

**C.d.L. in Ingegneria dell'Informazione**  
**Prova di Geometria e Algebra - 19 Febbraio 2018**  
**Tempo a disposizione: 3h 30min**

**1) Geometria Analitica dello Spazio.** Fissato nello spazio ordinario un sistema di riferimento cartesiano  $\mathcal{RC}(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ , si consideri la curva:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = (t^2 + 1)^2, \\ y = t^2, \\ z = t^4. \end{cases} \quad t \in [0, \infty[$$

- (a) Verificare che  $\mathcal{C}$  è una curva piana e trovare il piano  $\pi$  che la contiene.
- (b) Trovare la retta  $r$  tangente a  $\mathcal{C}$  nel punto  $P(4, 1, 1)$ .
- (c) Determinare il piano contenente la retta  $r$  e perpendicolare a  $\pi$ .

**2) Coniche.** Sia  $\mathcal{C}$  la conica tangente alla retta  $r : 3x + 7y + 4 = 0$  in  $P_1(1, -1)$  e passante per i punti  $P_2(-2, -1)$ ,  $P_3(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$  e  $P_4(1, \frac{3}{4})$ .

- (a) Determinare l'equazione di  $\mathcal{C}$ .
- (b) Classificare  $\mathcal{C}$  dal punto di vista proiettivo e affine.
- (c) Trovare centro ed eventuali asintoti di  $\mathcal{C}$ .

**3) Funzioni Lineari.** Si consideri la funzione

$$f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x], \quad p(x) \mapsto p(x) + xp'(x) + p''(x).$$

- (a) Dimostrare che la funzione  $f$  è lineare.
- (b) Stabilire se  $f$  è un isomorfismo.
- (c) Dire se  $f$  è semplice.

**4) Spazi euclidei.** Sia  $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  la forma bilineare simmetrica la cui forma quadratica associata è  $Q(\vec{x}) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 3x_3^2$ .

- (a) Trovare  $\varphi$ .
- (b) Determinare una forma canonica e la forma normale di  $Q$ .
- (c) Determinare la segnatura di  $Q$ .

**Quesiti di Teoria.**

1. Sia  $\mathcal{C}$  una conica generale e  $d$  una retta propria. Dimostrare che  $d$  è un diametro di  $\mathcal{C}$  se e solo se il polo di  $d$  è un punto improprio.
2. Sia  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  con  $n$  dispari. Provare che se  $A$  è antisimmetrica allora  $\det A = 0$ .

**N.B.:** La prova sarà superata se verrà raggiunta la sufficienza, separatamente, per la parte relativa agli esercizi e per quella relativa alla teoria. Tutti i procedimenti devono essere brevemente giustificati. Costituirà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.