

C.d.L. in Ingegneria dell'Informazione
Prova di Geometria e Algebra - 18 gennaio 2018
Tempo a disposizione: 3h 30min

1) Geometria Analitica dello Spazio. Fissato nello spazio ordinario un sistema di riferimento cartesiano $\mathcal{RC}(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, si considerino la retta $r : x + y + z - 6 = 2x - y = 0$ ed i punti $P(1, 2, 1)$ e $Q(3, 2, 3)$.

- (a) Determinare la sfera Σ passante per i punti P e Q e avente centro sulla retta r .
- (b) Determinare la circonferenza massima \mathcal{C} della sfera Σ passante per i punti P e Q .
- (c) Trovare la retta tangente a \mathcal{C} nel punto P .

2) Coniche. Sia \mathcal{C} la conica tangente alla retta $r : x - y + 2 = 0$ nel punto $P(2, 4)$, tangente alla retta $s : x - y - 2 = 0$ nel punto $Q(4, 2)$ e passante per il punto $R(1, 1)$.

- (a) Determinare l'equazione di \mathcal{C} .
- (b) Classificare \mathcal{C} dal punto di vista proiettivo ed affine.
- (c) Trovare il centro e gli assi di \mathcal{C} .

3) Funzioni Lineari. Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\vec{v} = (2, 1, 1)$ sia un punto fisso per f , $\vec{w} = (1, -1, 1)$ appartenga a $\ker f$ e, inoltre, $f(3, 0, -2) = (4, 5, -1)$.

- (a) Trovare l'espressione esplicita di f .
- (b) Determinare $\ker f$ e $\text{Im} f$.
- (c) Stabilire se f è semplice.

4) Spazi euclidei. Si consideri lo spazio vettoriale \mathbb{R}^3 con la struttura euclidea standard e l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito da

$$f(x, y, z) = \left(\frac{x + 2y - 2z}{3}, \frac{2x + y + 2z}{3}, \frac{-2x + 2y + z}{3} \right).$$

- (a) Provare che f è un'isometria.
- (b) Determinare il sottospazio U dei punti fissi di f ed interpretare f geometricamente.
- (c) Determinare U^\perp .

Quesiti di Teoria.

1. Enunciare e dimostrare il Teorema Fondamentale dell'Algebra Lineare.
2. Provare che due matrici simili $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ hanno lo stesso determinante.

N.B.: La prova sarà superata se verrà raggiunta la sufficienza, separatamente, per la parte relativa agli esercizi e per quella relativa alla teoria. Tutti i procedimenti devono essere brevemente giustificati. Costituirà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.