ \varphi \quad \textit{(decomposizione polare destra)},$$

$$f = \psi \circ r \quad \textit{(decomposizione polare sinistra)};$$

gli endomorfismi simmetrici sono definiti da:

$$\varphi = \sqrt{f^* \circ f}, \quad \psi = \sqrt{f \circ f^*}.$$

Dimostrazione. Si osservi che f^*f ed ff^* sono endomorfismi simmetrici definiti positivi di $\mathbf{V}_n$ in quanto $\langle (f^*f(\mathbf{x})), \mathbf{x} \rangle = \langle f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}) \rangle > 0$ se $\mathbf{x} \neq 0$, essendo f invertibile. Allora $\varphi = \sqrt{f^*f}$ è simmetrico, definito positivo, quindi invertibile. Inoltre φ^{-1} è simmetrico per la Proposizione 2.1 ed è, inoltre, definito positivo. Posto $r = f \circ \varphi^{-1}$, vale che:

$$\begin{aligned} r^* \circ r &= (f \circ \varphi^{-1})^* \circ (f \circ \varphi^{-1}) = (\varphi^{-1})^* \circ f^* \circ f \circ \varphi^{-1} \\ &= (\varphi^{-1})^* \circ \varphi^2 \circ \varphi^{-1} \\ &= \varphi^{-1} \circ \varphi^2 \circ \varphi^{-1} = Id_{\mathbf{V}_n}, \end{aligned}$$

quindi r è una trasformazione ortogonale. Pertanto $f = r \circ \varphi$ con r trasformazione ortogonale e φ endomorfismo simmetrico definito positivo.
Supponiamo che esistano r_1 trasformazione ortogonale e φ_1 endomorfismo simmetrico definito positivo tali che $f = r_1 \circ \varphi_1$. Allora

$$\varphi^2 = f^* \circ f = (r_1 \circ \varphi_1)^* \circ (r_1 \circ \varphi_1) = \varphi_1^* \circ r_1^* \circ r_1 \circ \varphi_1 = \varphi_1^2.$$

Pertanto si ha l'unicità della decomposizione polare destra.
Analogamente si dimostra l'esistenza e l'unicità della decomposizione polare sinistra. □

Corollario 3.1. *Sia $A \in GL(n, \mathbb{R})$, allora esistono due matrici reali simmetriche definite positive A_φ e A_ψ ed esiste una matrice R ortogonale, tali che*

$$A = RA_\varphi, \quad A = A_\psi R$$

Esempio 3.5. *Si consideri l'automorfismo f di $\mathbf{R}^2$ rappresentato, rispetto alla base canonica, dalla matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{6}{5} \\ \frac{6}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix}.$$

Siano U, W due matrici reali simmetriche definite positive ed R matrice ortogonale, tali che

$$A = RU = WR,$$

con $U = \sqrt{A^tA}$, e $W = \sqrt{AA^t}$.

Determiniamo la decomposizione polare destra, poiché $W = AR^{-1} = A^tR$.

Risulta che:

$$A^tA = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{6}{5} & \frac{17}{5} \end{pmatrix}.$$

La matrice AA^t ha autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 4$; una base ortonormale di autovettori è $B' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$, con $\mathbf{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1)$ e $\mathbf{e}'_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$.

L'endomorfismo $u = \sqrt{f^*f}$, individuato da U rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$, é rappresentato , rispetto alla base B', dalla matrice diagonale

$$U' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

avente come elementi della diagonale 1 e 2 cioè le radici quadrate di λ_1 e λ_2 rispettivamente. Pertanto risulta

$$U = PU'P^t = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{9}{5} \end{pmatrix}, \quad con\, P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

da cui si ha che

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix},$$

e quindi

$$R = AU^{-1} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{6}{5} \\ \frac{6}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{9}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix},$$

$$W = A^t R \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{6}{5} \\ \frac{6}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{9}{5} \end{pmatrix},$$

Osservazione 3.1. *Sia $\mathbf{V}_2$ spazio euclideo e $B = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ base ortonormale. Consideriamo l'automorfismo f di $\mathbf{V}_2$ individuato dal prodotto per un numero complesso. Da tale endomorfismo deriva l'origine del termine "polare", in quanto si identificano modulo e argomento di un numero complesso con le coordinate polari del piano.*
Sia $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ e $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, allora:

$$z\mathbf{x} = f(\mathbf{x}) = (x\rho\cos\theta - y\rho\cos\theta)\mathbf{i} + (x\rho\sin\theta + y\rho\cos\theta)\mathbf{j},$$

e quindi:

$$\begin{aligned} M(f) &= \begin{pmatrix} \rho\cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \rho\sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \end{aligned}$$

cioè $M(f) = RU = WR$ con

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

rappresenta una trasformazione ortogonale, in particolare la rotazione antioraria dell'angolo θ, mentre

$$U = W = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix},$$

individuano l'endomorfismo simmetrico.

Osservazione 3.2. *Sia $f = ru = wr$ un endomorfismo di $\mathbf{V}_3$ con u, w endomorfismi simmetrici, e r una trasformazione ortogonale. Siano $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ tre* *autovettori a due a due ortogonali dell'endomorfismo u relativi agli autovalori positivi* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$*. Essendo r una trasformazione ortogonale, si ha che*

$$\|f(\mathbf{e}_i)\| = |\lambda_i| \|\mathbf{e}_i\|,$$

cioè le rette individuate da $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ *sono trasformate da* f *in altre tre rette fra loro ortogonali ed ogni vettore di tali rette subisce mediante* f *una "dilatazione" data da* λ_i*.*

3.1.1 Matrici ortogonali di ordine 2

Teorema 3.8. *Ogni matrice ortogonale di ordine 2 è della forma*

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \ o \ S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

con $\theta =]-\pi, \pi]$.

Dimostrazione. Sia $A \in O(2, \mathbb{R})$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ trasformazione ortogonale tale che $A = M_B(f)$, dove $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ munito di un generico prodotto scalare $\langle , \rangle$. Allora

$$\begin{cases} f(\mathbf{e}_1) = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 \\ f(\mathbf{e}_2) = a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 \end{cases} .$$

Poiché $\|f(\mathbf{e}_1)\| = \|\mathbf{e}_1\| = 1$, si ha che $\langle a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2, a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2\rangle = 1$, e quindi $a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1$. Pertanto $a_{11} = \cos\theta$, $a_{21} = \sin\theta$ con $\theta \in]-\pi, \pi]$. D'altra parte $\langle f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2)\rangle = 0$, e quindi $\langle a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2, a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2\rangle = 0$. Pertanto $a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0$ e quindi $a_{12} = -k\sin\theta$, $a_{22} = k\cos\theta$, con $k \in \mathbb{R}$. Inoltre $\|f(\mathbf{e}_2)\| = \|\mathbf{e}_2\| = 1$, cioè $\langle a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2, a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2\rangle = 1$, , allora $a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1$, da cui segue che $k = \pm 1$.

Quindi, se $k = 1$, allora

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

se $k = -1$, allora

$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

□

Proposizione 3.3. *Ogni matrice* R_θ *rappresenta una rotazione di un angolo* θ.

Dimostrazione. Sia $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, allora $\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|[(\cos\delta)\mathbf{e}_1 + (\sin\delta)\mathbf{e}_2]$. Consideriamo il vettore colonna delle componenti di $\mathbf{x}$ rispetto alla base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ di $\mathbb{R}^2$:

$$X = \begin{pmatrix} \|\mathbf{x}\| \cos\delta \\ \|\mathbf{x}\| \sin\delta \end{pmatrix}$$

allora

$$\begin{aligned} R_\theta X &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \|\mathbf{x}\| \cos\delta \\ \|\mathbf{x}\| \sin\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{x}\|(\cos\theta\cos\delta - \sin\theta\sin\delta) \\ \|\mathbf{x}\|(\cos\theta\sin\delta + \sin\theta\cos\delta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \|\mathbf{x}\| \cos(\theta+\delta) \\ \|\mathbf{x}\| \sin(\theta+\delta) \end{pmatrix} = \|\mathbf{x}\| \begin{pmatrix} \cos(\theta+\delta) \\ \sin(\theta+\delta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Corollario 3.2. *R_0 e R_π sono le uniche rotazioni di $\mathbb{R}^2$ che ammettono autovalori reali.*

Dimostrazione. L'equazione caratteristica $\det(R_\theta - \lambda I_2) = 0$, cioè

$$(\cos\theta - \lambda)^2 + \sin^2\theta = 0,$$

ha soluzioni reali $\lambda = 1$ solo se $\theta = 0$ e $\lambda = -1$ solo se $\theta = \pi$. Quindi $R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $R_\pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sono le uniche rotazioni che ammettono autovalori reali. □

Proposizione 3.4. *Ogni matrice ortogonale S_θ rappresenta una simmetria ortogonale rispetto alla retta che forma un angolo convesso di $\frac{\theta}{2}$ rad con la retta individuata da $\mathbf{e}_1$ (asse x).*

Dimostrazione. S_θ è simmetrica e quindi ammette autovalori $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Poiché S_θ è ortogonale, si possono avere i seguenti casi:

(1) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e quindi $\theta = 0$ e $S_0 = Id_{\mathbb{R}^2}$;

(2) $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ e quindi $\theta = \pi$ e $S_\pi = -Id_{\mathbb{R}^2}$;

(3) $\lambda_1 = -1 \ \wedge \ \lambda_2 = 1$.

Nel terzo caso $\mathbb{R}^2 = V(1) \perp V(-1)$. Inoltre vale che

$$V(1) = L(\mathbf{v}_1),\ \ \mathbf{v}_1 = \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{e}_1 + \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{e}_2,\ \text{e}\ \|\mathbf{v}_1\| = 1.$$

Infatti

$$\begin{aligned} S_\theta \mathbf{v}_1 &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\frac{\theta}{2} + \sin\theta\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\theta\cos\frac{\theta}{2} - \cos\theta\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\left(\theta - \frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\theta - \frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \mathbf{v}_1. \end{aligned}$$

Infine $V(-1) = L(\mathbf{v}_2)$, con $\mathbf{v}_2 = \left(-\sin\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{e}_1 + \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{e}_2$. Infatti abbiamo che $\mathbf{v}_2 \perp \mathbf{v}_1$ e $\|\mathbf{v}_2\| = 1$. Ora sia $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, allora $\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2$. Quindi

$$S_\theta\mathbf{x} = S_\theta(x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2) = x_1 S_\theta\mathbf{v}_1 + x_2 S_\theta\mathbf{v}_2 = x_1\mathbf{v}_1 - x_2\mathbf{v}_2.$$

Pertanto S_θ è una simmetria ortogonale rispetto alla retta vettoriale individuata da $\mathbf{v}_1$ che forma un angolo convesso di $\frac{\theta}{2}$ rad con $L(\mathbf{e}_1)$. □

Il seguente Teorema sintetizza i risultati precedenti.

Teorema 3.9. *Sia $f \in O(\mathbb{R}^2)$, allora esiste una base ortonormale B tale che $M_B(f)$ è una delle seguenti matrici:*

(1) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, *con* $\theta \in]-\pi, \pi]$, $\theta \neq 0$;

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.1.2 Matrici ortogonali di ordine 3

Teorema 3.10. *Sia $f \in O(\mathbb{R}^3)$, allora esiste una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ tale che $M_B(f)$ è una delle seguenti:*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \ \textit{con}\ \theta \in]-\pi, \pi],\ \theta \neq 0,$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \ \textit{con}\ \theta \in]-\pi, \pi],\ \theta \neq 0,$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dimostrazione. Sia $A \in O(3, \mathbb{R})$ e sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una trasformazione ortogonale tale che $A = M_B(f)$ con $B = \{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^3$ base ortonormale di $\mathbb{R}^3$. Sappiamo che

$$\boldsymbol{P}_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = 0$$

è un'equazione di terzo grado a coefficienti reali e quindi ammette almeno una soluzione reale λ_1. Poiché A è ortogonale, $\lambda_1 = \pm 1$. Sia $\mathbf{e}_1$ autovettore di norma 1 di A relativo a λ_1 e sia $E_2 := L(\mathbf{e}_1)^\perp$. Sia $\mathbf{x} \in E_2$, allora

$$\langle f(\mathbf{x}), \mathbf{e}_1 \rangle \underset{f(\mathbf{e}_1)=\pm\mathbf{e}_1}{=} \pm \langle f(\mathbf{x}), f(\mathbf{e}_1) \rangle \underset{f \ T.O.}{=} \pm \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_1 \rangle = 0$$

cioè $f(\mathbf{x}) \in E_2$. Pertanto E_2 é f-invariante. Considerato quindi E_2 con il prodotto scalare indotto, vale che

$$f_{|E_2} : E_2 \longrightarrow E_2$$

é una trasformazione ortogonale di $E_2 \cong \mathbb{R}^2$. Pertanto esiste $B_0 = \{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ base ortonormale di E_2 tale che $M_{B_0}\left(f_{|E_2}\right)$ é una delle seguenti:

(1) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, con $\theta \in]-\pi, \pi]$, $\theta \neq 0$;

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Quindi rispetto alla base ortonormale $B_1 = \{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^3$, f si rappresenta con una delle seguenti matrici:

- se $\lambda_1 = 1$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ con } \theta \in]-\pi, \pi],\ \theta \neq 0$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

- se $\lambda_1 = -1$

$$A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ con } \theta \in]-\pi, \pi],\ \theta \neq 0,$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quindi A è simile ad una delle matrici A_i, $i = 1, \ldots, 6$, cioè esiste $P \in O(3, \mathbb{R})$ tale che

$$A_i = P^t A P$$

Osservazione 3.3.

i. $A_1 \equiv I$;

ii. A_2 rappresenta una rotazione rispetto alla retta individuata da $\mathbf{e}_1$;

iii. A_3, A_4 rappresentano simmetrie ortogonali (o riflessioni) rispetto al piano individuato da $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ nel caso di A_3 e da $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ nel caso di A_4;

iv. $A_5 = A_4 \cdot A_2$ rappresenta una rotosimmetria;

v. A_6 rappresenta una simmetria ortogonale rispetto alla retta individuata da $\mathbf{e}_2$.

Classifichiamo le trasformazioni ortogonali di $\mathbb{R}^3$ rispetto al sottospazio dei vettori fissati di $\mathbb{R}^3$ $U = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\}$.

I) $\dim U = 3$, allora $M_B(f) = A_1$;

II) $\dim U = 2$, allora $M_B(f) = A_3, A_4$;

III) $\dim U = 1$, allora $M_B(f) = A_2, A_6$;

IV) $\dim U = 0$, allora $M_B(f) = A_5$.

Poiché le matrici A_i, con $i = 1, .., 6$, sono matrici ortogonali, vale che $\det A_i = \pm 1$, allora $\det A_3 = detA_4 = \det A_5 = -1$ e $\det A_1 = \det A_2 = \det A_6 = 1$. Pertanto si ottiene il seguente teorema.

Teorema 3.11. ***(Eulero)*** *Ogni trasformazione ortogonale f di $\mathbb{R}^3$ con* det > 0 *ammette un asse di rotazione, cioè, esiste una retta r tale che $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ per ogni $\mathbf{x} \in r$ e $f_{|_{r^\perp}}$ è una rotazione.*

3.2 Movimenti

Sia $(\mathbf{V}, \langle , \rangle)$ spazio vettoriale euclideo e sia $f : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$. f si dice ***movimento*** (o ***isometria***) se e solo se, per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ si ha che

$$d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

dove $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. Si noti che f non è necessariamente un'applicazione lineare. Infatti:

Esempio 3.6. *Sia $T_{\mathbf{a}} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$, $\mathbf{x} \longmapsto \mathbf{x} + \mathbf{a}$ una traslazione, allora*

$$\begin{aligned} d(T_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}), T_{\mathbf{a}}(\mathbf{y})) &= \|T_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) - T_{\mathbf{a}}(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} + \mathbf{a} - (\mathbf{y} + \mathbf{a})\| \\ &= \|\mathbf{x} + \mathbf{a} - \mathbf{y} - \mathbf{a}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Pertanto le traslazioni $T_{\mathbf{a}}$ sono isometrie, non lineari per $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$.

Esempio 3.7. *Le trasformazioni ortogonali sono isometrie (lineari). Infatti, sia f trasformazione ortogonale, allora*

$$\begin{aligned} d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) &= \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| = \|f(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| \\ &= \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

Esempio 3.8. *Le composizioni di traslazioni e trasformazioni ortogonali sono movimenti. Infatti, sia $m(\mathbf{x}) = (T_{\mathbf{a}} \circ f)(\mathbf{x})$, dove $f \in O(\mathbf{V})$ e $T_{\mathbf{a}}$ traslazione. Allora*

$$\begin{aligned} d(m(\mathbf{x}), m(\mathbf{y})) &= d((T_{\mathbf{a}} \circ f)(\mathbf{x}), (T_{\mathbf{a}} \circ f)(\mathbf{y})) = d(f(\mathbf{x}) + \mathbf{a}, f(\mathbf{y}) + \mathbf{a}) \\ &= \|f(\mathbf{x}) + \mathbf{a} - f(\mathbf{y}) - \mathbf{a}\| = \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \\ &= \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

Teorema 3.12. *Sia $(\mathbf{V}_n, \langle , \rangle)$ spazio vettoriale euclideo e sia $m : \mathbf{V}_n \longrightarrow \mathbf{V}_n$ un movimento. Allora esiste $\mathbf{a} \in \mathbf{V}_n$ ed esiste $f \in O(\mathbf{V}_n)$ tale che*

$$m = T_{\mathbf{a}} \circ f.$$

Dimostrazione. Sia $m : \mathbf{V}_n \longrightarrow \mathbf{V}_n$ movimento e sia

$$f : \mathbf{V}_n \longrightarrow \mathbf{V}_n,\ \mathbf{x} \longmapsto f(\mathbf{x}) := m(\mathbf{x}) - m(\mathbf{o}).$$

Dobbiamo quindi provare che $f \in O(\mathbf{V}_n)$. Osserviamo che

$$f(\mathbf{o}) = m(\mathbf{o}) - m(\mathbf{o}) = \mathbf{o}.$$

f conserva la distanza d.

Infatti

$$\begin{aligned} d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) &= d(m(\mathbf{x}) - m(\mathbf{o}), m(\mathbf{y}) - m(\mathbf{o})) \\ &= \|m(\mathbf{x}) - m(\mathbf{o}) - m(\mathbf{y}) + m(\mathbf{o})\| \\ &= \|m(\mathbf{x}) - m(\mathbf{y})\| \\ &= d(m(\mathbf{x}), m(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

f conserva la norma.

$$\|f(\mathbf{x})\| = \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{o}\| = \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{o})\| = d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{o})) = d(\mathbf{x}, \mathbf{o}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{o}\| = \|\mathbf{x}\|.$$

f conserva il prodotto scalare.

Poiché

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \frac{1}{2} \left\{ \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 \right\},$$

segue che

$$\begin{aligned} \langle (f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}) \rangle &= \frac{1}{2} \{\|f(\mathbf{x})\|^2 + \|f(\mathbf{y})\|^2 - \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\|^2\} \\ &= \frac{1}{2} \{\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}))^2\} \\ &= \frac{1}{2} \{\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2\} \\ &= \frac{1}{2} \{\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2\} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle. \end{aligned}$$

f trasforma basi ortonormali in basi ortonormali.

Sia $B = \{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ una base ortonormale di $\mathbf{V}_n$ e sia $f(B) = \{f(\mathbf{e}_i)\}_{i=1}^n$. Allora

$$\langle f(\mathbf{e}_i), f(\mathbf{e}_j) \rangle = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij}$$

cioè $f(B)$ è un insieme ortonormale costituito da n vettori. Quindi, per la Proposizione 1.9, $f(B)$ è una base ortonormale di $\mathbf{V}_n$.
f è una trasformazione ortogonale.
Come conseguenza delle proprietà precedenti, basta dimostrare che f è lineare. Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}_n$ e sia $B_0 = \{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ una base ortonormale di $\mathbf{V}_n$. Allora

$$\begin{aligned}\langle f(\mathbf{e}_i), & f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\rangle = \\ & = \langle (f(\mathbf{e}_i), f(\mathbf{x}+\mathbf{y})\rangle - \langle f(\mathbf{e}_i), f(\mathbf{x})\rangle - \langle f(\mathbf{e}_i), f(\mathbf{y})\rangle \\ & = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{x}+\mathbf{y}\rangle - \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{x}\rangle - \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{y}\rangle = 0.\end{aligned}$$

Pertanto $f(\mathbf{x}+\mathbf{y})-f(\mathbf{x})-f(\mathbf{y})$ è ortogonale a tutti i vettori della base ortonormale $f(B_0)$. Quindi $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})$ è ortogonale a tutti i vettori di $\mathbf{V}_n$, cioè $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) = \mathbf{o}$, essendo $\langle , \rangle$ non degenere. Ora consideriamo $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{x} \in \mathbf{V}_n$. Allora

$$\begin{aligned}\langle f(\mathbf{e}_i), f(\lambda\mathbf{x}) - \lambda f(\mathbf{x})\rangle &= \langle f(\mathbf{e}_i), f(\lambda\mathbf{x})\rangle - \lambda\langle f(\mathbf{e}_i), f(\mathbf{x})\rangle \\ &= \langle \mathbf{e}_i, \lambda\mathbf{x}\rangle - \lambda\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{x}\rangle = 0\end{aligned}$$

Pertanto $f(\lambda\mathbf{x})-\lambda f(\mathbf{x})$ è ortogonale a tutti i vettori di $f(B_0)$, cioè $f(\lambda\mathbf{x})-\lambda f(\mathbf{x})$ è ortogonale a tutti i vettori di $\mathbf{V}_n$. Quindi $f(\lambda\mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$.
Possiamo concludere quindi che f è una trasformazione ortogonale. Pertanto $m(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + m(\mathbf{o})$, cioè $m = T_{m(\mathbf{o})} \circ f$, con $f \in O(\mathbf{V}_n)$. □

Teorema 3.13. *Sia* $\mathbf{I}(\mathbf{V}_n)$ *l'insieme dei movimenti di* $(\mathbf{V}_n, \langle , \rangle)$. *Allora*

$$\mathbf{I}(\mathbf{V}_n) \cong T \rtimes O(\mathbf{V}_n).$$

Dimostrazione. Dal Teorema di caratterizzazione segue che $\mathbf{I}(\mathbf{V}_n) = TO(\mathbf{V}_n)$ ed è quindi facile far vedere che $\mathbf{I}(\mathbf{V}_n)$ è un gruppo. Rimane da provare che $T \triangleleft \mathbf{I}(\mathbf{V}_n)$. Siano $\alpha \in O(\mathbf{V}_n)$, $T_{\mathbf{a}} \in T$, e poiché $A = M(\alpha)$ rispetto ad una fissata base ortonormale di $\mathbf{V}_n$, allora $A^{-1} = M(\alpha^{-1})$ e $A, A^{-1} \in O(n, \mathbb{R})$. Sia $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_n$, allora:

$$\begin{aligned}\left(\alpha \circ T_{\mathbf{a}} \circ \alpha^{-1}\right) &= \alpha\left(T_{\mathbf{a}}\left(\alpha^{-1}(\mathbf{v})\right)\right) = \alpha\left(T_{\mathbf{a}}(A^{-1}\mathbf{v})\right)\\ &= \alpha(A\mathbf{v}+\mathbf{a}) = A(A^{-1}\mathbf{v}+\mathbf{a}) = \mathbf{v}+A\mathbf{a}.\end{aligned}$$

Allora $\alpha^{-1} \circ T_{\mathbf{a}} \circ \alpha = T_{\alpha(\mathbf{a})}$ e pertanto $T \triangleleft O(\mathbf{V}_n)$. Quindi $\mathbf{I}(\mathbf{V}_n) \cong T \rtimes O(\mathbf{V}_n)$. $\square$

3.2.1 Movimenti nel piano

Sia $(\mathbb{R}^2, \langle,\rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo e sia $m : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un movimento. Allora, esiste $\mathbf{v}_0 = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ ed esiste $f \in O(\mathbb{R}^2)$ tale che

$$m(\mathbf{x}) = \left(T_{\mathbf{v}_0} \circ f\right)(\mathbf{x})$$

Inoltre esiste $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ tale che $M_B(f)$ è di una delle seguenti forme:

(1) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$, con $\theta \in]-\pi,\pi]$, $\theta \neq 0$;

(3) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

Quindi

$$m : \begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$$

Pertanto i movimenti di $\mathbb{R}^2$ sono dei seguenti tipi:

(1)

$$\begin{cases} x' = x + a\\ y' = y + b\end{cases}$$

Sono ***traslazioni*** e hanno punti fissi se e solo se $a = b = 0$, cioè quando $m = Id_{\mathbb{R}^2}$;

(2)
$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta + a \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta + b \end{cases}$$

I punti fissi sono i punti (x_0, y_0) sono determinati da

$$\begin{cases} x_0 = x_0\cos\theta - y_0\sin\theta + a \\ y_0 = x_0\sin\theta + y_0\cos\theta + b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_0(\cos\theta - 1) - y_0\sin\theta = -a \\ x_0\sin\theta + y_0(\cos\theta - 1) = -b \end{cases}. \tag{3.1}$$

Poiché $\theta \in]-\pi, \pi]$ e $\theta \neq 0$, allora

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} \cos\theta - 1 & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - 1 \end{pmatrix} &= (\cos\theta - 1)^2 + \sin^2\theta \\ &= \cos^2\theta + 1 - 2\cos\theta + \sin^2\theta \\ &= 2(1 - \cos\theta) \neq 0 \end{aligned}.$$

Quindi esiste un'unica soluzione (x_0, y_0) di (3.1). Pertanto

$$\begin{cases} a = x_0(1 - \cos\theta) + y_0\sin\theta \\ b = -x_0\sin\theta + y_0(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

Quindi

$$m : \begin{cases} x' = x_0 + (x - x_0)\cos\theta - (y - y_0)\sin\theta \\ y' = y_0 + (x - x_0)\sin\theta + (y - y_0)\cos\theta \end{cases}$$

Sia ora $\mathbf{w}_0 = (x_0, y_0)$, allora

$$m(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_0 + r(\mathbf{x} - \mathbf{w}_0)$$

dove r è la rotazione rappresentata da R_θ. Quindi m rappresenta la ***rotazione*** attorno al punto (x_0, y_0).

(3)

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = -y + b \end{cases}$$

Si osservi che la retta $l : y = \dfrac{b}{2}$ è lasciata invariante. Infatti

$$\left(x, \frac{b}{2}\right) \xrightarrow{m} \left(x + a, \frac{b}{2}\right)$$

Se $a = 0$, $l : y = \dfrac{b}{2}$ è fissata puntualmente ed m rappresenta una ***simmetria*** rispetto a l.

Se $a \neq 0$ allora sia $s : (x, y) \mapsto (x, -y + b)$ una ***simmetria*** rispetto alla retta $l : y = \dfrac{b}{2}$, e $T_{(a,0)}$ è una ***traslazione***, allora

$$(x, y) \xrightarrow{s} (x, -y + b) \xrightarrow{T_{(a,0)}} (x + a, -y + b).$$

Pertanto $m = T_{(a,0)} \circ s$.

È stato così provato il seguente teorema.

Teorema 3.14. *I movimenti di $\mathbb{R}^2$ sono:*

- *traslazioni;*
- *rotazioni rispetto ad un punto;*
- *simmetrie rispetto ad una retta l o composizioni di tale simmetria con una traslazione parallela alla retta l.*

3.2.2 Movimenti nello spazio

Sia $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo e sia $m : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un movimento. Allora, esiste $\mathbf{v}_0 = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ ed esiste $f \in O(\mathbb{R}^3)$ tale che

$$m = T_{\mathbf{v}_0} \circ f.$$

Inoltre, esiste $B = \{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^3$ base ortonormale tale che $A = M_B(f)$ è una delle seguenti:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ con } \theta \in]-\pi, \pi],\ \theta \neq 0,$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \text{con } \theta \in]-\pi, \pi],\ \theta \neq 0,$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$m : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A_i \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Consideriamo il caso $A = A_1$; allora

$$m : \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c \end{cases}$$

è una ***traslazione*** che non ammette punti fissi, eccetto che per $a = b = c = 0$, caso in cui $m = Id_{\mathbb{R}^3}$.

Sia $A = A_2$, allora si ha che

$$m : \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y\cos\theta - z\sin\theta + b \\ z' = y\sin\theta + z\cos\theta + c \end{cases} .$$

Per quanto visto in $\mathbb{R}^2$, esiste $(y_0, z_0) \in \mathbb{R}^2$ tale che

$$\begin{cases} y_0 = y_0\cos\theta - z_0\sin\theta + b \\ z_0 = y_0\sin\theta + z_0\cos\theta + c \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{cases} b = y_0(1 - \cos\theta) + z_0\sin\theta \\ c = -y_0\sin\theta + z_0(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

da cui

$$m : \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y_0 + (y - y_0)\cos\theta - (z - z_0)\sin\theta \\ z' = z_0 + (y - y_0)\sin\theta + (z - z_0)\cos\theta \end{cases} .$$

Se $a = 0$, allora m rappresenta una ***rotazione*** attorno alla retta

$$\begin{cases} y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}$$

parallela all'asse x. Se $a \neq 0$, sia

$$u = \begin{cases} x' = x \\ y' = y_0 + (y - y_0)\cos\theta - (z - z_0)\sin\theta \\ z' = z_0 + (y - y_0)\sin\theta + (z - z_0)\cos\theta \end{cases}$$

allora:

$$(x, y, z) \xrightarrow{u} (x, y', z') \xrightarrow{T_{(a,0,0)}} (x + a, y', z')$$

In tal caso $m = T_{(a,0,0)} \circ u$ si chiama ***rototraslazione***.

Nel caso in cui $A = A_3$ abbiamo

$$m : \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = -z + c \end{cases}$$

Quindi il piano $\pi : z = \dfrac{c}{2}$ è mutato in sé da m.

Se $(a, b) = (0, 0)$, allora π è fissato puntualmente e m rappresenta una ***simmetria*** rispetto a π. Se $(a, b) \neq (0, 0)$, allora

$$(x, y, z) \xrightarrow{s_\pi} (x, y, -z + c) \xrightarrow{T_{(a,b,0)}} (x + a, y + b, -z + c)$$

In tal caso $m = T_{(a,b,0)} \circ s_\pi$, con s simmetria rispetto a $\pi : z = \dfrac{c}{2}$ e $T_{(a,b,0)}$ traslazione parallela a π, è detta ***glissosimmetria***.

Se $A = A_4$, allora come nel caso precedente $m = T_{(0,b,c)} \circ s_\pi$ dove $\pi : x = \frac{a}{2}$ è il piano che viene mutato in sé da m.

Se $A = A_5$, allora

$$m : \begin{cases} x' = -x + a \\ y' = y\cos\theta - z\sin\theta + b \\ z' = y\sin\theta + z\cos\theta + c \end{cases}$$

Analogamente al caso $A = A_2$ abbiamo

$$m : \begin{cases} x' = -x + a \\ y' = y_0 + (y - y_0)\cos\theta - (z - z_0)\sin\theta \\ z' = z_0 + (y - y_0)\sin\theta + (z - z_0)\cos\theta \end{cases} \tag{3.2}$$

L'unico punto fisso è quindi $P_0 = \left(\frac{a}{2}, y_0, z_0\right)$. In questo caso m si chiama ***rotosimmetria*** e

$$(x, y, z) \xrightarrow{s} (-x + a, y, z) \xrightarrow{u} (x', y', z')$$

dove $(x'y'z')$ è come in (3.2), cioè $m = u \circ s$, con s simmetria rispetto al piano $\pi : x = \frac{a}{2}$ e u rotazione attorno alla retta $l \perp \pi$ passante per il punto P_0. Infine $A_6 = A_3 \cdot A_4$, quindi abbiamo

$$\begin{cases} x' = -x + a \\ y' = y + b \\ z' = -z + c \end{cases}.$$

Se $b = 0$, allora m fissa puntualmente i piani $\pi : x = \frac{a}{2}$ e $\pi' : z = \frac{c}{2}$, quindi è una ***simmetria*** rispetto a π e π'. Se $b \neq 0$ allora

$$(x, y, z) \xrightarrow{s_{\pi,\pi'}} (-x + a, y, -z + c) \xrightarrow{T_{(0,b,0)}} (-x + a, y + b, -z + c).$$

In tal caso $m = T_{(0,b,0)} \circ s_{\pi,\pi'}$ è una **glissosimmetria**.

È stato così provato il seguente teorema.

Teorema 3.15. *I movimenti di* $\mathbb{R}^3$ *sono:*

- *traslazioni;*
- *rotazioni;*
- *rototraslazioni;*
- *simmetrie;*
- *glissosimmetrie;*
- *rotosimmetrie.*

"The journey doesn't end here. Death is just another path, one we all must take. The grey rain curtain of this world rolls back and all turns to silver glass. And then you see it. White shores, and beyond, a far green country under a swift sunrise." (Gandalf)

4

Coniche

4.1 Piano proiettivo

Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale 3-dimensionale sul campo $\mathbb{K}$. Si consideri su $\mathbf{V} - \{\mathbf{0}\}$ la seguente relazione binaria:

$$\mathbf{v}_1 \sim \mathbf{v}_2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} - \{0\} \text{ tale che } \mathbf{v}_1 = \lambda \mathbf{v}_2.$$

La relazione $\sim$ è di equivalenza su $\mathbf{V} - \{\mathbf{0}\}$. L'insieme quoziente $PG(2, \mathbb{K}) := (\mathbf{V} - \{\mathbf{0}\})/\sim$ si dice ***piano proiettivo sul campo*** $\mathbb{K}$.
Il generico elemento di $PG(2, \mathbb{K})$, detto ***punto***, è una classe di equivalenza:

$$[\mathbf{v}]_\sim = \{\lambda \mathbf{v} \,:\, \lambda \in \mathbb{K} - \{0\}\}.$$

Quindi i punti di $PG(2, \mathbb{K})$ sono i sottospazi 1-dimensionali di $\mathbf{V}$ privati del vettore nullo.
Sia

$$\pi : \mathbf{V} - \{\mathbf{0}\} \to PG(2, K), \ \mathbf{v} \mapsto [\mathbf{v}]$$

la suriezione canonica. Le ***rette*** di $PG(2, \mathbb{K})$ sono le immagini, tramite π, dei piani vettoriali di $\mathbf{V}$ privati del vettore nullo.
Un punto $P = [\mathbf{v}]$ è incidente alla retta ℓ di $PG(2, \mathbb{K})$ se $\langle \mathbf{v} \rangle \subset \mathbf{W}$, dove $\mathbf{W}$ è il

sottospazio di $\mathbf{V}$ tale che $\pi(\mathbf{W} - \{\mathbf{0}\}) = \ell$.

In $PG(2, \mathbb{K})$ valgono le seguenti proprietà:

1. *Per due punti distinti esiste un'unica retta di $PG(2, \mathbb{K})$ ad essi incidente.*

   Siano $P_1 = [\mathbf{v}_1]$, $P_2 = [\mathbf{v}_2]$ due punti distinti di $PG(2, \mathbb{K})$; allora $\ell = \pi(L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) - \{\mathbf{0}\})$ è la retta di $PG(2, \mathbb{K})$ ad essi incidente.

2. *Due rette distinte di $PG(2, \mathbb{K})$ si intersecano in un punto.*

   Siano $\ell_1 = \pi(\mathbf{W}_1 - \{\mathbf{0}\})$, $\ell_2 = \pi(\mathbf{W}_2 - \{\mathbf{0}\})$ due rette distinte di $PG(2, \mathbb{K})$. Dalla Relazione di Grassmann segue che $\dim(\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2) = 1$; quindi $\ell_1 \cap \ell_2$ è un punto di $PG(2, \mathbb{K})$.

3. *$PG(2, \mathbb{K})$ contiene quadrangoli, cioè insiemi di quattro punti a tre a tre non allineati.*

   Sia $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ una base di $\mathbf{V}$ e siano $P_i = [\mathbf{e}_i]$ e $P = [\mathbf{e}]$, con $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$. È facile vedere che un generico sottoinsieme di tre elementi di $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}\}$ è linearmente indipendente, quindi $\{P_1, P_2, P_3, P\}$ è un quadrangolo di $PG(2, \mathbb{K})$.

Definizione 4.1. *Una quadrupla $\mathcal{RP} = (E_1, E_2, E_3, E)$ di punti di $PG(2, \mathbb{K})$ a tre a tre non allineati, si chiama* ***riferimento proiettivo****.*

Proposizione 4.1. *Sia $\mathcal{RP} = (E_1, E_2, E_3, E)$ un riferimento proiettivo di $PG(2, \mathbb{K})$. Allora esiste una base $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ di $\mathbf{V}$ tale che $E_i = [\mathbf{e}_i]$ per $i = 1, 2, 3$ e $E = [\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3]$.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{RP} = (E_1, E_2, E_3, E)$ un riferimento proiettivo. Per ogni $i = 1, 2, 3$ esiste $\mathbf{v}_i \in \mathbf{V}$, $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$, tale che $E_i = [\mathbf{v}_i]$. Poiché E_1, E_2, E_3 non sono allineati e quindi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti, l'insieme $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è una base di $\mathbf{V}$. Pertanto esisteranno $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{K}$ tali che

$\mathbf{v} = \mu_1\mathbf{v}_1 + \mu_2\mathbf{v}_2 + \mu_3\mathbf{v}_3$, dove $E = [\mathbf{v}]$. Inoltre $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \neq 0$ poiché i punti E_1, E_2, E_3, E sono tre a tre non allineati. Ora, posto $\mathbf{e}_i = \mu_i\mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, 3$, vale che $E_i = [\mathbf{e}_i]$ ed $E = [\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3]$. □

I punti E_1, E_2, E_3 vengono detti ***punti fondamentali*** ed il punto E ***punto unità***. Il riferimento proiettivo determinato dalla base canonica di $\mathbf{V}$ è detto ***riferimento proiettivo standard***.

Sia $\mathcal{RP} = (E_1, E_2, E_3, E)$ un riferimento proiettivo in $PG(2, \mathbb{K})$. Siano P un punto di $PG(2, \mathbb{K})$ e $\mathbf{x} \in \mathbf{V} - \{\mathbf{0}\}$ tale che $P = [\mathbf{x}]$. Allora sono univocamente determinati $X_1, X_2, X_3 \in \mathbb{K} - \{0\}$ tali che $\mathbf{x} = X_1\mathbf{e}_1 + X_2\mathbf{e}_2 + X_3\mathbf{e}_3$. La terna (X_1, X_2, X_3) rappresenta le ***coordinate proiettive omogenee*** del punto P. Se il riferimento proiettivo è quello standard, le coordinate proiettive del punto sono dette ***coordinate proiettive standard***.
Ora, sia $\mathbf{x}' \in \mathbf{V} - \{\mathbf{0}\}$ tale che $P = [\mathbf{x}']$. Analogamente esistono $X_1', X_2', X_3' \in \mathbb{K} - \{0\}$ tali che $\mathbf{x}' = X_1'\mathbf{e}_1 + X_2'\mathbf{e}_2 + X_3'\mathbf{e}_3$. D'altra parte, poiché $[\mathbf{x}'] = P = [\mathbf{x}]$, esiste $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$ tale che $\mathbf{x}' = \lambda\mathbf{x}$. Pertanto, dall'unicità della decomposizione dei vettori rispetto una fissata base B, segue che $X_i' = \lambda X_i$ per ogni $i = 1, 2, 3$. *Quindi le coordinate proiettive del generico punto sono determinate a meno di un fattore di proporzionalità non nullo.*

Una retta ℓ di $PG(2, \mathbb{K})$ è l'immagine di un piano vettoriale (privato del vettore nullo) di $\mathbf{V}$ tramite la suriezione canonica π, fissato un riferimento proiettivo $\mathcal{RP} = (E_1, E_2, E_3, E)$. La retta ℓ ha equazione:

$$aX_1 + bX_2 + cX_3 = 0.$$

La terna $[a, b, c]$ rappresenta le ***coordinate proiettive omogenee*** della retta ℓ. *Le coordinate proiettive omogenee delle rette sono definite a meno di un fattore di proporzionalità non nullo.* Se $\mathcal{RP}$ è il riferimento proiettivo standard, le coordinate proiettive omogenee di ℓ sono dette ***coordinate proiettive standard.***

Un punto $P = (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)$ è incidente alla retta $\ell : aX_1 + bX_2 + cX_3 = 0$ se e solo se

$$a\bar{X}_1 + b\bar{X}_2 + c\bar{X}_3 = 0.$$

La retta passante per due punti distinti $P_1 = (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)$ e $P_2 = (\bar{\bar{X}}_1, \bar{\bar{X}}_2, \bar{\bar{X}}_3)$ è la retta $\ell : aX_1 + bX_2 + cX_3 = 0$ tale che:

$$\begin{cases} a\bar{X}_1 + b\bar{X}_2 + c\bar{X}_3 = 0 \\ a\bar{\bar{X}}_1 + b\bar{\bar{X}}_2 + c\bar{\bar{X}}_3 = 0 \end{cases}.$$

Allora esiste $\mu \in \mathbb{K}$, $\mu \neq 0$, tale che:

$$\begin{cases} a = \mu \det \begin{pmatrix} \bar{X}_2 & \bar{X}_3 \\ \bar{\bar{X}}_2 & \bar{\bar{X}}_3 \end{pmatrix} \\ b = -\mu \det \begin{pmatrix} \bar{X}_1 & \bar{X}_3 \\ \bar{\bar{X}}_1 & \bar{\bar{X}}_3 \end{pmatrix} \\ c = \mu \det \begin{pmatrix} \bar{X}_1 & \bar{X}_2 \\ \bar{\bar{X}}_1 & \bar{\bar{X}}_2 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Quindi

$$[a, b, c] = \left[\det \begin{pmatrix} \bar{X}_2 & \bar{X}_3 \\ \bar{\bar{X}}_2 & \bar{\bar{X}}_3 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} \bar{X}_1 & \bar{X}_3 \\ \bar{\bar{X}}_1 & \bar{\bar{X}}_3 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} \bar{X}_1 & \bar{X}_2 \\ \bar{\bar{X}}_1 & \bar{\bar{X}}_2 \end{pmatrix} \right]. \tag{4.1}$$

Infine, se $\ell_1 : aX_1 + bX_2 + cX_3 = 0$ e $\ell_2 : a'X_1 + b'X_2 + c'X_3 = 0$ sono due generiche rette di $PG(2, \mathbb{K})$, allora:

$$\ell_1 \cap \ell_2 : \begin{cases} aX_1 + bX_2 + cX_3 = 0 \\ a'X_1 + b'X_2 + c'X_3 = 0 \end{cases}. \tag{4.2}$$

Ragionando in modo analogo alla determinazione di (4.1) segue che $\ell_1 \cap \ell_2$ ha coordinate proiettive omogenee

$$\left(\det\begin{pmatrix} b & c \\ b' & c' \end{pmatrix}, -\det\begin{pmatrix} a & c \\ a' & c' \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}\right).$$

La seguente proposizione evidenzia il cambiamento di coordinate proiettive omogenee nel passaggio a differenti riferimenti proiettivi.

Proposizione 4.2. *Siano $\mathcal{RP} = (E_1, E_2, E_3, E)$ e $\mathcal{RP}' = (E_1', E_2', E_3', E')$ due riferimenti proiettivi in $PG(2, \mathbb{K})$, allora esiste $M = (m_{ij}) \in GL(3, \mathbb{K})$ ed esiste $\rho \in \mathbb{K}$, $\rho \neq 0$, tale che se P ha coordinate proiettive omogenee (X_1, X_2, X_3) e (X_1', X_2', X_3') rispettivamente nei due riferimenti proiettivi, allora*

$$\begin{cases} \rho X_1' = m_{11}X_1 + m_{12}X_2 + m_{13}X_3 \\ \rho X_2' = m_{21}X_1 + m_{22}X_2 + m_{23}X_3 \\ \rho X_3' = m_{31}X_1 + m_{32}X_2 + m_{33}X_3. \end{cases} \tag{4.3}$$

Dimostrazione. Siano $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, $B' = \{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$ tali che $E_i = [\mathbf{e}_i]$, $E = [\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3]$ e $E_i' = [\mathbf{e}_i']$, $E' = [\mathbf{e}_1' + \mathbf{e}_2' + \mathbf{e}_3']$ per $i = 1, 2, 3$. Allora esiste $M_{B',B} \in GL(3, \mathbb{K})$ matrice di passaggio dalla base B' alla base B, quindi $X' = M_{B',B}X$ dove X e X' sono i vettori colonna aventi per componenti le coordinate proiettive omogenee di P nei riferimenti proiettivi $\mathcal{RP}$ e $\mathcal{RP}'$ rispettivamente.

Siano $B_1 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ e $B_1' = \{\mathbf{w}_1', \mathbf{w}_2', \mathbf{w}_3'\}$ ulteriori basi che individuano $\mathcal{RP}$ e $\mathcal{RP}'$ rispettivamente, allora $E_i = [\mathbf{w}_i]$, $E = [\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3]$ e $E_i' = [\mathbf{w}_i']$, $E' = [\mathbf{w}_1' + \mathbf{w}_2' + \mathbf{w}_3']$ per $i = 1, 2, 3$. Quindi $\mathbf{w}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$, e $\mathbf{w} = \lambda \mathbf{e}$, con $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3$ ed $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$. Allora

$$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3 = \lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \lambda_3\mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3 = \lambda(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3),$$

allora $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. Quindi B e B_1 hanno vettori proporzionali con lo stesso fattore di proporzionalità non nullo λ, analogamente B' e B'_1 hanno vettori proporzionali con lo stesso fattore di proporzionalità non nullo λ'. Pertanto segue la tesi. $\square$

Esempio 4.1. *Consideriamo in* $PG(2,\mathbb{R})$ *i riferimenti proiettivi* $\mathcal{RP} = (E_1, E_2, E_3, E)$ *e* $\mathcal{RP}' = (V_1, V_2, V_3, V)$ *individuati rispettivamente dalla base canonica* $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ *e dalla base* $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, *con* $\mathbf{v}_1 = (1,1,0)$, $\mathbf{v}_2 = (1,0,1)$ *e* $\mathbf{v}_3 = (0,1,1)$. *Pertanto*

$$M_{B',B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Sia P *il generico punto di coordinate proiettive omogenee* (X_1, X_2, X_3) *rispetto al riferimento proiettivo* $\mathcal{RP}$. *Allora*

$$\begin{cases} X'_1 = \frac{1}{2}\rho\,(X_1 + X_2 + X_3) \\ X'_2 = \frac{1}{2}\rho\,(X_1 - X_2 + X_3) \\ X'_3 = \frac{1}{2}\rho\,(-X_1 + X_2 + X_3) \end{cases},$$

con $\rho \in \mathbb{K}$, $\rho \neq 0$. *Se* $P_0 = (1,2,1)$ *rispetto a* $\mathcal{RP}$, *allora le coordinate del punto* P_0 *rispetto al riferimento* $\mathcal{RP}'$ *sono* $(2,0,1)$.

4.1.1 Il piano proiettivo complesso

Sia $PG(2,\mathbb{C})$ il piano proiettivo sul campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi. Un punto complesso $P = (X_1, X_2, X_3)$ si dice ***reale*** se si può scrivere in coordinate proiettive omogenee reali, cioè se esiste $\rho \neq 0$ tale che $(\rho X_1, \rho X_2, \rho X_3) \in \mathbb{R}^3$. Ad esempio, $P = (i, 3i, -i)$ è reale, infatti $(i, 3i, -i) \sim (1, 3, -1)$.
Se $P = (X_1, X_2, X_3)$, il punto $\overline{P} = (\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3)$, dove $\overline{X}_i$, $i = 1,2,3$, è il complesso coniugato di X_i, si dice ***punto coniugato*** di P. Analogamente, una retta

r di $PG(2,\mathbb{C})$ di coordinate proiettive $[a,b,c]$, con $a,b,c\in\mathbb{C}$, si dice reale se si può scrivere in coordinate omogenee reali. La retta $\overline{r}$ di coordinate proiettive omogenee $[\overline{a},\overline{b},\overline{c}]$ è la ***retta coniugata*** di r. Naturalmente, r è reale se e solo se $r=\overline{r}$. Valgono, inoltre, le seguenti proprietà:

1. Se $P=(X_1,X_2,X_3)\in r$, allora $\overline{P}=(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\overline{x}_3)\in\overline{r}$. In particolare se r è reale, allora $\overline{P}\in r$.

2. Due rette complesse coniugate e distinte hanno sempre un'unico punto reale in comune. Infatti, se $P\in r\cap\overline{r}$, allora $\overline{P}\in\overline{r}\cap r$. Quindi, $P=\overline{P}$, cioè P è reale poiché r e $\overline{r}$ sono distinte.

3. La retta che congiunge due punti complessi coniugati è reale. Infatti se $P,\overline{P}\in\overline{r}$, allora $\overline{P},P\in\overline{r}$ per cui $r=\overline{r}$, cioè r è reale.

Si noti che una retta reale possiede infiniti punti immaginari, mentre una retta complessa possiede un'unico punto relae dato da $r\cap\overline{r}$. Ad esempio:

- $[1,-1,1]$ è una retta reale con infiniti punti reali e infiniti punti complessi. Infatti, $P_x=(x,x+1,1)$ è reale o complesso a seconda che x appartenga a $\mathbb{R}$ o a $\mathbb{C}-\mathbb{R}$, rispettivamente;

- la retta $[1+2i,1,1]$ possiede infiniti punti complessi, aventi coordinate $(x,x(1+2i)+1,1)$, ed $R=(0,-1,3)$ come unico punto reale.

4.2 Trasformazioni proiettive

Definizione 4.2. *Sia $f:PG(2,\mathbb{K})\to PG(2,\mathbb{K})$ un'applicazione bigettiva. Allora f si dice **proiettività** (o **trasformazione proiettiva**) se esiste $\varphi\in GL(\mathbf{V})$ tale che $f([\mathbf{v}])=[\varphi(\mathbf{v})]$ per ogni punto $P=[\mathbf{v}]$ di $PG(2,\mathbb{K})$.*

In seguito denoteremo con f_φ la proiettività indotta da φ.

Osservazione 4.1. *Segue immediatamente dalla definizione di punto e retta di piano proiettivo che una trasformazione proiettiva trasforma punti in punti, rette in rette e preserva l'incidenza.*

Lemma 4.1. *Valgono le seguenti proprietà:*

1. $f_{1_{\mathbf{V}}} = 1_{PG(2,\mathbb{K})}$;
2. *se* f_{φ_1} *e* f_{φ_2} *sono le proiettività indotte da* φ_1 *e* φ_2 *rispettivamente, allora* $f_{\varphi_1} \circ f_{\varphi_2} = f_{\varphi_1 \circ \varphi_2}$;
3. $f_{\varphi^{-1}} = (f_\varphi)^{-1}$.

Dimostrazione. L'asserto (1) è banalmente vero. Ora, sia $P = [\mathbf{v}]$ il generico punto di $PG(2, \mathbb{K})$, allora

$$\begin{aligned} f_{\varphi_1 \circ \varphi_2}([\mathbf{v}]) &= [\varphi_1(\varphi_2(\mathbf{v}))] = f_{\varphi_1}[\varphi_2(\mathbf{v})] \\ &= f_{\varphi_1}(f_{\varphi_2}[\mathbf{v}]) = (f_{\varphi_1} \circ f_{\varphi_2})([\mathbf{v}]). \end{aligned}$$

Pertanto segue l'asserto (2). Da (2) e (1) segue che $f_{\varphi^{-1}} \circ f_\varphi = f_{\varphi^{-1} \circ \varphi} = 1_{PG(2,\mathbb{K})}$. Inoltre vale che $f_\varphi \circ f_{\varphi^{-1}} = 1_{PG(2,\mathbb{K})}$ e quindi $(f_\varphi)^{-1} = f_{\varphi^{-1}}$ che è l'asserto (3). □

Sia

$$PGL(\mathbf{V}) = \{f_\varphi : \varphi \in GL(\mathbf{V})\}.$$

Teorema 4.1. $PGL(\mathbf{V})$ *è un gruppo rispetto alla composizione di applicazioni.*

Dimostrazione. L'asserto vale banalmente per il Lemma 4.1 tenendo presente che la composizione di applicazioni, quando essa ha senso, come nel nostro caso, è associativa. □

$PGL(\mathbf{V})$ è detto ***gruppo proiettivo generale lineare 3-dimensionale***[1].

Teorema 4.2. *L'applicazione* $F : GL(\mathbf{V}) \to PGL(\mathbf{V})$, $\varphi \mapsto f_\varphi$ *è un omomorfismo suriettivo di gruppi.*

[1]Si ricordi che $dim\mathbf{V} = 3$.

Dimostrazione. Segue dalla definizione di $PGL(\mathbf{V})$ che F è un'applicazione suriettiva. Siano φ_1, $\varphi_2 \in GL(\mathbf{V})$, allora

$$F(\varphi_1 \circ \varphi_2) = f_{\varphi_1 \circ \varphi_2} = f_{\varphi_1} \circ f_{\varphi_2} = F(\varphi_1) \circ F(\varphi_2),$$

dove la seconda uguaglianza segue dal Lemma 4.1(2). Quindi, F è un omomorfismo suriettivo di gruppi. □

Per il Teorema di Omomorfismo di Gruppi vale che

$$PGL(\mathbf{V}) \cong GL(\mathbf{V})/kerF.$$

Determiniamo $kerF$. Sia $\varphi \in GL(\mathbf{V})$ tale che $f_\varphi = 1_{PG(2,\mathbb{K})}$. Per ogni punto $P = [\mathbf{v}]$ risulta

$$[\mathbf{v}] = f_\varphi([\mathbf{v}]) = [\varphi(\mathbf{v})].$$

Pertanto, per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ esiste $\lambda_P \in \mathbb{K}$, $\lambda_P \neq 0$ tale che $\varphi(\mathbf{v}) = \lambda_P(\mathbf{v})$. In particolare, vale che $\varphi(\mathbf{e}_i) = \lambda_i \mathbf{e}_i$ per ogni $i = 1, 2, 3$ dove $\lambda_1 = \lambda_{E_1}$, $\lambda_2 = \lambda_{E_2}$ e $\lambda_3 = \lambda_{E_3}$. Inoltre

$$\varphi(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j) = \lambda_{ij}(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j) \quad \textit{per ogni}\, i, j = 1, .., 3, i \neq j,$$

allora

$$\varphi(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j) = \varphi(\mathbf{e}_i) + \varphi(\mathbf{e}_j) = \lambda_i \mathbf{e}_i + \lambda_j \mathbf{e}_j \quad \textit{per ogni}\, i, j = 1, .., 3, i \neq j,$$

quindi $\lambda_{ij}(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j) = \lambda_i \mathbf{e}_i + \lambda_j \mathbf{e}_j$, cioè

$$(\lambda_{ij} - \lambda_i)\mathbf{e}_i + (\lambda_{ij} - \lambda_j)\mathbf{e}_j = 0.$$

Poiché $\mathbf{e}_i$ ed $\mathbf{e}_j$ sono linearmente indipendenti, vale che $\lambda_i = \lambda_{ij} = \lambda_j$ per ogni $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$, di conseguenza λ non dipende in realtà dalla scelta del punto P. Quindi, $\varphi(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Pertanto, vale che

$$kerF = \{\varphi \in GL(\mathbf{V}) \,|\, \exists \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0 : \varphi = \lambda 1_{\mathbf{V}}\}.$$

Poiché $PGL(\mathbf{V}) \cong GL(\mathbf{V})/kerF$ si ha che, data $f \in PGL(\mathbf{V})$ indotta da $\varphi \in GL(\mathbf{V})$, allora f è indotta anche da $\lambda\varphi$. *Quindi ogni proiettività di $PG(2,\mathbb{K})$ è indotta da un elemento di $GL(\mathbf{V})$ a meno di uno scalare non nullo.*

Sia f una proiettività di $PG(2,\mathbb{K})$ indotta da $\varphi \in GL(\mathbf{V})$. Ora, siano $\mathcal{RP} = (E_1, E_2, E_3, E)$ un riferimento proiettivo e $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base di $\mathbf{V}$ che lo individua. Sia A la matrice associata a φ rispetto alla base B. Sia P un punto di $PG(2,\mathbb{K})$ di coordinate proiettive omogenee (X_1, X_2, X_3) nel suddetto riferimento proiettivo. Allora

$$f(P) = f([X_1, X_2, X_3]) = [\varphi(X_1, X_2, X_3)] = [Y_1, Y_2, Y_3],$$

dove

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}.$$

D'altra parte, $\lambda\varphi$ induce f e la matrice associata a $\lambda\varphi$ rispetto alla base B è la matrice λA. *Pertanto, fissato un riferimento proiettivo, una proiettività f è univocamente determinata da un'unica matrice invertibile definita a meno di uno scalare non nullo.* Poiché $GL(\mathbf{V}) \cong GL(3,\mathbb{K})$, posto $PGL(3,\mathbb{K}) := GL(3,\mathbb{K})/Z$, dove $Z = \{\lambda I_3 : \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0\}$, fissato un riferimento proiettivo, vale che

$$PGL(\mathbf{V}) \cong PGL(3,\mathbb{K}).$$

Sia $f \in PGL(3,\mathbb{K})$ definita dalla matrice $A \in GL(3,\mathbb{K})$ in un fissato riferimento proiettivo e sia $P = (X_1, X_2, X_3)$ un punto di $PG(2,\mathbb{K})$, allora:

$$\begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \\ X_3' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2. \\ X_3 \end{pmatrix} \quad \text{dove} \quad f(P) = (X_1', X_2', X_3'). \tag{4.4}$$

Ora determiniamo l'azione di $PGL(\mathbf{V})$ sulle rette di $PG(2,\mathbb{K})$.

Siano $\ell : aX_1 + bX_2 + cX_3 = 0$ una retta di $PG(2,\mathbb{K})$ e $P = (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)$, $Q = (\bar{\bar{X}}_1, \bar{\bar{X}}_2, \bar{\bar{X}}_3)$ due punti ad essa incidenti. Allora vale

$$\begin{cases} a\bar{X}_1 + b\bar{X}_2 + c\bar{X}_3 = 0 \\ a\bar{\bar{X}}_1 + b\bar{\bar{X}}_2 + c\bar{X}_3 = 0. \end{cases}$$

Ora, sia $\ell' : a'X_1 + b'X_2 + c'X_3 = 0$ l'immagine della retta ℓ tramite la proiettività f. Allora $f(P) \in \ell'$ e $f(Q) \in l'$. Osserviamo che

$$f(P) = A \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix},$$

$$f(Q) = A \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$0 = [a \quad b \quad c] \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = [a \quad b \quad c]A^{-1}A \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = [a \quad b \quad c]A^{-1}f(P).$$

Analogamente $[a \quad b \quad c]A^{-1}f(Q) = 0$. Pertanto la retta $\ell'' = [a \quad b \quad c]A^{-1}$ è incidente a $f(P)$ e a $f(Q)$, quindi $\ell'' = \ell'$. Cioè se $\ell = [a, b, c]$ allora

$$f(\ell) = [a \quad b \quad c]A^{-1}.$$

Proposizione 4.3. *Siano $\mathcal{RP} = (E_1, E_2, E_3, E)$ e $\mathcal{RP}' = (E'_1, E'_2, E'_3, E')$, allora esiste un'unica proiettività $f \in PGL(\mathbf{V})$ tale che $f(E_i) = E'_i$ per $i = 1, 2, 3$, $f(E) = E'$.*

Dimostrazione. Siano $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ e $B' = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ due basi che individuano i riferimenti proiettivi $\mathcal{RP}$ e $\mathcal{RP}'$ rispettivamente, cioè $E_i = [\mathbf{e}_i]$, $E = [\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3]$, $E'_i = [\mathbf{e}_i]$ e $E' = [\mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_2 + \mathbf{e}'_3]$. Allora esiste un'unica $\varphi \in GL(\mathbf{V})$ tale che $\varphi(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}'_i$, con $i = 1, 2, 3$. Sia $f \in PGL(\mathbf{V})$ indotta da φ. Allora

$$f(E_i) = f([\mathbf{e}_i]) = [\varphi(\mathbf{e}_i)] = [\mathbf{e}'_i] = E'_i.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} F(E) &= f([\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3]) = [\varphi(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)] = [\varphi(\mathbf{e}_1) + \varphi(\mathbf{e}_2) + \varphi(\mathbf{e}_3)] \\ &= [\mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_2 + \mathbf{e}'_3] = E'. \end{aligned}$$

Ora sia $g \in PGL(\mathbf{V})$ tale che $g(E_i) = E'_i$ per $i = 1, 2, 3$ e $g(E) = E'$. Allora esiste $\psi \in GL(\mathbf{V})$ che induce g. Quindi per ogni $i = 1, 2, 3$ risulta

$$\psi(\mathbf{e}_i) = \mu_i \varphi(\mathbf{e}_i),$$

$$\psi(\mathbf{e}) = \mu \varphi(\mathbf{e}).$$

Allora $\mu_1 \varphi(\mathbf{e})_1 + \mu_2 \varphi(\mathbf{e}_2) + \mu_3 \varphi(\mathbf{e}_3) = \mu \varphi(\mathbf{e}_1) + \mu \varphi(\mathbf{e}_2) + \mu \varphi(\mathbf{e}_3)$, per $\mu = \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$. Cioè $\psi = \mu \varphi$ e quindi $g = f$. □

Definizione 4.3. *Due sottoinsiemi F, F' di $PG(2, \mathbb{K})$ si dicono* ***proiettivamente equivalenti*** *se esiste una proiettività f tale che $f(F) = F'$. Le proprietà che sono comuni a tutti i sottoinsiemi proiettivamente equivalenti si dicono* ***proprietà proiettive****.*

Esempio 4.2. *Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $PG(2, \mathbb{K})$:*

$$\mathscr{C}_1 = \{(X_1, X_2, X_3) : X_1 X_2 - X_3^2 = 0\},$$

$$\mathscr{C}_2 = \{(X_1, X_2, X_3) : X_1 X_3 - X_2^2 = 0\}.$$

Essi sono proiettivamente equivalenti essendo $\mathscr{C}_2$ trasformato di $\mathscr{C}_1$ mediante la proiettività $f : (X_1, X_2, X_3) \mapsto (X_1, X_3, X_2)$.

4.3 Piano affine e affinità

In $PG(2,\mathbb{K})$ si consideri un sistema di coordinate proiettive omogenee individuato da un fissato riferimento proiettivo $\mathcal{RP}$. Rispetto a tale sistema di coordinate la retta $r_\infty : X_3 = 0$ è detta ***retta impropria***. Un punto $P \in PG(2,\mathbb{K})$ è detto ***punto improprio*** se e solo se $P \in r_\infty$, cioè se P ha coordinate proiettive omogenee $(X_1, X_2, 0)$.

L'insieme $AG(2,\mathbb{K}) := PG(2,\mathbb{K}) - r_\infty$ è detto ***piano affine***. Sia $Q \in AG(2,\mathbb{K})$, allora $Q = (X_1, X_2, X_3)$ con $X_3 \neq 0$ e quindi $Q = (x, y, 1)$ dove $x = \frac{X_1}{X_3}$, $y = \frac{X_2}{X_3}$. La coppia (x, y) individua in modo univoco Q e rappresenta la coppia delle ***coordinate affini*** di Q.

Sia f una proiettività di $PG(2,\mathbb{K})$ tale che $f(r_\infty) = r_\infty$. Allora f è detta ***trasformazione affine*** o ***affinità***. Sia

$$AGL(2,\mathbb{K}) := \{f \in PGL(3,\mathbb{K}) : f(r_\infty) = r_\infty\},$$

è facile vedere che $AGL(2,\mathbb{K})$ è un sottogruppo di $PGL(3,\mathbb{K})$, detto ***gruppo affine*** $2-$***dimensionale***.

Rispetto ad un fissato riferimento proiettivo, ad una trasformazione affine f è associata una matrice $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, 3$. Poiché $f(E_1), f(E_2) \in r_\infty$, allora è facile vedere che

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto, se $Q = (x, y)$ è un punto di $AG(2,\mathbb{K})$ e $f \in AGL(2,\mathbb{K})$, allora:

$$f : (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix},$$

dove

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{K}).$$

Osserviamo che se consideriamo un'affinità f che fissa l'origine $O = (0,0)$, si ha che

$a_{13} = a_{23} = 0$, pertanto $f : Q \mapsto A'Q$, quindi

$$AGL(2,\mathbb{K})_O \cong GL(2,\mathbb{K}).$$

Sia T il sottoinsieme di $AGL(2,\mathbb{K})$ rappresentato dalle trasformazioni affini che fissano la retta impropria puntualmente. Allora ognuna di esse è rappresentata in $PGL(3,\mathbb{K})$ da una matrice della forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

esse sono dette ***traslazioni***.

Siano $Q = (x,y) \in AG(2,\mathbb{K})$, $\tau \in T$ allora

$$A_\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è la matrice associata a τ. Quindi:

$$\tau(Q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Considerando la coppia di coordinate affini (x,y) possiamo riscrivere la traslazione semplicemente come

$$\tau : (x,y) \mapsto (x,y) + (a,b).$$

Proposizione 4.4. *T è un sottogruppo normale di $AGL(2,\mathbb{K})$.*

Dimostrazione. $T \neq \varnothing$ poiché l'applicazione identica appartiene a T. Siano $\tau, \nu \in T$, allora

$$\tau : (x,y) \mapsto (x,y) + (a,b),$$

$$\nu : (x, y) \mapsto (x, y) + (a', b').$$

Sia $Q = (x, y)$ un punto di $AG(2, \mathbb{K})$, allora:

$$(\tau \circ \nu^{-1})(x, y) = \tau(x - a', y - b') = (x + (a - a'), y + (b - b')) .$$

Quindi $\tau \circ \nu^{-1} \in T$. Pertanto T è un sottogruppo di $AGL(2, \mathbb{K})$.

Ora, sia $f \in AGL(2, \mathbb{K})$, allora

$$f : (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} .$$

Siano

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

Allora $f(X) = AX + C$ e $f^{-1}(X) = A^{-1}X - A^{-1}C$.

Calcoliamo $f^{-1} \circ \tau \circ f$, dove $\tau(X) = X + B$ con $B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ \tau \circ f)(X) &= (f^{-1} \circ \tau)(AX + C) = f^{-1}(AX + C + B) = \\ &= A^{-1}(AX + C + B) - A^{-1}C = X + A^{-1}B,\end{aligned}$$

Quindi $f^{-1} \circ \tau \circ f \in T$. Pertanto $T \triangleleft AGL(2, \mathbb{K})$. □

Teorema 4.3. $AGL(2, \mathbb{K}) \cong T \rtimes GL(2, \mathbb{K})$.

Dimostrazione. Siano $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ due punti di $AG(2, \mathbb{K})$, allora esiste $\tau \in T$, dove $\tau : (x, y) \mapsto (x, y) + (a, b)$, con $a = x_2 - x_1$ e $b = y_2 - y_1$, è tale che $\tau(P_1) = P_2$. Supponiamo ora che esista $\nu \in T$, $\nu : (x, y) \mapsto (x, y) + (a', b')$ tale che $\nu(P_1) = P_2$. Allora $x_1 + a = x_2 = x_1 + a'$, quindi $a = a'$; analogamente $b = b'$, pertanto $\tau = \nu$. Quindi esiste un unico elemento di T che trasforma P_1 in P_2.

Sia $\varphi \in AGL(2, \mathbb{K})$ e sia $P = \varphi(O)$ dove $O = (0, 0)$. Allora esiste $\tau \in T$ tale che $P = \tau(O)$. Quindi $\varphi = \tau \circ (\tau^{-1} \circ \varphi)$, dove $\tau^{-1} \circ \varphi \in GL(2, \mathbb{K})$ e $\tau^{-1}(\varphi(O)) = \tau^{-1}(P) = O$. Pertanto la tesi segue per la Proposizione 4.4. □

Definizione 4.4. *Due sottoinsiemi* F, F' *di* $AG(2,\mathbb{K})$ *si dicono* ***affinemente equivalenti*** *se esiste una'affinità* f *tale che* $f(F) = F'$*. Le proprietà che sono comuni a tutti i sottoinsiemi affinemente equivalenti si chiamano* ***proprietà affini****.*

Esempio 4.3. *Siano*

$$\mathscr{C}_1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 - 1 = 0\},$$

$$\mathscr{C}_2 = \{(x,y) : x^2 + y^2 + 4x + 2y + 4 = 0\}.$$

Tali insiemi sono affinemente equivalenti, infatti la traslazione f *definita da*

$$f : \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 1 \end{cases}$$

è tale che $f(\mathscr{C}_1) = \mathscr{C}_2$*.*

Esempio 4.4. *Siano*

$$\mathscr{C}_1 = \{(X_1, X_2, X_3) : X_1X_2 - X_3^2 = 0\},$$

$$\mathscr{C}_2 = \{(X_1, X_2, X_3) : X_1X_3 - X_2^2 = 0\}.$$

Abbiamo visto nell'Esempio 4.2 che essi sono proiettivamente equivalenti. Tali insiemi però non sono affinemente equivalenti. Infatti:

$$\mathscr{C}_1 \cap r_\infty = \{E_1, E_2\},$$

$$\mathscr{C}_2 \cap r_\infty = \{E_2\},$$

dove $E_1 = (1,0,0)$ *e* $E_2 = (0,1,0)$*, pertanto non esiste una affinità che trasformi* $\mathscr{C}_1$ *in* $\mathscr{C}_2$*.*

4.4 Classificazione proiettiva delle coniche

Si chiama ***conica*** l'insieme $\mathscr{C}$ dei punti di $PG(2, \mathbb{K})$ le cui coordinate omogenee sono soluzioni dell'equazione

$$a_{11}X_1^2 + a_{22}X_2^2 + a_{33}X_3^2 + 2a_{12}X_1X_2 + 2a_{13}X_1X_3 + 2a_{23}X_2X_3 = 0 \tag{4.5}$$

con $a_{ij} \in \mathbb{K}$ e a_{11}, a_{22}, a_{12} non tutti nulli.

L'equazione (4.5) si può scrivere nella forma compatta:

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}X_iX_j = 0, \tag{4.6}$$

dove $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni $i = 1, 2, 3$. Posto $X = (X_1\ X_2\ X_3)^t$, l'equazione (4.5) può essere riscritta nella forma matriciale

$$X^tAX = 0. \tag{4.7}$$

dove la matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

è detta ***matrice associata*** alla conica $\mathscr{C}$.

Teorema 4.4. *Il rango della matrice A è una proprietà proiettiva della conica.*

Dimostrazione. Siano $\mathscr{C}_1 : X^tA_1X = 0$ e $\mathscr{C}_2 : X^tA_2X = 0$ due coniche e sia f una proiettività tale che $f(\mathscr{C}_1) = \mathscr{C}_2$. Allora esiste $M \in GL(3, \mathbb{K})$ ed esiste $\rho \in \mathbb{K}$, $\rho \neq 0$, tale che $f : X = \rho MX'$. Quindi

$$f(\mathscr{C}_1) : (\rho MX')^tA_1(\rho MX') = 0,$$

pertanto $f(\mathscr{C}_1) : (X')^t\rho(M^{-1})^tA_1M^{-1}\rho X' = 0$ e quindi

$$f(\mathscr{C}_1) : (X')^t(M^{-1})^tA_1M^{-1}X' = 0.$$

Poiché $f(\mathscr{C}_1) = \mathscr{C}_2$, si ha che $A_2 = \mu M^t A_1 M$, dove $\mu \in \mathbb{K}$, $\mu \neq 0$, e quindi $rg(A_2) = rg(A_1)$ essendo $M \in GL(3, \mathbb{K})$. □

Grazie alla proposizione precedente ha senso la seguente definizione.

Definizione 4.5. *Sia $\mathscr{C}$ una conica, allora $rg(\mathscr{C}) := rg(A)$, dove A è la matrice associata a $\mathscr{C}$. La conica $\mathscr{C}$ è:*

i. ***non degenere*** *se $rg(\mathscr{C}) = 3$;*

ii. ***semplicemente degenere*** *se $rg(\mathscr{C}) = 2$;*

iii. ***doppiamente degenere*** *se $rango(\mathscr{C}) = 1$.*

Il seguente teorema classifica le coniche in $PG(2, \mathbb{K})$ dove $\mathbb{K}$ è un campo algebricamente chiuso.

Teorema 4.5. *Ogni conica $\mathscr{C}$ di $PG(2, \mathbb{K})$, dove $\mathbb{K}$ è un campo algebricamente chiuso, è proiettivamente equivalente a una delle seguenti:*

i. $X_1^2 + X_2^2 + X_3^3 = 0$ *conica non degenere;*

ii. $X_1^2 + X_2^2 = 0$ *conica semplicemente degenere;*

iii. $X_1^2 = 0$ *conica doppiamente degenere.*

Le tre coniche sono a due a due non proiettivamente equivalenti.

Dimostrazione. Sia $\mathscr{C}$ una conica di $PG(2, \mathbb{K})$ rappresentata dall'equazione matriciale $(X')^t A X' = 0$. Poiché $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso e A è simmetrica, segue dal Teorema 1.8, che esiste una proiettività f di $PG(2, \mathbb{K})$, rappresentata in un opportuno riferimento proiettivo, a meno di uno scalare non nullo, da una matrice M tale che $M^t A M$ è una delle seguenti matrici:

$$A'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A'_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A'_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\mathscr{C}$ è proiettivamente equivalente a una delle coniche $\mathscr{C}'_i : X^t A'_i X = 0$ in $(i), (ii)$ e (iii) le quali sono a due a due non proiettivamente equivalenti. $\square$

In base al Teorema precedente si ha che: *se* $\mathbb{K}$ *è algebricamente chiuso, in* $PG(2, \mathbb{K})$ *esistono precisamente tre classi di equivalenza proiettiva di coniche, ognuna delle quali è costituita dalle coniche aventi lo stesso rango.*

Corollario 4.1. *Se* $\mathscr{C}$ *è una conica di* $PG(2, \mathbb{K})$, *con* $\mathbb{K}$ *campo algebricamente chiuso, allora*

i. $\mathscr{C}$ *non contiene rette;*

ii. $\mathscr{C}$ *è unione di due rette distinte;*

iii. $\mathscr{C}$ *è unione di due rette coincidenti.*

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ le classi di equivalenza proiettiva sono cinque:

Teorema 4.6. *Ogni conica* $\mathscr{C}$ *di* $PG(2, \mathbb{R})$ *è proiettivamente equivalente a una delle seguenti:*

i. $X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 = 0$ *conica non degenere a punti reali;*

ii. $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0$ *conica non degenere a punti non reali;*

iii. $X_1^2 - X_2^2 = 0$ *conica semplicemente degenere, unione di due rette reali;*

iv. $X_1^2 + X_2^2 = 0$ *conica semplicemente degenere, unione di due rette complesse e coniugate il cui punto di intersezione è reale;*

v. $X_1^2 = 0$ *conica doppiamente degenere.*

Le cinque coniche sono a due a due non proiettivamente equivalenti.

Dimostrazione. Sia $\mathscr{C}$ una conica di $PG(2,\mathbb{R})$ rappresentata dall'equazione matriciale $X^tAX = 0$. Poiché $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e A è simmetrica, segue dal Teorema 1.9, che esiste una proiettività f di $PG(2,\mathbb{R})$, rappresentata in un opportuno riferimento proiettivo, a meno di uno scalare non nullo, da una matrice M tale che M^tAM sia una delle seguenti matrici:

$$A'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, A'_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A'_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A'_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A'_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le matrici A'_1 e A'_2 hanno rango 3, quindi le coniche $\mathscr{C}'_1 : (X')^tA'_1X' = 0$ e $\mathscr{C}'_2 : (X')^tA'_2X' = 0$ sono coniche non degeneri, $\mathscr{C}'_1$ ha punti reali, mentre $\mathscr{C}'_2$ è priva di punti reali. Le matrici A'_3 e A'_4 hanno rango 2, quindi $\mathscr{C}'_3 : (X')^tA'_3X' = 0$ e $\mathscr{C}'_4 : (X')^tA'_4X' = 0$ sono coniche semplicemente degeneri. La conica $\mathscr{C}'_3$ è l'unione di due rette reali, mentre $\mathscr{C}'_4$ è unione di due rette complesse il cui punto di intersezione è un punto reale. Infine la conica $\mathscr{C}'_5 : (X')^tA'_5X'$ è doppiamente degenere. Pertanto le cinque coniche sono a due a due non proiettivamente equivalenti. □

Osservazione 4.2. *Si noti che le coniche (i) e (ii), (iii) e (iv) del Teorema 4.6 sono proiettivamente equivalenti in* $PG(2,\mathbb{C})$.

Esempio 4.5. *Si consideri la conica* $\mathscr{C}$ *di equazione:*

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - 2X_1X_2 + 2X_1X_3 - 2X_2X_3 = 0. \qquad (4.8)$$

La matrice associata è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha $rg(\mathscr{C}) = 1$, quindi la conica è doppiamente degenere. Infatti l'equazione (4.8) si può scrivere nella forma:

$$(X_1 - X_2 + X_3)^2 = 0$$

quindi la conica si riduce nell'unione di due rette coincidenti.

Esempio 4.6.

1. La conica $\mathscr{C}$ di equazione:

$$2X_1^2 - X_1X_2 - X_2^2 + 3X_1X_3 + 3X_2X_3 - 2X_3^2 = 0 \qquad (4.9)$$

ha matrice associata

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix},$$

e $rg(\mathscr{C}) = 2$, quindi la conica è semplicemente degenere. L'equazione (4.9) si può scrivere nella forma:

$$(2X_1 - X_2 + X_3)(X_1 + X_2 - 2X_3) = 0$$

quindi la conica si riduce nell'unione di due rette reali e distinte.

2. La conica $\mathscr{C}$ di equazione:

$$X_1^2 + 4X_2^2 + X_3^2 + 2X_1X_3 = 0 \qquad (4.10)$$

ha matrice associata

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

e $rg(\mathscr{C}) = 2$, quindi la conica è semplicemente degenere e si riduce nell'unione di due rette complesse coniugate:

$$(X_1 + i2X_2 + X_3)(X_1 - 2iX_2 + X_3) = 0.$$

Esempio 4.7. *Si consideri la conica $\mathscr{C}$ di equazione:*

$$X_1^2 - X_2^2 + X_2X_3 = 0. \tag{4.11}$$

La matrice associata è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha $rg(\mathscr{C}) = 3$, quindi la conica è non degenere.

4.4.1 Intersezione tra una conica e una retta nel piano proiettivo

Siano $\mathscr{C}$ una conica non degenere di $PG(2, \mathbb{R})$ a punti reali, e ℓ una retta di $PG(2, \mathbb{R})$. Se $f \in PGL(\mathbf{V})$, allora

$$|\mathscr{C} \cap \ell| = |f(\mathscr{C} \cap \ell)| = |f(\mathscr{C}) \cap f(\ell)|$$

dove $f(\ell)$ è una retta di $PG(2, \mathbb{R})$ e $f(\mathscr{C})$ è una conica proiettivamente equivalente a $\mathscr{C}$. Per il Teorema 4.6 possiamo assumere che f sia la proiettività che trasforma $\mathscr{C}$ nella conica di equazione

$$2X_1X_2 + X_3^2 = 0.$$

Senza perdere di generalità, possiamo assumere che $\mathscr{C} : 2X_1X_2 + X_3^2 = 0$. Sia ℓ una generica retta di $PG(2, \mathbb{R})$, allora $\ell : aX_1 + bX_2 + cX_3 = 0$. Supponiamo $c \neq 0$, allora $\ell : X_3 = -\frac{a}{c}X_1 - \frac{b}{c}X_2$, quindi

$$2X_1X_2 + \left(-\frac{a}{c}X_1 - \frac{b}{c}X_2\right)^2 = 0.$$

I punti di intersezione tra la conica e la retta sono dati dalle soluzioni dell'equazione

$$a^2X_1^2 + 2(ab + c^2)X_1X_2 + b^2X_2^2 = 0. \tag{4.12}$$

Se $X_2 \neq 0$, posto $t = \frac{X_1}{X_2}$, allora l'equazione diventa $a^2t^2 + 2(ab + c^2)t + b^2 = 0$ e le soluzioni dipendono dal valore di $\frac{\Delta}{4} = c^2(c^2 + 2ab)$.

Per $a \neq 0$ vale che:

1. se $\frac{\Delta}{4} = 0$, allora la soluzione è $t = \frac{b}{a}$ e quindi la retta interseca la conica nel punto $P = (b, a, c)$, pertanto ℓ è ***tangente*** a $\mathscr{C}$;

2. se $\frac{\Delta}{4} > 0$, allora le soluzioni sono $t_{1/2} = \frac{-(ab+c^2)\pm\sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a^2}$, allora la retta interseca la conica nei punti distinti $P_i = \left(\frac{-ab-c^2\pm\sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a^2}, 1, \frac{-c\pm\sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a}\right)$, con $i = 1, 2$, pertanto ℓ è ***secante***;

3. se $\frac{\Delta}{4} < 0$, le soluzioni sono complesse e coniugate, e quindi la retta ℓ è ***esterna***.

Se $a = 0$, allora l'equazione (4.5) diventa

$$2c^2t + b^2 = 0,$$

la cui soluzione è $t = -\frac{b^2}{2c^2}$. La retta ℓ è ***tangente*** a $\mathscr{C}$ nel punto $P = \left(-\frac{b^2}{2c^2}, 1, -\frac{b}{c}\right)$.

Sia ora $c = 0$. L'equazione della retta è $\ell : aX_1 + bX_2 = 0$. Se $a \neq 0$, allora $\ell : X_1 = -\frac{b}{a}X_2$. Pertanto, per trovare l'intersezione tra la retta ℓ e la conica $\mathscr{C}$ si deve risolvere l'equazione

$$t^2 - 2\frac{a}{b} = 0,$$

dove $t = \frac{X_3}{X_2}$ essendo $X_2 \neq 0$. Se $\frac{2b}{a} = 0$, allora ℓ è ***tangente*** nel punto $P = (0, a, 0)$. Se $\frac{2b}{a} > 0$, la retta ℓ è ***secante*** nei punti $P_i = \left(-\frac{b}{a}, 1, \pm\sqrt{\frac{2b}{a}}\right)$, con $i = 1, 2$. Se $\frac{2b}{a} < 0$ non esistono soluzioni reali e la retta ℓ è ***esterna***.

Infine se $a = 0$ l'equazione della retta è $\ell : X_2 = 0$, che è quindi ***tangente*** alla conica $\mathscr{C}$ nel punto E_2.

Pertanto vale la seguente proposizione:

Proposizione 4.5. *Siano $\mathscr{C}$ una conica non degenere a punti reali di $PG(2,\mathbb{R})$ e ℓ una generica retta, allora $|\ell \cap \mathscr{C}| = 2, 1, 0$. Pertanto, La retta ℓ si dice **secante**, **tangente** o **esterna**, rispettivamente.*

Segue dalla precedente dimostrazione della Proposizione 4.5, tenendo presente il Teorema 4.5, che se $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso invece

Proposizione 4.6. *Sia $\mathscr{C}$ una conica di $PG(2,\mathbb{K})$ con $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso, e sia ℓ una retta di $PG(2,\mathbb{K})$, allora ℓ è secante o tangente a $\mathscr{C}$.*

4.5 Polarità definita da una conica

Sia $\mathscr{C}$ una conica non degenere di equazione $X^tAX = 0$ e sia $P = (\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \bar{Y}_3)$ un generico punto di $PG(2,\mathbb{K})$. Si definisce ***polare*** di P rispetto alla conica $\mathscr{C}$ la retta ℓ_P di equazione $\bar{Y}^tAX = 0$, dove $\bar{Y}$ rappresenta il vettore colonna avente per componenti le coordinate proiettive omogenee del punto P. Le coordinate proiettive omogenee della retta ℓ_P sono $[a, b, c]$ dove

$$\begin{cases} a = a_{11}\bar{Y}_1 + a_{12}\bar{Y}_2 + a_{13}\bar{Y}_3 \\ b = a_{12}\bar{Y}_1 + a_{22}\bar{Y}_2 + a_{23}\bar{Y}_3 \\ c = a_{13}\bar{Y}_1 + a_{23}\bar{Y}_2 + a_{33}\bar{Y}_3. \end{cases} \tag{4.13}$$

Viceversa, se ℓ ha coordinate proiettive omogenee $[a, b, c]$, poiché $\mathscr{C}$ è non degenere, il sistema (4.13) ammette un'unica soluzione. Quindi esiste un unico punto P tale che $\ell = \ell_P$. Il punto P è detto ***polo*** di ℓ e lo si denota con P_ℓ. Il punto P_ℓ ha coordinate proiettive omogenee date da $A^{-1}L$, dove L rappresenta il vettore colonna avente per componenti le coordinate proiettive di ℓ. Le coordinate proiettive omogenee del punto $P_\ell = (\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \bar{Y}_3)$ sono

$$\begin{cases} \bar{Y}_1 = \alpha_{11}a + \alpha_{12}b + \alpha_{13}c \\ \bar{Y}_2 = \alpha_{12}a + \alpha_{22}b + \alpha_{13}c \\ \bar{Y}_3 = \alpha_{13}a + \alpha_{23}b + \alpha_{33}c \end{cases},$$

dove gli α_{ij}, con $i,j = 1,2,3$, sono i termini di A^{-1} (cioè $\alpha_{ij} = \frac{1}{\det(A)}\bar{a}_{ij}$ per $i,j = 1,2,3$, con $\bar{a}_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$ complemento algebrico di a_{ij} e A_{ij} minore di A^t ottenuto cancellando la $i-$esima riga e la $j-$esima colonna della matrice A^t).

Denotato con $\mathcal{P}$ l'insieme dei punti di $PG(2,\mathbb{K})$ e $\mathcal{L}$ l'insieme delle rette di $PG(2,\mathbb{K})$, ha senso quindi considerare l'applicazione $\varphi : \mathcal{P} \cup \mathcal{L} \to \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$ definita da

$$\begin{cases} P \mapsto \ell_P \\ \ell \mapsto P_\ell \end{cases}.$$

φ è detta ***polarità*** definita dalla conica non degenere $\mathscr{C}$. *Segue dalla definizione di polare e polo che φ è biiettiva e vale che $\varphi^2 = Id_{\mathcal{P}\cup\mathcal{L}}$, cioè φ è involutoria.*

Teorema 4.7. *(di reciprocità)*
Sia φ la polarità definita da una conica non degenere $\mathscr{C}$. Se $P, Q \in PG(2,\mathbb{K})$, allora $P \in \varphi(Q)$ se e solo se $Q \in \varphi(P)$.

Dimostrazione. Siano $\mathscr{C} : X^tAX = 0$, $P = (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)$ e $Q = (\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \bar{Y}_3)$ due punti del piano $PG(2,\mathbb{K})$, e siano infine $\bar{X}$, $\bar{Y}$ i vettori colonna le cui componenti sono le coordinate proiettive omogenee di P e Q rispettivamente. Allora vale che

$$P \in \varphi(Q) \Leftrightarrow \bar{Y}^tA\bar{X} = 0 \Leftrightarrow \bar{X}^tA\bar{Y} = 0 \Leftrightarrow Q \in \varphi(P).$$

□

Definizione 4.6. *Siano P e Q due punti di $PG(2,\mathbb{K})$ e $\varphi(P)$, $\varphi(Q)$ le rispettive polari. I punti P e Q si dicono* ***coniugati*** *se $P \in \varphi(Q)$ e $Q \in \varphi(P)$. Analogamente, le rette $\varphi(P)$ e $\varphi(Q)$ si dicono* ***coniugate*** *rispetto alla conica $\mathscr{C}$ se una è incidente il polo dell'altra.*

Esempio 4.8. *Consideriamo la conica non degenere di equazione*

$$\mathscr{C} : X_1^2 + 6X_1X_2 + X_2^2 + 2X_1X_3 + X_2X_3 + \frac{1}{2}X_3^2 = 0.$$

Allora

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

è la matrice associata a $\mathscr{C}$. Sia $P = (Y_1, Y_2, Y_3)$, quindi la polare $\ell_P : [a, b, c]$ è:

$$\begin{cases} a = Y_1 + 3Y_2 + Y_3 \\ b = 3Y_1 + Y_2 + \frac{1}{2}Y_3 \\ c = Y_1 + \frac{1}{2}Y_2 + \frac{1}{2}Y_3 \end{cases}.$$

Viceversa se ℓ' ha coordinate proiettive omogenee $[a', b', c']$ il suo polo $P_{\ell'} = (\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \bar{Y}_3)$ è:

$$\begin{cases} \bar{Y}_1 = -\frac{1}{9}a' + \frac{4}{9}b' - \frac{2}{9}c' \\ \bar{Y}_2 = \frac{4}{9}a' + \frac{2}{9}b' - \frac{10}{9}c' \\ \bar{Y}_3 = -\frac{2}{9}a' - \frac{10}{9}b' + \frac{32}{9}c'. \end{cases}$$

Sia $P = (1, 1, 1)$ un punto di $PG(2,\mathbb{R})$, allora $\varphi(P) = \ell_P$ dove

$$\ell_P : 5X_1 + \frac{9}{2}X_2 + 2X_3 = 0.$$

Sia $\ell' : X_1 + 3X_2 + X_3 = 0$, allora $\varphi(\ell') = P_{\ell'}$ con $P_{\ell'} = (1, 0, 0)$.

Proposizione 4.7. *Siano $\mathscr{C} : X^tAX = 0$ una conica non degenere e $P \in \mathscr{C}$ allora $\varphi(P)$ è la retta tangente alla conica $\mathscr{C}$ nel punto P.*

Dimostrazione. Sia $\mathscr{C}$ la conica non degenere di equazione $X^t AX = 0$. Sia $P = (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)$ un punto appartenente alla conica. Quindi

$$\bar{X}^t A\bar{X} = 0,$$

dove $\bar{X}$ è il vettore colonna avente come componenti le coordinate proiettive omogenee di P. La polare $\varphi(P)$ del punto P è la retta di equazione

$$\bar{X}^t AY = 0, \tag{4.14}$$

allora $P \in \varphi(P)$ poiché $\bar{X}$ è soluzione di (4.14). Inoltre, essendo $\mathscr{C}$ non degenere, $\det(A) \neq 0$, quindi il sistema (4.14) ammette un'unica soluzione che è necessariamente $\bar{X}$. Se $\varphi(P)$ è secante a $\mathscr{C}$, sia Q l'ulteriore punto di intersezione di $\mathscr{C}$ con $\varphi(P)$. Allora, per la prima parte della dimostrazione, segue che $Q \in \varphi(Q)$. Inoltre, $P \in \varphi(Q)$ per il Teorema di reciprocità poiché $Q \in \varphi(P)$. Allora $\varphi(P) = PQ = \varphi(Q)$, ma questo è assurdo poiché $P \neq Q$ ed essendo φ biiettiva. Pertanto $\varphi(P)$ è tangente a $\mathscr{C}$ in P. □

Osservazione 4.3. *Sia $P = (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)$ un punto di una conica non degenere $\mathscr{C}$. Determiniamo l'equazione della retta tangente alla conica nel punto P. Sia $\bar{X}$ il vettore le cui componenti sono le coordinate proiettive omogenee di P, allora vale che $\bar{X}^t AX = 0$, cioè la tangente a $\mathscr{C}$ in P è*

$$\begin{split} a_{11}\bar{X}_1X_1 + a_{22}\bar{X}_2X_2 + a_{12}(X_1\bar{X}_2 + X_2\bar{X}_1) + a_{13}(X_1\bar{X}_3 + X_3\bar{X}_1) \\ + a_{23}(X_2\bar{X}_3 + X_3\bar{X}_2) + a_{33}\bar{X}_3X_3 = 0. \end{split} \tag{4.15}$$

La formula (4.15) è detta ***formula di sdoppiamento.***

Proposizione 4.8. *Sia $\mathscr{C}$ una conica non degenere di $PG(2, \mathbb{K})$ con $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso, e sia $P \notin \mathscr{C}$; la sua polare $\varphi(P)$ è la retta congiungente i punti di contatto delle tangenti alla conica condotte per P.*

Dimostrazione. Sia $P \notin \mathscr{C}$, allora $\varphi(P)$ è secante $\mathscr{C}$ per la Proposizione 4.7 poiché $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso. Siano T_1, T_2 i punti di intersezione tra $\varphi(P)$ con $\mathscr{C}$.

Per il Teorema di Reciprocità segue che $P = \varphi(T_1) \cap \varphi(T_2)$, dove $\varphi(T_1)$ e $\varphi(T_2)$ sono tangenti a $\mathscr{C}$ per la Proposizione 4.7. $\square$

Sia $\mathscr{C}$ una conica non degenere di $PG(2, \mathbb{R})$ e P un punto. Se $P \in \mathscr{C}$, allora $\varphi(P)$ è la retta tangente a $\mathscr{C}$ in P per la Proposizione 4.7. Invece se $P \notin \mathscr{C}$ allora:

1. P si dice ***punto esterno*** se $\varphi(P)$ è una retta secante la conica $\mathscr{C}$;

2. P si dice ***punto interno*** se $\varphi(P)$ è una retta esterna alla conica $\mathscr{C}$.

In particolare, segue dalla dimostrazione del Corollario 4.8 che un punto $P \notin \mathscr{C}$ è un punto esterno se e solo se esistono t_1 e t_2 rette incidenti P e tangenti alla conica $\mathscr{C}$.
Sia $P \notin \mathscr{C}$ un punto interno e siano ℓ ed ℓ' due rette distinte passanti per P che intersecano la conica $\mathscr{C}$ rispettivamente nei punti Q_1, Q_2 e Q'_1, Q'_2. Allora $\varphi(Q_1)$ $\varphi(Q_2)$, rette tangenti a $\mathscr{C}$, si intersecano in un punto esterno Q. Analogamente $\varphi(Q'_1)$ e $\varphi(Q'_2)$ si intersecano in un punto esterno Q'. Allora la polare $\varphi(P)$ è la retta incidente Q e Q'.

4.6 Classificazione affine delle coniche

Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso o $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e sia $\mathscr{C}$ una generica conica di $PG(2, \mathbb{K})$. Allora $\mathscr{C}$ ha equazione data da

$$a_{11}X_1^2 + a_{22}X_2^2 + a_{33}X_3^2 + 2a_{12}X_1X_2 + 2a_{13}X_1X_3 + 2a_{23}X_2X_3 = 0.$$

Si consideri $\mathscr{C} \cap AG(2, \mathbb{K})$, dove $AG(2, \mathbb{K}) = PG(2, \mathbb{K}) - r_\infty$. Quindi $\mathscr{C} \cap AG(2, \mathbb{K})$ è il sottoinsieme dei punti propri della conica. Pertanto $\mathscr{C} \cap AG(2, \mathbb{K})$ ha equazione

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \tag{4.16}$$

con $x = \frac{X_1}{X_3}$ e $y = \frac{X_2}{X_3}$. La (4.16) è detta ***equazione affine di*** $\mathscr{C}$.

Sia f una generica affinità, allora, per il Teorema 4.17

$$f : \begin{cases} x = m_{11}x' + m_{12}y' + c_1 \\ y = m_{21}x' + m_{22}y' + c_2 \end{cases} \tag{4.17}$$

Poiché f è anche una proiettività, $rg(f(\mathscr{C})) = rg(\mathscr{C})$ e quindi il rango è anche una proprietà affine di $\mathscr{C}$. Pertanto l'essere degenere, semplicemente degenere o doppiamente degenere è invariante per coniche affinemente equivalenti.

Calcoliamo ora $f(\mathscr{C})$:

$$\begin{aligned}(a_{11}m_{11}^2 + a_{22}m_{21}^2 + 2a_{12}m_{11}m_{21})x'^2 &+ \\ &+ (a_{11}m_{12}^2 + a_{22}m_{22}^2 + 2a_{12}m_{12}m_{22})y'^2 + \\ &+ 2[a_{11}m_{11}m_{12} + a_{12}(m_{12}m_{21} + m_{11}m_{22}) + a_{22}m_{21}m_{22}]x'y' + \\ &+ 2[m_{11}(a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + a_{13}) + m_{21}(a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + a_{23})]x' + \\ &+ 2[m_{12}(a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + a_{13}) + m_{22}(a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + a_{23})]y' + \\ &+ a_{11}c_1^2 + a_{22}c_2^2 + 2a_{12}c_1c_2 + 2a_{13}c_1 + 2a_{23}c_2 + a_{33} = 0.\end{aligned} \tag{4.18}$$

Quindi la sottomatrice dei termini quadratici della matrice associata a $f(\mathscr{C})$ è:

$$B_0 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix},$$

dove

$$\begin{aligned} b_{11} &= a_{11}m_{11}^2 + a_{22}m_{21}^2 + 2a_{12}m_{11}m_{21}, \\ b_{12} &= a_{11}m_{11}m_{12} + a_{12}(m_{12}m_{21} + m_{11}m_{22}) + a_{22}m_{21}m_{22}, \\ b_{22} &= a_{11}m_{12}^2 + a_{22}m_{22}^2 + 2a_{12}m_{12}m_{22}. \end{aligned}$$

Pertanto,

$$B_0 = M^t A_0 M$$

dove

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

è la matrice dei termini quadratici di $\mathscr{C}$ e

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

è la matrice dell'affinità f. Poiché $M \in GL(2, \mathbb{K})$, si ha che $rg(B_0) = rg(A_0)$. Pertanto *il rango della sottomatrice A_0 è una proprietà affine della conica $\mathscr{C}$.*

Se $\mathbb{K}$ è un campo algebricamente chiuso diremo che:

1. $\mathscr{C}$ è una ***conica a centro*** se $\det(A_0) \neq 0$;

2. $\mathscr{C}$ è una ***parabola*** se $\det(A_0) = 0$.

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, poiché $\det(B_0) = \det(M)^2 \det(A_0)$, anche *il segno di* $\det(A_0)$ *è una proprietà affine della conica $\mathscr{C}$.* Allora diremo che:

1. $\mathscr{C}$ è un'***iperbole*** se $\det(A_0) < 0$;

2. $\mathscr{C}$ è una ***parabola*** se $\det(A_0) = 0$;

3. $\mathscr{C}$ è un'***ellisse*** se $\det(A_0) > 0$.

Analogamente al caso in cui $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso, per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ l'ellisse e l'iperbole sono dette ***coniche a centro***. Il significato geometrico di centro di una conica verrà spiegato successivamente in termini della polarità determinata dalla conica $\mathscr{C}$. Chiaramente le definizioni appena date hanno solo un significato affine e non proiettivo.

Il determinante della sottomatrice A_0 esprime la natura dei punti d'intersezione tra $\mathscr{C}$ e r_∞. Tali punti sono dati da:

$$\begin{cases} a_{11}X_1^2 + a_{22}X_2^2 + a_{33}X_3^2 + 2a_{12}X_1X_2 + 2a_{13}X_1X_3 + 2a_{23}X_2X_3 = 0 \\ X_3 = 0. \end{cases} \tag{4.19}$$

Il sistema (4.19) produce l'equazione

$$a_{11}X_1^2 + 2a_{12}X_1X_2 + a_{22}X_2^2 = 0. \tag{4.20}$$

Possiamo assumere $X_2 \neq 0$. Allora:

$$a_{11}t^2 + 2a_{12}t + a_{22} = 0,$$

dove $t = \frac{X_1}{X_2}$. Osserviamo che la soluzione dell'equazione dipende dal valore di $\frac{\Delta}{4} = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -d$, dove d è il determinante della matrice A_0.

1. $d = 0$ se e solo se $\mathscr{C} \cap r_\infty$ è da data da due punti coincidenti, in questo caso la conica è una parabola;

2. $d \neq 0$ se e solo se $\mathscr{C} \cap r_\infty$ è data da due punti distinti, allora la conica è una conica a centro.

In $AG(2, \mathbb{R})$ si ha che:

- $\mathscr{C}$ è un'iperbole se l'equazione (4.20) ha due soluzioni reali e distinte, cioè se $\det(A_0) < 0$;

- $\mathscr{C}$ è una parabola se l'equazione (4.20) ha due soluzioni reali e coincidenti, ovvero se $\det(A_0) = 0$;

- $\mathscr{C}$ è una ellisse se l'equazione (4.20) ha due soluzioni complesse coniugate e quindi se $\det(A_0) > 0$.

Esempio 4.9. *Consideriamo la conica di equazione:*

$$x^2 - xy + y^2 + x - y = 0 \tag{4.21}$$

La matrice associata

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

ha determinante diverso da zero, quindi la conica è non degenere. La matrice

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

ha determinante $\frac{3}{4}$ *quindi la conica di equazione (4.21) è un'ellisse e i punti di intersezione con la retta impropria sono* $(\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, 1, 0)$.

Esempio 4.10. *Consideriamo la conica non degenere di equazione:*

$$2x^2 + xy - y^2 + 3x - y = 0 \tag{4.22}$$

Il determinate della matrice

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

è $-\frac{9}{4}$ *e quindi la conica di (4.22) è un'iperbole che interseca la retta impropria nei punti* $P_1 = (1, 2, 0)$ *e* $P_2 = (-1, 1, 0)$.

Esempio 4.11. *Sia:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice associata alla conica di equazione:

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 4y = 0. \tag{4.23}$$

Il determinante della matrice A è diverso da zero, quindi la conica è non degenere e il determinate di

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

è 0 *cioè la conica è una parabola che interseca* r_∞ *nel punto* $(2, 1, 0)$.

Definizione 4.7. *Sia $\mathscr{C}$ una conica non degenere. Si chiama* ***centro della conica*** *il polo della retta impropria. Ogni retta passante per il centro è detta* ***diametro****.*

Proposizione 4.9. *I diametri di una conica sono tutte e sole le polari dei punti impropri del piano.*

Dimostrazione. Siano d un diametro, P il polo di d e C il centro di una conica $\mathscr{C}$, allora $C \in d = \varphi(P)$. Per il Teorema di reciprocità si ha che $P \in \varphi(C) = r_\infty$, quindi P è un punto improprio. □

Il polo di un diametro d, essendo un punto improprio, definisce una direzione, detta ***direzione coniugata*** a d.

Definizione 4.8. *I diametri corrispondenti ai punti di intersezione tra la conica e retta impropria sono detti* ***asintoti****.*

Esempio 4.12. *Consideriamo la conica non degenere*

$$\mathscr{C} : X_1^2 + 6X_1X_2 + X_2^2 + 2X_1X_3 + X_2X_3 + \frac{1}{2}X_3^2 = 0.$$

Il polo della generica retta di coordinate proiettive omogenee $[a, b, c]$ ha coordinate proiettive omogenee

$$\begin{cases} \bar{Y}_1 = -\frac{1}{9}a + \frac{4}{9}b - \frac{2}{9}c \\ \bar{Y}_2 = \frac{4}{9}a + \frac{2}{9}b - \frac{10}{9}c \\ \bar{Y}_3 = -\frac{2}{9}a - \frac{10}{9}b + \frac{32}{9}c \end{cases}$$

Consideriamo la retta impropria $r_\infty : X_3 = 0$, allora il polo di tale retta è il punto $P_{r_\infty} = \left(-\frac{2}{9}, -\frac{10}{9}, \frac{32}{9}\right)$ ed è il centro di $\mathscr{C}$.
Sia ora $P = (1, 1, 0)$ un punto improprio di $PG(2, \mathbb{K})$, allora $\ell_P : [4, 4, \frac{3}{2}]$ è un diametro della conica $\mathscr{C}$.

Per calcolare gli asintoti risolviamo il sistema

$$\begin{cases} X_1^2 + 6X_1X_2 + X_2^2 + 2X_1X_3 + X_2X_3 + \frac{1}{2}X_3^2 = 0 \\ X_3 = 0 \end{cases}$$

dal quale otteniamo i punti impropri

$$P_1 = (-3 + 2\sqrt{2}, 1, 0) \text{ e } P_2 = (-3 - 2\sqrt{2}, 1, 0).$$

Allora gli asintoti di $\mathscr{C}$ *sono*

$$\varphi(P_1) : [2\sqrt{2}, -8 + 6\sqrt{2}, -\frac{5}{2} + 2\sqrt{2}],$$
$$\varphi(P_2) : [-2\sqrt{2}, -8 - 6\sqrt{2}, -5 - 2\sqrt{2}].$$

Sia $\mathscr{C}$ una parabola, allora $\mathscr{C}$ è tangente a r_∞, quindi il polo di r_∞ è $\mathscr{C} \cap r_\infty = C_\infty$, cioè il centro della conica coincide con il punto improprio della parabola. Si dice che la parabola è una ***conica senza centro***. I diametri sono rette parallele di $AG(2, \mathbb{K})$ ed hanno la direzione individuata dal centro improprio C_∞ di $\mathscr{C}$, perciò, costituiscono il fascio (improprio) delle rette per C_∞.

Esempio 4.13. *Consideriamo la parabola dell'Esempio 4.11 scritta in coordinate proiettive*

$$\mathscr{C} : X_1^2 - 4X_1X_2 + 4X_2^2 + 4X_2X_3 = 0,$$

che interseca la retta impropria nel punto $C_\infty = (2, 1, 0)$*, cioè nel centro della parabola. Siano* $P_1 = (1, 1, 0)$ *e* $P_2 = (-1, 1, 0)$*; allora i diametri di tali punti impropri sono* $\varphi(P_1) : [-1, 2, 2]$ *e* $\varphi(P_2) : [-3, 6, 2]$*. Allora i dimetri sono le rette del fascio:*

$$(-\lambda - 3\mu)X_1 + (2\lambda + 6\mu)X_2 + (2\lambda + 2\mu)X_3 = 0,$$

con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*,* $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$*.*

Il centro di un'ellisse e di una iperbole è centro di simmetria, cioè, detto $C_0 = (x_0, y_0) \in AG(2, \mathbb{K})$ il centro, la conica $\mathscr{C}$ è simmetrica rispetto a tale punto. Ellisse e iperbole vengono dette ***coniche a centro***. Il centro delle coniche a centro soddisfa le equazioni:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0. \end{cases} \tag{4.24}$$

Infatti la prima e la seconda equazione di (4.24) sono le equazioni delle polari relative ai punti $E_1 = (1,0,0)$ e $E_2 = (0,1,0)$ rispettivamente.
Siano $\mathscr{C}$ una conica a centro, d e d' due diametri di $\mathscr{C}$, D_∞ e D'_∞ i loro rispettivi poli. Allora d e d' sono coniugati se e soltanto se $D'_\infty \in d$ e $D_\infty \in d'$, cioè se e solo se il polo di d' è la direzione di d e viceversa. In particolare, un diametro d è ***autoconiugato*** se e solo se d è la polare del suo punto improprio.

Siano d, d' due diametri coniugati della conica a centro $\mathscr{C}$, e $D_\infty = (l, m, 0)$, $D'_\infty = (l', m', 0)$ i rispettivi poli. Allora d e d' sono coniugati se e solo se $D_\infty \in \varphi(D'_\infty)$, cioè se

$$\begin{pmatrix} l & m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l' \\ m' \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

da cui si ottiene la condizione

$$a_{11}ll' + a_{12}(lm' + l'm) + a_{22}mm' = 0. \tag{4.25}$$

Esempio 4.14. *Consideriamo l'iperbole dell'Esempio 4.10:*

$$\mathscr{C} : 2x^2 + xy - y^2 + 3x - y = 0.$$

Dal sistema (4.24) si ha che il centro dell'iperbole $\mathscr{C}$ *è* $C = (-\frac{5}{9}, -\frac{7}{9})$. *La polare del generico punto di coordinate proiettive omogenee* $(\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \bar{Y}_3)$ *definita dalla conica* $\mathscr{C}$ *è:*

$$\begin{cases} a = 2\bar{Y}_1 + \frac{1}{2}\bar{Y}_2 + \frac{3}{2}\bar{Y}_3 \\ b = \frac{1}{2}\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2 - \frac{1}{2}\bar{Y}_3 \\ c = \frac{3}{2}\bar{Y}_1 - \frac{1}{2}\bar{Y}_2. \end{cases}$$

Consideriamo i punti impropri $P_1 = (0,1,0)$ *e* $P_2 = (1,\frac{1}{2},0)$. *Allora* $\ell_{P_1} : [\frac{1}{2},-1,-\frac{1}{2}]$ *e* $\ell_{P_2} : [\frac{9}{4},0,\frac{5}{4}]$. ℓ_{P_1} *e* ℓ_{P_2} *sono due diametri, infatti* $C \in \ell_{P_1}, \ell_{P_2}$, *in particolare sono due diametri coniugati, infatti* P_1 *e* P_2 *soddisfano la (4.25).*

Definizione 4.9. *Sia* $P = (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)$ *un punto proprio reale di* $PG(2,\mathbb{C})$. *Si dicono* ***rette isotrope*** *per* P *le rette complesse coniugate*

$$j(P) : \bar{X}_3X_2 - \bar{X}_2X_3 = i(\bar{X}_3X_1 - \bar{X}_1X_3),$$

$$\overline{j}(P) : \bar{X}_3X_2 - \bar{X}_2X_3 = -i(\bar{X}_3X_1 - \bar{X}_1X_3).$$

L'unione di $j(P)$ e $\overline{j}(P)$ ha equazione

$$(\bar{X}_3X_1 - \bar{X}_1X_3)^2 + (\bar{X}_3X_2 - \bar{X}_2X_3)^2 = 0. \tag{4.26}$$

I punti impropri J_∞ e $\overline{J}_\infty$ delle rette isotrope sono detti ***punti ciclici***.
$J_\infty = r_\infty \cap \overline{j}(P)$ ha coordinate omogenee $(1,i,0)$. Infatti, il sistema

$$\begin{cases} i\bar{X}_3X_1 - i\bar{X}_1X_3 = \bar{X}_3X_2 - \bar{X}_2X_3 \\ X_3 = 0 \end{cases}$$

ha soluzione

$$\begin{cases} X_2 = iX_1 \\ X_3 = 0 \end{cases}$$

Analogamente si prova che $\overline{J}_\infty = r_\infty \cap \overline{j}(P)$ ha coordinate omogenee $(1,-i,0)$.

Definizione 4.10. *Si chiama* ***fuoco*** *di una conica* $\mathscr{C}$ *un punto proprio reale tale che le tangenti alla conica in tale punto siano le rette isotrope. La polare di un fuoco è detta* ***direttrice****.*

Esempio 4.15. *Consideriamo la conica non degenere*

$$\mathscr{C} : 2X_1^2 + X_2^2 - 2X_2X_3 - 2X_1X_3 + 2X_3^2 = 0.$$

Il punto $F = (1, 1, 1)$ è il fuoco di $\mathscr{C}$; infatti le rette isotrope

$$\begin{aligned} X_2 - X_3 &= i(X_1 - X_3) \\ X_2 - X_3 &= -i(X_1 - X_3) \end{aligned} \tag{4.27}$$

sono tangenti alla conica $\mathscr{C}$ rispettivamente nei punti $(0, 1 - i, 1)$ e $(0, 1 + i, 1)$. La direttrice del fuoco F é la retta $X_1 = 0$.

Si prova che una conica

$$\mathscr{C} : a_{11}X_1^2 + a_{22}X_2^2 + 2a_{12}X_1X_2 + 2a_{13}X_1X_3 + 2a_{23}X_2X_3 + a_{33}X_3^2 = 0$$

passa per i punti ciclici se e solo se $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$, allora $\mathscr{C}$ è una ***circonferenza***.

Il seguente teorema classifica le coniche nel caso in cui $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso oppure $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Teorema 4.8. *Ogni conica $\mathscr{C}$ di $AG(2, \mathbb{K})$ è affinemente equivalente a una delle seguenti:*

- $\mathbb{K}$ *algebricamente chiuso:*

  1. $x^2 + y^2 - 1 = 0$ *conica a centro;*
  2. $x^2 + y^2 = 0$ *conica a centro degenere;*
  3. $y^2 - x = 0$ *parabola;*
  4. $y^2 - 1 = 0$ *parabola degenere;*
  5. $y^2 = 0$ *conica doppiamente degenere.*

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*:*

  1. $x^2 + y^2 - 1 = 0$ *ellisse;*

2. $x^2 + y^2 + 1 = 0$ *ellisse a punti non reali;*

3. $x^2 + y^2 = 0$ *ellisse degenere;*

4. $x^2 - y^2 - 1 = 0$ *iperbole;*

5. $x^2 - y^2 = 0$ *iperbole degenere:*

6. $y^2 - x = 0$ *parabola;*

7. $y^2 - 1 = 0$ *parabola degenere;*

8. $y^2 + 1 = 0$ *parabola degenere;*

9. $y^2 = 0$ *conica doppiamente degenere.*

Dimostrazione. Consideriamo il caso in cui $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso.
Sia f l'affinità definita da:

$$\begin{cases} x = m_{11}x' + m_{12}y' + c_{11} \\ y = m_{12}x' + m_{22}y + c_{22} \end{cases} \tag{4.28}$$

tale che $M^t A_0 M = D$ con D matrice diagonale e $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ (si ricordi che A_0 è simmetrica). Possiamo quindi supporre $a_{12} = 0$, cioè che $\mathscr{C}$ abbia equazione:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2_{23}y + a_{33} = 0. \tag{4.29}$$

Notiamo che $\mathscr{C}$ è una conica a centro se e solo se $a_{11}a_{22} \neq 0$, essendo il determinante di A_0. Supponiamo che $\mathscr{C}$ sia una conica a centro. Allora la traslazione

$$\begin{cases} x = x' - \frac{a_{13}}{a_{11}} \\ y = y' - \frac{a_{23}}{a_{22}} \end{cases}$$

trasforma l'equazione (4.29) nella seguente forma:

$$a_{11}x'^2 + 2a_{22}y'^2 + c_{00} = 0, \tag{4.30}$$

dove $c_{00} = a_{33} - \frac{a_{13}^2}{a_{11}} - \frac{a_{23}^2}{a_{22}}$. Possiamo supporre che $c_{00} = -1$ oppure $c_{00} = 0$. Infatti se $c_{00} \neq 0$ basta moltiplicare moltiplicare primo e secondo membro della (4.30) per $-c_{00}^{-1}$. Normalizzando i coefficienti attraverso l'affinità

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{\sqrt{a_{11}}} \\ y' = \frac{y}{\sqrt{a_{22}}} \end{cases}$$

otteniamo rispettivamente la conica (1) e (2) del Teorema.

Se $\mathscr{C}$ non è una conica a centro possiamo supporre che $a_{11} = 0$ e $a_{22} \neq 0$, o viceversa. La traslazione

$$\begin{cases} x = x' \\ y = y' - \frac{a_{23}}{a_{22}} \end{cases}$$

trasforma l'equazione (4.29) nella conica di equazione

$$a_{22}y'^2 + 2a_{13}x' + d_{00} = 0,$$

dove $d_{00} = a_{33} - \frac{a_{23}^2}{a_{22}}$. Se $a_{13} = 0$ otteniamo l'equazione

$$a_{22}y'^2 + d_{00} = 0. \tag{4.31}$$

Se $a_{13} \neq 0$, con la traslazione

$$\begin{cases} x' = x'' - \frac{d_{00}}{2a_{13}} \\ y' = y'' \end{cases}$$

otteniamo l'equazione

$$a_{22}y''^2 + 2a_{13}x'' = 0. \tag{4.32}$$

Supponendo $d_{00} = 0$, l'affinità

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{y}{\sqrt{a_{22}}} \end{cases}$$

trasforma l'equazione (4.31) nella quarta e quinta equazione delle coniche dell'enunciato, mentre la terza equazione si ottiene applicando alla (4.32) l'affinità:

$$\begin{cases} x'' = \frac{x}{-2a_{13}} \\ y'' = \frac{y}{\sqrt{a_{22}}}. \end{cases}$$

Sia ora $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Consideriamo l'equazione (4.30), supponendo $c_{00} = -1$ o $c_{00} = 0$, si ottengono le prime cinque equazioni dell'enunciato attraverso l'affinità

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{\sqrt{|a_{11}|}} \\ y' = \frac{y}{\sqrt{|a_{22}|}}. \end{cases}$$

Se la conica è espressa dell'equazione (4.32), l'affinità

$$\begin{cases} x'' = \frac{x}{-2a_{13}} \\ y'' = \frac{y}{\sqrt{a_{22}}} \end{cases}$$

la trasforma nell'equazione della parabola (6) dell'enunciato.

Supponendo $d_{00} = -1$ o $d_{00} = 0$, l'affinità

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{y}{\sqrt{|a_{22}|}} \end{cases}$$

trasforma l'equazione (4.31) nelle rimanenti equazioni dell'enunciato. □

4.7 Equazioni canoniche delle coniche euclidee

Passiamo ora a considerare il caso delle coniche euclidee. La definizione di rango, di conica non degenere, degenere, semplicemente o doppiamente degenere, hanno ovviamente senso anche in questo caso. Ha pure senso la definizione di conica a centro e di parabola.

Per il Teorema 3.13 il gruppo delle isometrie del piano euclideo $\mathbf{E}^2$ è un sottogruppo di $AGL(2, \mathbb{K})$ ed è isomorfo a $T \rtimes O(\mathbf{E}^2)$.

Definizione 4.11. *Due sottoinsiemi F ed F' del piano euclideo si dicono* ***congruenti*** *se esiste un'isometria f tale che $f(F) = F'$. Le proprietà dei sottoinsiemi che sono proprietà di tutti i sottoinsiemi congruenti, si dicono* ***proprietà euclidee****.*

Essendo il gruppo delle isometrie un sottogruppo di $AGL(2,\mathbb{R})$, due figure congruenti sono anche affinemente equivalenti. In generale, però, una proprietà euclidea non è una proprietà affine.

Definizione 4.12. *Un diametro della conica $\mathscr{C}$ perpendicolare alla sua direzione coniugata è detto* ***asse****.*

Se d è asse, allora D_∞ definisce una direzione perpendicolare a quella definita da D'_∞, cioè $(l', m', 0) = (\rho m, -\rho l, 0)$, con $\rho \neq 0$; allora l'equazione (4.25) diventa:

$$a_{12}l^2 + (a_{22} - a_{11})lm - a_{12}m^2 = 0. \tag{4.33}$$

Un punto proprio V di intersezione tra la conica e l'asse si chiama ***vertice***. *La parabola ha un solo vertice; nell'iperbole ci sono due vertici appartenenti ad uno stesso asse; l'ellisse ha quatto vertici.*

Esempio 4.16. *Consideriamo l'ellisse dell'Esercizio 4.9:*

$$\mathscr{C} : x^2 - xy + y^2 + x - y = 0.$$

Il centro della conica è $C = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. La polare del generico punto di coordinate proiettive omogenee $(\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \bar{Y}_3)$ definita da $\mathscr{C}$ è:

$$\begin{cases} a = \bar{Y}_1 - \frac{1}{2}\bar{Y}_2 + \frac{1}{2}\bar{Y}_3 \\ b = -\frac{1}{2}\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 - \frac{1}{2}\bar{Y}_3 \\ c = \frac{1}{2}\bar{Y}_1 - \frac{1}{2}\bar{Y}_2. \end{cases}$$

Consideriamo i punti impropri $P_1 = (1, 1, 0)$ e $P_2 = (2, -2, 0)$. Allora $\ell_{P_1} : [1, 1, 0]$ e $\ell_{P_2} : [3, -3, 2]$. Vale che $C \in \ell_{P_1}, \ell_{P_2}$, quindi ℓ_{P_1} e ℓ_{P_2} sono due *diametri, inoltre* $P_1 \in \ell_{P_2}$ *e* $P_2 \in \ell_{P_1}$*, quindi i due diametri sono coniugati infatti* P_1 *e* P_2 *soddisfano la (4.25) e in particolare* ℓ_{P_1} *e* ℓ_{P_2} *sono assi di* $\mathscr{C}$ *essendo perpendicolari alla loro direzione coniugata.*

Dall'intersezione tra la conica e l'asse ℓ_{P_1} *si ottengono i vertici* $V_1 = (0,0)$ *e* $V_2 = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$*; mentre dall'intersezione tra* $\mathscr{C}$ *e l'asse* ℓ_{P_2} *si ottengono i vertici* $V_3 = \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{3}, \frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)$ *e* $V_4 = \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{3}, \frac{1-\sqrt{3}}{3}\right)$.

Proposizione 4.10. *Siano* $\mathscr{C}$ *una conica,* V *un vertice e* t *la retta tangente in* V *a* $\mathscr{C}$*. Allora* t *è perpendicolare all'asse passante per* V*.*

Dimostrazione. Se a è asse, allora a è la polare con polo D'_∞ ed è perpendicolare alla sua direzione coniugata D'_∞; di conseguenza se V è un vertice e $V \in a$, per il teorema di reciprocità si ha:

$$V \in a = \varphi(D'_\infty) \Rightarrow D'_\infty \in \varphi(V) = t,$$

e quindi t ha direzione perpendicolare ad a. □

Teorema 4.9. *Ogni conica* $\mathscr{C}$ *del piano euclideo è congruente a una delle seguenti coniche a due a due congruenti:*

- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a \geq b > 0,$ ***ellisse;***
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1,\ a \geq b > 0,$ ***ellisse a punti non reali;***
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0,\ a \geq b > 0,$ ***ellisse degenere;***
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\ a > 0,\ b > 0,$ ***iperbole;***
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0\ a \geq b > 0,$ ***iperbole degenere;***
- $y^2 - 2px = 0,\ p > 0,$ ***parabola;***
- $y^2 - a^2 = 0,\ a \geq 0,$ ***parabola degenere a punti reali***

- $y^2 + a^2 = 0$, $a > 0$ ***parabole degeneri a punti non reali;***

- $y^2 = 0$, ***conica doppiamente degenere.***

Dimostrazione. Supponiamo che la conica $\mathscr{C}$ abbia equazione

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \tag{4.34}$$

Possiamo procedere come nella dimostrazione del Teorema 4.8, considerando solo isometrie della forma

$$\begin{cases} x = m_{11}x' + m_{12}y' + c_1 \\ y = m_{21}x' + m_{22}y' + c_2, \end{cases} \tag{4.35}$$

con $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ matrice ortogonale, per diagonalizzare la matrice A_0 (gli elementi diagonali di B_0 sono gli autovalori di A_0).

Possiamo quindi supporre che la conica $\mathscr{C}$ abbia equazione (4.29) con a_{11} e a_{22} non entrambi nulli. Come nella dimostrazione del Teorema 4.8 possiamo ricondurci ad un'equazione della forma (4.30), (4.31), (4.32).

Consideriamo l'equazione (4.30). Se $c_{00} \neq 0$ possiamo dividere per ± 1 e ottenere l'equazione di un'ellisse, o di un'ellisse a punti non reali, o di un'iperbole a seconda del segno dei coefficienti di x^2 e y^2. Se invece $c_{00} = 0$ otteniamo un'ellisse degenere oppure un'iperbole degenere.

Le equazioni (4.31) e (4.32) si trattano allo stesso modo.

Il terzo passo della dimostrazione del Teorema 4.8 (normalizzazione dei coefficienti) non ha senso nel caso euclideo, perché le trasformazioni utilizzate non sono ortogonali e quindi le equazioni (4.30), (4.31) e (4.32) non sono ulteriormente riducibili. $\square$

Osservazione 4.4. *Dal Teorema precedente si ha che al variare dei parametri a, b e p si ottengono infinite classi di congruenza nel piano euclideo, contrariamente a quanto avviene per le classi di equivalenza affini, che sono in numero finito.*

4.7.1 Forma canonica di una conica

Il seguente paragrafo è essenzialmente la dimostrazione del Teorema 4.9. Esso rappresenta un "algoritmo" per ottenere la forma canonica di una conica.
Siano

$$\mathscr{C} : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{4.36}$$

una conica non degenere, A la matrice associata alla conica e A_0 la sottomatrice dei termini quadratici. Sia $\mathcal{R}(O, x, y)$ un riferimento cartesiano.
Per ottenere l'equazione canonica di $\mathscr{C}$ dobbiamo eseguire:

1. una ***rotazione*** in modo che gli assi della conica siano paralleli agli assi x, y del riferimento cartesiano; in questo modo all'interno dell'equazione (4.36) scomparirà il termine xy;

2. una ***traslazione*** per far coincidere il centro della conica nel caso di ellisse o iperbole, oppure il vertice nel caso di una parabola, con l'intersezione O degli assi cartesiani; in questo modo scompariranno i termini x e y all'interno dell'equazione (4.36).

Essendo A_0 una matrice simmetrica essa è diagonalizzabile, ovvero esisterà una matrice R tale che:

$$R^{-1}A_0R = D$$

con D matrice diagonale. Prima di tutto si determinano autovalori e relativi autovettori della matrice A_0; le colonne della matrice R sono gli autovettori normalizzati della matrice A_0. Otteniamo così un cambiamento di base

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}. \tag{4.37}$$

Se la conica è un'iperbole o un'ellisse determiniamo il centro della conica, se è una parabola determiniamo il suo vertice. Indichiamo con (X_0, Y_0) il centro o il vertice della conica, allora la rototraslazione che ci permetterà di scrivere la conica (4.36) nella sua forma canonica è:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix}. \tag{4.38}$$

Esempio 4.17. *Consideriamo la conica di equazione:*

$$5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0. \tag{4.39}$$

Allora

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 8\sqrt{2} \\ -3 & 5 & 0 \\ 8\sqrt{2} & 0 & 38 \end{pmatrix}, \qquad A_0 = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix},$$

$det(A) = -32$, quindi la conica è non degenere, $det(A_0) = 16$ pertanto la conica è un'ellisse.

1. *Troviamo la rotazione.*

   I vettori $(1, 1)$ e $(-1, 1)$ sono autovettori di A relativi agli autovalori $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 8$ rispettivamente. I versori associati sono $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; pertanto la rotazione è:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \tag{4.40}$$

   cioè

$$R_{\frac{\pi}{4}} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}.$$

2. *Troviamo la traslazione.*

   Essendo la conica un'ellisse, calcoliamo le coordinate del centro

$$C : \begin{cases} 2x + 8 = 0 \\ 8y - 8 = 0. \end{cases}$$

Pertanto $C = (-4, 1)$. *Quindi la traslazione è:*

$$\begin{cases} X = x' - 4 \\ Y = y' + 1 \end{cases},$$

In definitiva, la rototraslazione è:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

sostituendo nell'equazione (4.39) si ottiene l'equazione canonica $2x'^2 + 8y'^2 - 2 = 0$, *cioè:*

$$x'^2 + 4y'^2 - 1 = 0,$$

con $a = 1$ *e* $b = \frac{1}{2}$.

4.7.2 Geometria delle coniche euclidee

In questo paragrafo analizziamo le coniche come luogo dei punti di $AG(2, \mathbb{R})$ che soddisfano notevoli proprietà metriche.

- ***Ellisse***

  Sia $\mathscr{C}$ l'ellisse del piano euclideo di equazione

  $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{4.41}$$

  con $a \geq b > 0$.

  L'insieme dei punti appartenenti all'ellisse è un sottoinsieme del piano euclideo costituito dai punti $P = (x, y)$ tali che $|x| \leq a$, $|y| \leq b$. Dalla forma dell'equazione (4.41) segue immediatamente che $\mathscr{C}$ è simmetrica rispetto all'origine e rispetto agli assi coordinati. I punti di coordinate $(\pm a, 0)$ e $(0, \pm b)$ appartengono alla conica $\mathscr{C}$ e sono i quattro ***vertici*** dell'ellisse. I quattro segmenti di estremi l'origine e uno dei quattro vertici sono detti

semiassi, a e b sono detti ***lunghezze dei semiassi***.

Posto

$$c = \sqrt{a^2 - b^2},$$

i punti di coordinate $(\pm c, 0)$ sono i ***fuochi*** dell'ellisse.

Proposizione 4.11. *L'ellisse (4.41) è il luogo dei punti costituito dai punti del piano euclideo tali che le distanze tra i due fuochi hanno somma costante, uguale a* $2a$.

Dimostrazione. Siano $F = (+c, 0)$, $F' = (-c, 0)$ i due fuochi dell'ellisse. Sia $P = (x, y)$ tale che

$$d(P, F)| + |d(P, F') = 2a.$$

Allora $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$. Portando il secondo radicale al secondo membr, elevando ambo i membri al quadrato, sviluppando i calcoli e dividendo per 4, si ottiene $a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + xc$. Elevando nuovamente al quadrato ambo i membri si ha

$$a^2x^2 + a^2c^2 + 2a^2xc + a^2y^2 = a^4 + x^2c^2 + 2a^2xc,$$

da cui si ricava

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a^2 - c^2)} = 1.$$

Posto $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ $(a \geq b)$, si ottiene l'equazione (4.41) dell'ellisse. □

Il valore

$$e = \frac{c}{a},$$

con $0 \leq e \leq 1$, è l'***eccentricità*** dell'ellisse. Se $e \neq 0$ le rette $x = \pm\frac{a}{e}$ sono dette ***direttrici*** dell'ellisse.

Proposizione 4.12. *L'ellisse (4.41) è il luogo dei punti le cui distanze da un fuoco e dalla relativa direttrice hanno rapporto costante, uguale all'eccentricità della conica.*

Dimostrazione. Sia $\mathscr{C}$ un'ellisse e sia $P = (x, y)$; allora, la condizione dell'enunciato è

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{|x - \frac{a}{e}|} = e,$$

cioè $x^2(1 - e^2) + y^2 = 2(c - ea)x + a^2 - c^2$. Sostituendo $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ si ottiene l'equazione dell'ellisse. $\square$

Se $e = 0$, allora $a = b$ e quindi l'equazione (4.41) diventa

$$x^2 + y^2 = a^2$$

e $\mathscr{C}$ è una circonferenza di centro l'origine e raggio a. In questo caso ogni retta per l'origine è un asse di simmetria e i fuochi coincidono entrambi con il centro.

Iperbole

Sia $\mathscr{C}$ l'iperbole del piano euclideo di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{4.42}$$

con $a > 0$, $b > 0$. Se $a = b$, allora $\mathscr{C}$ è detta ***iperbole equilatera***. Come nel caso dell'ellisse, dall'equazione (4.42) si vede che l'iperbole è simmetrica rispetto all'origine e rispetto ai due assi coordinati.

L'asse di simmetria $y = 0$ incontra $\mathscr{C}$ nei punti $(\pm a, 0)$, che sono i due ***vertici***. Invece l'asse di simmetria $x = 0$ non ha intersezioni con la conica. L'iperbole $\mathscr{C}$ è contenuta in due semipiani definiti dalle condizioni $x \leq -a$ e $x \geq a$. Le intersezione tra la conica $\mathscr{C}$ e i semipiani che la contengono sono dette ***rami*** dell'iperbole. Le due rette di equazione

$$y = \pm\frac{bx}{a}$$

sono gli ***asintoti*** dell'iperbole. Posto

$$c = \sqrt{a^2 + b^2},$$

i punti di coordinate $(\pm c, 0)$ sono i ***fuochi***; il numero

$$e = \frac{c}{a},$$

con $e > 1$, è l'***eccentricità*** e le rette di equazione $x = \pm\frac{a}{e}$ sono le ***direttrici*** dell'iperbole.

Proposizione 4.13. *L'iperbole (4.42) è il luogo dei punti del piano euclideo le cui distanze dai fuochi hanno differenza costante in valore assoluto, uguale a* $2a$.

Dimostrazione. Siano $F = (+c, 0)$, $F' = (-c, 0)$ i due fuochi dell'iperbole. Sia $P = (x, y)$ tale che

$$|d(P, F) - d(P, F')| = 2a,$$

cioè $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$. Procedendo in maniera analoga a quella della dimostrazione della Proposizione 4.11 si ottiene l'identità

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a^2 - c^2)} = 1.$$

Posto $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ l'identità rappresenta l'iperbole. □

Proposizione 4.14. *L'insieme dei punti dell'iperbole (4.42) è il luogo dei punti le cui distanze da un fuoco e dalla relativa direttrice hanno rapporto costante, uguale all'eccentricità della conica.*

Dimostrazione. Sia $\mathscr{C}$ un'iperbole e sia $P = (x, y)$; allora, la condizione dell'enunciato è

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{|x - \frac{a}{e}|} = e,$$

cioè $x^2(1 - e^2) + y^2 = 2(c - ea)x + a^2 - c^2$. Sostituendo $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ ed $e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ si ottiene l'equazione dell'iperbole. □

Parabola

Consideriamo la parabola $\mathscr{C}$ di equazione

$$y^2 = 2px, \tag{4.43}$$

con $p > 0$. Poiché la y compare solo come termine di secondo grado, $\mathscr{C}$ è simmetrica rispetto all'asse $y = 0$. Tale asse incontra la parabola nell'origine, che è il ***vertice***. Dall'equazione (4.43) segue che $\mathscr{C}$ non ha punti $P = (x, y)$ tali che $x < 0$, quindi la parabola è contenuta nel semipiano definito da $x \geq 0$.

IL punto di coordinate $(\frac{p}{2}, 0)$ è il ***fuoco*** di $\mathscr{C}$, la retta di equazione $x = -\frac{p}{2}$ è la sua ***direttrice***, e l'***eccentricità*** di $\mathscr{C}$ è per definizione $e = 1$.

Proposizione 4.15. *La parabola (4.43) è il luogo dei punti le cui distanze da un fuoco e dalla relativa direttrice hanno rapporto costante, uguale all'eccentricità della conica.*

Dimostrazione. Sia $\mathscr{C}$ una parabola e sia $P = (x, y)$; allora, la condizione dell'enunciato è

$$\frac{\sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}}{|x + \frac{p}{2}|} = 1,$$

da cui si ottiene $y^2 = 2px$. □

4.8 Fasci di coniche

In questo paragrafo finale vengono studiati i fasci di coniche.

Teorema 4.10. *Due coniche distinte hanno quattro punti di intersezione nel piano $PG(2, \mathbb{C})$.*

Dimostrazione. Siano

$$\mathscr{C}_1 : \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} X_i X_j = 0, \tag{4.44}$$

$$\mathscr{C}_2 : \sum_{i,j=1}^{3} b_{ij} X_i X_j = 0, \tag{4.45}$$

le equazioni di due coniche distinte. I loro punti di intersezione hanno come coordinate proiettive omogenee le soluzioni del sistema formato dalle equazioni (4.44), (4.45). Poiché tale sistema ha quattro soluzioni reali o complesse, le due coniche hanno quattro punti di intersezioni in $PG(2,\mathbb{C})$, che possono essere tutti reali, due reali e due complessi coniugati, oppure tutti complessi a coppie coniugati. □

Definizione 4.13. *L'insieme delle coniche passanti per i punti di intersezione di due coniche distinte $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ di $PG(2,\mathbb{R})$ si dice* ***fascio di coniche****; le coniche $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ si dicono* ***coniche base*** *del fascio e i punti di intersezione* ***punti base*** *del fascio.*

Teorema 4.11. *L'equazione del fascio di coniche avente come coniche di base le coniche di equazione (4.44) e (4.45) è*

$$\mathscr{F}(\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2) : \sum_{i,j=1}^{3} (\lambda a_{ij} + \mu b_{ij}) X_i X_j = 0, \qquad con \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \tag{4.46}$$

Dimostrazione. Per $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ distinti, l'equazione (4.46) rappresenta una conica di $PG(2,\mathbb{R})$. Sia $P = (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)$ un punto base del fascio, allora

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} \bar{X}_i \bar{X}_j = 0, \qquad \sum_{i,j=1}^{3} b_{ij} \bar{X}_i \bar{X}_j = 0.$$

Quindi P soddisfa l'equazione (4.46). Pertanto ogni conica del fascio passa per i punti base dello stesso. Quindi l'equazione (4.46) è quella del fascio di coniche avente le coniche di equazioni (4.44) e (4.45) come coniche base. □

Osservazione 4.5. *Se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ sono le matrici associate alle coniche $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ rispettivamente, allora la matrice associata alla conica fascio $\mathscr{F}(\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2)$ individuata da λ e μ è $(\lambda a_{ij} + \mu b_{ij})$.*

Teorema 4.12. *Sia $\mathscr{F}$ un fascio di coniche. Se ogni conica del fascio non è degenere, allora esistono in $\mathscr{F}$ tre coniche degeneri distinte o no, reali o immaginarie.*

Dimostrazione. Supponiamo che le coniche (4.44) e (4.45) siano le coniche base del fascio, allora l'equazione di $\mathscr{F}$ è (4.46).
La conica di equazione (4.46) è degenere se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} \lambda a_{11} + \mu b_{11} & \lambda a_{12} + \mu b_{12} & \lambda a_{13} + \mu b_{13} \\ \lambda a_{12} + \mu b_{12} & \lambda a_{22} + \mu b_{22} & \lambda a_{23} + \mu b_{23} \\ \lambda a_{13} + \mu b_{13} & \lambda a_{23} + \mu b_{23} & \lambda a_{33} + \mu b_{33} \end{pmatrix} = 0. \tag{4.47}$$

La condizione (4.47) rappresenta un'equazione omogenea di terzo grado in λ e μ. Se tale equazione è identicamente soddisfatta allora ogni conica di $\mathscr{F}$ è una conica degenere, altrimenti l'equazione (4.47) ha tre soluzioni (λ, μ) che possono essere reali oppure una reale e due complesse coniugate. In corrispondenza di tali soluzioni si hanno tre coniche degeneri. $\square$

È possibile fare una classificazione dei fasci di coniche in base alle possibili configurazioni dei quattro punti base.

1. ***Quattro punti base distinti***

   Siano P_i, $i = 1, 2, 3, 4$, i quattro punti base tutti distinti. Ogni punto base è intersezione di due coniche del fascio, e non esiste una terna di punti allineati, altrimenti la retta contenente tale terna sarebbe una componente fissa e il fascio sarebbe quindi costituito da coniche tutte degeneri. Le tre coniche degeneri del fascio sono le tre coppie di rette che congiungono i punti base a due a due, cioè le coniche $P_1P_2 \cup P_3P_4$, $P_1P_3 \cup P_2P_4$ e $P_1P_4 \cup P_2P_3$.

2. ***Due punti base coincidenti e due distinti***

   Siano P_i, $i = 1, 2, 3, 4$, i quattro punti base, con $P_1 \equiv P_2$, P_3 e P_4 distinti. Poiché tutte le coniche del fascio passano per i punti base, due coniche qualsiasi di $\mathscr{F}$ sono tangenti nel punto P_1 alla stessa retta r. Delle tre coniche degeneri del fascio due coincidono ($P_1P_3 \cup P_1P_4$), mentre l'altra è formata dalla retta tangente r e dalla retta passante per i punti P_3 e P_4.

3. ***Punti base coincidenti a coppie***

   Supponiamo siano $P_1 \equiv P_2$ e $P_3 \equiv P_4$. Due coniche qualsiasi del fascio si intersecano in quattro punti a coppie coincidenti, cioè sono tangenti in P_1 e P_3 alle rette r ed r' rispettivamente. Delle tre coniche degeneri del fascio una è formata dalle due rette tangenti r ed r', mentre le altre due coincidono con la retta passante per P_1 e P_3.

4. ***Tre punti base coincidenti ed uno distinto***

   Supponiamo che $P_1 \equiv P_2 \equiv P_3$ mentre P_4 è un punto base distinto dagli altri. Due coniche qualsiasi del fascio si intersecano in quattro punti di cui tre coincidenti, cioè si **osculano**[2] in P_1. Le tre coniche degeneri del fa-

[2] In latino i baci erano di tre tipi:

(a) **osculum**: bacio del rispetto (quello che si da ai figli).

(b) **basium**: bacio dell'affetto (quello che si da alla moglie).

(c) **suavium**: bacio della libidine (quello che si da a.....).

scio coincidono nell'unica conica degenere del fascio formata dalla tangente comune r in P_1 e dalla retta passante per P_1 e P_4.

5. ***Quattro punti base coincidenti***

   Due qualsiasi coniche del fascio si incontrano in quattro punti coincidenti, cioè si **iperosculano** in $P_1 \equiv P_2 \equiv P_3 \equiv P_4$. Le tre coniche degeneri del fascio coincidono con l'unica conica doppiamente degenere, cioè la retta r in P_1 comune a tutte le coniche.