

**C.d.L. in Ingegneria dell'Informazione**  
**Prova di Geometria ed Algebra - 19 luglio 2018**  
**Tempo a disposizione: 3h 30m**

**1) Geometria Analitica dello Spazio.** Fissato nello spazio ordinario un sistema di riferimento cartesiano  $\mathcal{RC}(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ , si consideri la curva:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = (t-1)^2 \\ y = -t^2 \\ z = 2t. \end{cases}$$

- (a) Verificare che  $\mathcal{C}$  è una curva piana e trovare il piano  $\pi$  che la contiene.
- (b) Determinare la retta tangente a  $\mathcal{C}$  nel punto  $P(0, -1, 2)$ .
- (c) Scrivere l'equazione della sfera con centro nell'origine e tangente al piano  $\pi$ .

**2) Coniche.** Sia  $\mathcal{C}$  la conica passante per i punti  $P_1(-4, 0)$ ,  $P_2(-3, 1)$ ,  $P_3(-3, -1)$ ,  $P_4(0, 2)$  e  $P_5(0, -2)$ .

- (a) Determinare l'equazione di  $\mathcal{C}$ .
- (b) Verificare che  $\mathcal{C}$  è una conica non degenera di tipo parabolico.
- (c) Trovare l'asse ed il vertice di  $\mathcal{C}$ .

**3) Funzioni Lineari.** Si consideri l'endomorfismo  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definito da

$$f(x, y, z) = (7x + y + z, x + 2y - z, 5x + z).$$

- (a) Provare che  $f$  è un isomorfismo.
- (b) Trovare  $f^{-1}$ .
- (c) Determinare l'immagine tramite  $f$  del sottospazio  $V = \{(x, y, z) | x + y = 0\}$ .

**4) Spazi euclidei.** Sia  $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  la forma bilineare simmetrica la cui forma quadratica associata è  $Q(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2$ .

- (a) Trovare  $\varphi$ .
- (b) Determinare una forma canonica e la forma normale di  $Q$ .
- (c) Determinare la segnatura di  $Q$ .

**Quesiti di Teoria.**

1. Siano  $V, W, Z$  spazi vettoriali su un campo  $K$  e siano  $f : V \rightarrow W$  e  $g : W \rightarrow Z$  due funzioni lineari. Provare che la funzione composta  $g \circ f : V \rightarrow Z$  è lineare.
2. Sia  $A \in \mathbb{K}^{n,n}$  una matrice ortogonale. Provare che  $\det A = \pm 1$ .

**N.B.:** La prova sarà superata se verrà raggiunta la sufficienza, separatamente, per la parte relativa agli esercizi e per quella relativa alla teoria. Tutti i procedimenti devono essere brevemente giustificati. Costituirà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.