

C.d.L. in Ingegneria dell'Informazione
Prova di Geometria e Algebra - 5 febbraio 2018
Tempo a disposizione: 3h 30min

1) Geometria Analitica dello Spazio. Fissato nello spazio ordinario un sistema di riferimento cartesiano $\mathcal{RC}(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, siano date le rette:

$$r := \begin{cases} 2x + y + z - 3 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases} \quad s := \begin{cases} x + 1 = 0 \\ x - z = 0. \end{cases}$$

- (a) Verificare che le rette r ed s sono sghembe.
- (b) Determinare la retta di minima distanza tra r ed s .
- (c) Trovare la sfera di raggio minimo tangente alle rette r e s .

2) Coniche. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si consideri la conica

$$\mathcal{C}_k : x^2 - 2kx - y^2 + 2y - 2 = 0.$$

- (a) Per ogni $k \in \mathbb{R}$ si classifichi \mathcal{C}_k dal punto di vista proiettivo ed affine.
- (b) Determinare il centro della conica \mathcal{C}_1 .
- (c) Trovare gli asintoti della conica \mathcal{C}_1 .

3) Funzioni Lineari. Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito da

$$f(x, y, z) = (x + 2y + z, -x + \frac{1}{2}z, y + z).$$

- (a) Provare che f è un isomorfismo.
- (b) Trovare f^{-1} .
- (c) Determinare l'immagine tramite f del sottospazio $V = \{(x, y, z) | 2x - z = 0\}$.

4) Spazi euclidei. Si consideri la forma bilineare simmetrica $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$g((x, y, z), (x', y', z')) = 2xx' + xz' + yy' - 2yz' + zx' - 2zy' + 5zz'.$$

- (a) Provare che g è un prodotto scalare.
- (b) Trovare una base ortonormale di \mathbb{R}^3 rispetto a g .
- (c) Determinare l'angolo tra i vettori $\vec{v} = (1, 0, 0)$ e $\vec{w} = (1, \sqrt{6}, 0)$ rispetto a g .

Quesiti di Teoria.

1. Enunciare e dimostrare il Teorema della Disuguaglianza di Minkowski.
2. Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$. Dimostrare che gli autovalori di A sono le radici in \mathbb{K} del polinomio caratteristico $P_A(\lambda)$ di A .

N.B.: La prova sarà superata se verrà raggiunta la sufficienza, separatamente, per la parte relativa agli esercizi e per quella relativa alla teoria. Tutti i procedimenti devono essere brevemente giustificati. Costituirà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.