C.d.L. in Ingegneria dell'Informazione
Prova di Geometria e Algebra - 14 giugno 2018
Tempo a disposizione: 3h 30min

1) Geometria Analitica dello Spazio. Fissato nello spazio ordinario un sistema di riferimento cartesiano $\mathcal{RC}(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, si considerino la retta $r : y - 2z + 2 = z - 1 = 0$ ed il piano $\pi : 4x + 3y - 12 = 0$.

(a) Determinare la sfera Σ passante per i punti $P(0, 4, 1)$ e $Q(-4, 0, 1)$ ed avente centro su r.

(b) Trovare il centro ed il raggio della circonferenza $\mathcal{C} = \Sigma \cap \pi$.

(c) Determinare la retta tangente a $\mathcal{C}$ nel punto P.

2) Coniche. Sia $\mathcal{C}$ la conica tangente alla retta $r : y - 1 = 0$ nel punto $A(1, 1)$, tangente alla retta $s : y + 1 = 0$ nel punto $B(1, -1)$ e passante per il punto $P(3, 0)$.

(a) Determinare l'equazione di $\mathcal{C}$.

(b) Classificare $\mathcal{C}$ dal punto di vista proiettivo e affine.

(c) Trovare il centro e gli assi di $\mathcal{C}$.

3) Funzioni Lineari. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo tale che $\vec{v} = (1, -1, 0)$ sia un autovettore di f associato all'autovalore 2 e, inoltre, $f(1, 1, 1) = (0, 0, 3)$ e $f(1, 2, 1) = (-1, 1, 4)$.

(a) Determinare f esplicitamente.

(b) Determinare $\ker f$ e $\mathrm{Im} f$.

(c) Stabilire se f è semplice.

4) Spazi euclidei. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con la struttura euclidea standard e l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$f(x, y, z) = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}x - \frac{\sqrt{5}}{5}z,\ y,\ \frac{\sqrt{5}}{5}x + \frac{2\sqrt{5}}{5}z \right).$$

(a) Provare che f è un'isometria.

(b) Determinare il sottospazio U dei punti fissi di f ed interpretare f geometricamente.

(c) Determinare $U^\perp$.

Quesiti di Teoria.

1. Siano V e W spazi vettoriali di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$. Dimostrare che
$$V \cong W \quad \Longleftrightarrow \quad \dim V = \dim W.$$

2. Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ una matrice invertibile. Provare che $\det A \neq 0$ e $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

N.B.: La prova sarà superata se verrà raggiunta la sufficienza, separatamente, per la parte relativa agli esercizi e per quella relativa alla teoria. Tutti i procedimenti devono essere brevemente giustificati. Costituirà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.