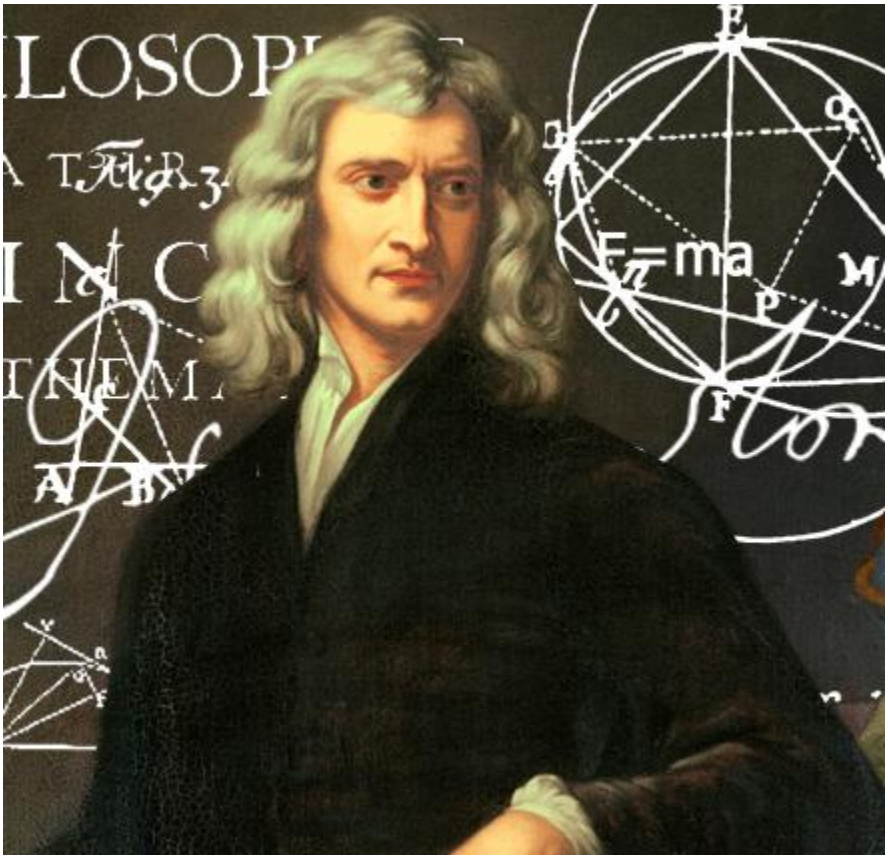
CORSO DI FISICA GENERALE 1

(Prof. Gianluca QUARTA)

ESERCIZI D'ESAME A.A. 2015-2016, 2016-2017 E 2017-2018

(CON SOLUZIONI)



CORSO DI FISICA GENERALE 1

(Prof. Gianluca QUARTA)

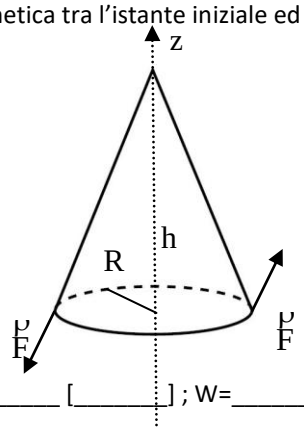
ESAME SCRITTO DEL 09 Giugno 2016

NOME E COGNOME:_____**Matricola:**_____

ESERCIZIO 1 (Punti 12)

Un cono omogeneo di massa M=10 Kg e raggio alla base R=0.5 m può ruotare intorno ad un asse fisso verticale z passante per il vertice e perpendicolare alla base. Al tempo t=0 al cono vengono applicate due forze parallele **F** di modulo pari a 10 N, giacenti nel piano della circonferenza di base e tangenti ad essa come indicato in figura. Supponendo il corpo inizialmente fermo al tempo t=0 si chiede di:

1. Determinare il momento d'inerzia del cono rispetto all'asse z.
2. Determinare la velocità angolare al tempo t=5 s;
3. Determinare il lavoro compito dalle forze tra l'istante iniziale ed il tempo t=5 s;
4. Verificare il teorema dell'energia cinetica tra l'istante iniziale ed il tempo t=5 s



Risultati: Iz=_____[_____] ϖ=_____ [_____] ; W=_____[_____]

ESERCIZIO 2 (Punti 10)

Un punto materiale di massa m=0.5 Kg comprime una molla di costante elastica k=150 N/m. Ad un certo istante il corpo viene lasciato libero di muoversi su un piano scabro orizzontale di lunghezza l= 0.2 m con coefficiente di attrito dinamico μ_d=0.5. Dopo il tratto orizzontale scabro è presente una guida circolare liscia di raggio R= 0.4 m. Determinare di quanto il corpo deve comprimere la molla perché esso si stacchi nel punto B della guida circolare liscia.

Risultati: Δx=_____ [_____]

Esercizio 3 (Punti 8)

Enunciare e dimostrare il teorema dell'energia cinetica per il punto materiale.

CORSO DI FISICA GENERALE 1

(Prof. Gianluca QUARTA)

ESAME SCRITTO DEL 24 Giugno 2016

NOME E COGNOME:_____**Matricola:**_____

Esercizio 1 (Punti 10)

Un punto materiale di massa m=4 Kg si muove sotto l'azione di una forza $\vec{F}$ data da (con t in secondi):

$$\vec{F} = 4t\,\hat{x} + 12t^2\,\hat{y} \qquad [N]$$

Sapendo che al tempo t=0 s il punto si trova nell'origine del sistema di riferimento con velocità nulla determinare:

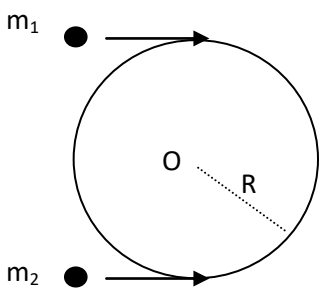
1.L'accelerazione del punto in funzione del tempo.
2. La velocità del punto in funzione del tempo.
3. Il lavoro compiuto dalla forza tra gli istanti t=0 s e t= 2 s.
4. Verificare il teorema dell'energia cinetica tra gli istanti t=0 s e t= 2 s.

Risultati: $\vec{a}$ =_____ [_____] ; $\vec{v}$ =_____[_____] ; W =_____[_____]

Esercizio 2 (Punti 12)

Un disco omogeneo di massa M=100 g e raggio R=0.20 m si trova inizialmente in quiete su un piano orizzontale liscio. Al tempo t=0 il disco viene colpito da due punti materiali di massa m_1=40 g e m_2=30 g e velocità **v** = 10 m/s diretta come in figura. Sapendo che i due corpi rimangono conficcati nel disco determinare:

1. La velocità $\mathbf{V_{cm}}$ del centro di massa del sistema dopo l'urto;
2. La velocità angolare dopo l'urto;
3. Il modulo della velocità del punto m_1 quando il disco ha compiuto un quarto di giro;
4. Studiare il moto del sistema nel caso particolare in cui m_1 = m_2=40 g.



Risultati: $\vec{V}_{cm}$ =_____ [_____] ; ϖ=_____[_____]; v_1 =_____ [_____]

Esercizio 3 (Punti 8)

Scrivere e dimostrare la relazione di Mayer tra calore specifico molare a pressione costante e volume costante.

CORSO DI FISICA GENERALE 1

(Prof. Gianluca QUARTA)

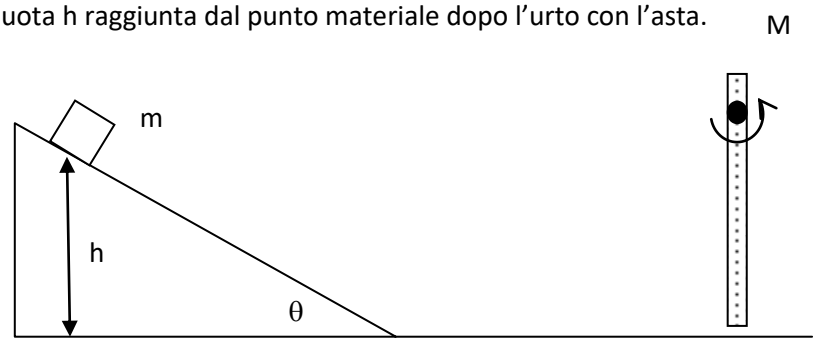
ESAME SCRITTO DEL 19 Luglio 2016

NOME E COGNOME:_____**Matricola:**_____

Esercizio 1 (Punti 12)

Un punto materiale di massa m=0.5 Kg, inizialmente fermo, si muove su un piano inclinato (θ=30°) scabro (μ=0.3) a partire da una quota h=50 cm. Subito dopo il piano inclinato il punto si muove su un tratto di piano orizzontale liscio e si conficca nell'estremo di un'asta di lunghezza l=30 cm e massa M= 1 Kg che può ruotare intorno ad un asse posto ad una distanza d=5 cm da un suo estremo. Determinare:

1. Il tempo t impiegato dal punto per percorrere il piano inclinato;
2. La velocità del punto subito prima v_0 e subito dopo l'urto $v_1$con l'asta;
3. La velocità angolare ϖ dell'asta dopo l'urto.
4. La massima quota h raggiunta dal punto materiale dopo l'urto con l'asta.



Risultati: t=_____ [_____] ; v_0=_____ [_____] ; v_1=_____ [_____] ; ϖ=_____[_____] h=_____[_____]

Esercizio 2 (Punti 10)

Due corpi della stessa sostanza e di massa pari a M_1=100 g e M_2=120 g sono posti a contatto. Inizialmente essi si trovano, rispettivamente, alle temperature T_1=80 K e T_2=100 K. Sapendo che il calore specifico dei due corpi dipende dalla temperatura secondo la relazione: $c = \alpha T^2$ essendo α una costante pari a 2 x 10^{-2} J $Kg^{-1}K^{-3}$. Si calcoli:

1. La temperatura finale di equilibrio dei due corpi;
2. La variazione di entropia dei sistema costituito dai due corpi.

Esercizio 3 (Punti 8)

Enunciare e dimostrare il teorema di Konig sull'energia cinetica.

CORSO DI FISICA GENERALE 1

(Prof. Gianluca QUARTA)

ESAME SCRITTO DEL 07 Settembre 2016

NOME E COGNOME:_____**Matricola:**_____

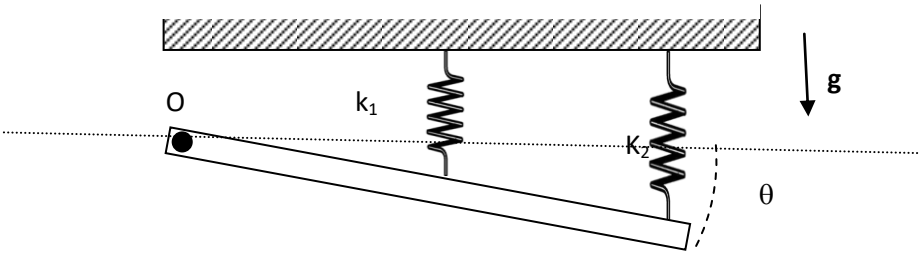
Esercizio 1 (Punti 12)

Una sbarretta omogenea di massa m= 1 Kg e lunghezza l=60 cm può ruotare intorno ad un asse orizzontale passante per uno dei suoi estremi (O in figura). La sbarretta è collegata a due molle di costanti elastiche K_1=200 N/m e K_2=100 N/m in due punti posti in corrispondenza del centro e dell'estremo della sbarretta opposto ad O (come in figura) . Le due molle sono a riposo quando la sbarretta è in posizione orizzontale. Determinare:

1. L'angolo formato dalla sbarretta con l'orizzontale quando il sistema è in equilibrio.

Al tempo t=0 la sbarretta viene portata in posizione orizzontale e, da ferma, lasciata libera di muoversi. Determinare:

2. L'equazione differenziale del moto;
3. Il periodo delle piccole oscillazioni
4. La legge oraria sempre nel caso delle piccole oscillazioni.



Risultati: θ_{eq}=_____ [_____] ; T=_____ [_____] ; θ (t)=_____

Esercizio 2 (Punti 10)

Una particella di massa m_1=0.5 kg si trova all'istante t=0 s, con velocità nulla, nel punto individuato dal raggio vettore: $\vec{r}_1^{\,0} = -5\hat{x} + \hat{y} - 6\hat{z}$

Successivamente gli viene applicata una forza funzione del tempo t: $\vec{F} = t\hat{x} + 2t\,\hat{z}$. All'istante t= 3 s la particella ne urta un'altra di massa doppia la cui velocità è data da: $\vec{v}_2 = \frac{3}{4}\hat{x} - 3\hat{z}$

Determinare:

1. Le coordinate del punto P in cui avviene l'urto;
2. La velocità della particella dopo l'urto nell'ipotesi di urto completamente anelastico.

Risultati: P=_____ [_____] ; **v**=_____ [_____] ;

Esercizio 3 (Punti 8)

Dimostrare che per un gas perfetto l'energia interna dipende solo dalla temperatura T e ricavarne l'espressione.

CORSO DI FISICA GENERALE 1

(Prof. Gianluca QUARTA)

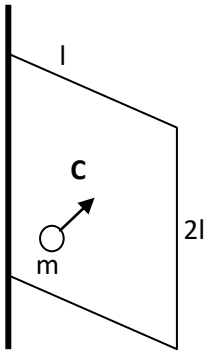
ESAME SCRITTO 21 Settembre 2016

NOME E COGNOME:_____**Matricola:**_____

Esercizio 1 (Punti 10)

Un proiettile di massa m=100 g viene lanciato con velocità orizzontale v_0=50 m/s contro una banderuola rettangolare di larghezza l, lunghezza 2l (l=25 cm) e massa M= 6m=600 g, inizialmente ferma, che può ruotare senza attrito intorno ad un asse verticale come indicato in figura. Sapendo che il proiettile urta la banderuola esattamente nel centro (C) e vi rimane conficcato determinare:

1. Il momento d'inerzia della banderuola rispetto all'asse;
2. La velocità del proiettile subito dopo l'urto;
3. La velocità angolare della banderuola subito dopo l'urto;
4. L'impulso (modulo, direzione e verso) esercitato dall'asse durante l'urto.



Risultati: l =_____ [_____] ; v=_____ [_____]ϖ =_____ [_____] ; **J**=_____ [_____]

Esercizio 2 (Punti 12)

Un punto materiale di massa m si muove nel piano XOY secondo la seguente legge oraria:

$$\vec{r}(t) = A\cos(\varpi t)\hat{x} + B\,sen(\varpi t)\hat{y}$$

Essendo t il tempo e A e B costanti reali positive.
Determinare:

1. La traiettoria del punto;
2. La forza agente su di esso;
3. Il lavoro compiuto dalla forza tra il punto P (A,0) e Q (-A,0).
4. Verificare il teorema dell'energia cinetica tra i due punti P e Q.

Esercizio 3 (Punti 8)

Si illustrino i due enunciati del II principio della termodinamica e si dimostri che essi sono tra loro equivalenti.

CORSO DI FISICA GENERALE 1

(Prof. Gianluca QUARTA)

ESAME SCRITTO 25/10/2016

NOME E COGNOME:_____**Matricola:**_____

Esercizio 1 (Punti 12)

Un punto materiale di massa m si muove nello spazio con velocità:

$$\vec{v} = (A sen\varpi t)\hat{x} + (A\cos\varpi t)\hat{y} + 2\hat{z}$$

Dove A è una costante reale e positiva. Sapendo che al tempo t=0 il punto materiale si trova nell'origine:

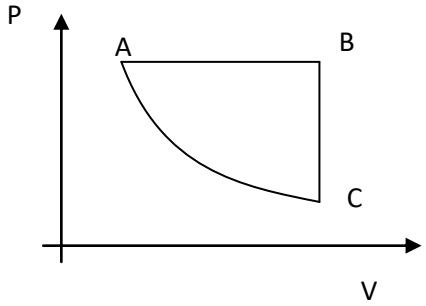
1. Dimostrare che il moto è uniforme e determinarne la velocità;
2. Descrivere la traiettoria del punto;
3. Calcolare la forza agente sul punto;
4. Dimostrare che la forza non compie lavoro.

Risultati: **v** =_____ [_____] ; **F**=_____ [_____]

Esercizio 2 (Punti 10)

Due moli di gas perfetto biatomico compiono il ciclo reversibile indicato in figura in cui: A-B è una trasformazione isobara, B-C isocora e C-A isoterma. Sapendo che in A il gas occupa un volume di V_A= 1.5 l alla pressione di P_A= 1.5 bar e che il volume in B V_B è pari al doppio del volume in A calcolare:

1. Pressione, volume e temperatura nei punti A, B e C;
2. La variazione di energia interna del gas in ogni trasformazione;
3. Il calore scambiato in ogni trasformazione;
4. Il rendimento del ciclo.



Risultati: (Pa, Va, Ta) =_____ [_____] ; _____ [_____] ; _____ [_____] ; (Pb,Vb,Tb)=_____ [_____];_____ [_____]_____ [_____] ; (Pc,Vc,Tc)=_____ [_____];_____ [_____]_____ [_____] ;
ΔUab=_____[_____]; Δubc=_____[_____]; Δuca=_____[_____];
Qab=_____[_____]; Qbc=_____[_____]; Qca=_____[_____];
η=_____[_____]

Esercizio 3 (Punti 8)

Ricavare il teorema delle velocità relative (si diano per note le formule di Poisson).

CORSO DI FISICA GENERALE 1

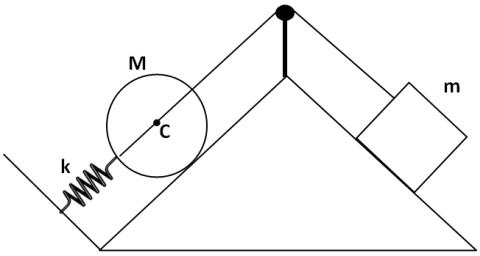
(Prof. Gianluca QUARTA)

ESAME SCRITTO 16 Gennaio 2017

NOME E COGNOME:_____**Matricola:**_____

Esercizio 1 (Punti 12)

Un disco omogeneo di massa M=0.5 Kg e raggio R=0.4 m può rotolare senza strisciare su un piano inclinato di un angolo θ=45°. Il centro del disco è connesso ad una molla di costante elastica k=150 N/m e, tramite una fune inestensibile e di massa trascurabile, ad un corpo, assimilabile ad un punto materiale, di massa m=M/2, disposto come in figura. Il coefficiente di attrito dinamico è pari a μ_d=0.2 e quello statico è pari a μ_s =0.3 (sia per il disco che per il punto materiale). Inizialmente il sistema è in equilibrio. Successivamente il disco viene allontanato dalla posizione di equilibrio e lasciato libero di muoversi. Determinare:



1. La deformazione Δx della molla in condizioni di equilibrio. Determinare inoltre se la molla è tesa o compressa.
2. Dimostrare che dopo che il centro C del disco viene allontanato dalla posizione di equilibrio il sistema inizia ad oscillare di moto armonico e calcolarne il periodo.
3. In un certo istante di tempo viene tagliata la fune. Calcolare il nuovo periodo di oscillazione del disco.

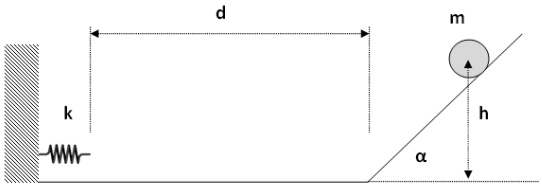
Risultati: Δx =_____ [_____] ; T=_____ [_____]

Esercizio 2 (Punti 10)

Un punto materiale, inizialmente fermo, di massa m= 0.4 Kg viene lasciato cadere lungo un piano liscio inclinato di un angolo α=45°, a partire da un'altezza h= 0.6 m. Dopo il piano inclinato il punto percorre un tratto orizzontale liscio di lunghezza d=0.8 m prima di comprimere una molla di costante elastica k= 50 N/m di massa trascurabile, inizialmente a riposo.

Determinare:

1. La velocità del punto materiale alla fine del piano inclinato
2. La massima compressione della molla;
3. Il tempo impiegato per tornare nella posizione iniziale.



Risultati: v_0 =_____ [_____] ; Δx=_____ [_____] ; t_s=_____ [_____]

Esercizio 3 (Punti 8)

Ricavare il teorema delle accelerazioni relative (si dia per noto il teorema delle velocità relative).

CORSO DI FISICA GENERALE 1

(Prof. Gianluca QUARTA)

ESAME SCRITTO 01 Febbraio 2017

NOME E COGNOME:_____**Matricola:**_____

Esercizio 1 (Punti 10)

Un punto materiale di massa m= 1 Kg viene lanciato verticalmente verso l'alto con velocità V_0=20 m/s. Sapendo che il punto risente della forza peso e di una forza di attrito viscoso **F**=-k**v** (essendo k=2 Kg/s una costante reale positiva e v la velocità) determinare:

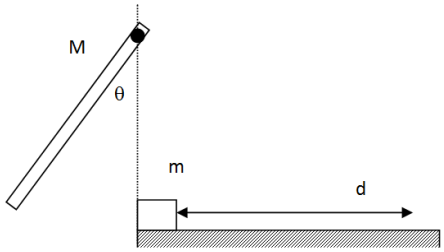
4. Il tempo t_s impiegato dal punto materiale per raggiungere la massima quota rispetto alla posizione iniziale;
5. La massima quota raggiunta dal punto materiale;
6. Il lavoro compiuto dalla forza di attrito viscoso nel tempo t_s.

Risultati: h =_____ [_____] ; t=_____ [_____] ; w=_____ [_____]

Esercizio 2 (Punti 12)

Un'asta sottile, rigida ed omogenea di lunghezza l=0.5 m e massa M=0.4 Kg può ruotare senza attrito intorno al suo estremo O. Ad un certo punto l'asta viene lasciata cadere, da ferma, a partire dalla configurazione per cui θ=45°. In corrispondenza della verticale l'estremo libero dell'asta urta, in modo completamente elastico, un punto materiale di massa m in modo che dopo l'urto l'asta rimane ferma in posizione verticale. Il punto materiale si muove quindi su un piano orizzontale scabro (μ_d=0.4) prima di fermarsi dopo aver percorso una certa distanza d. Si determini:

1. La velocità angolare dell'asta prima dell'urto;
2. La massa del punto materiale;
3. La velocità del punto materiale subito dopo l'urto;
4. La distanza percorsa sul piano scabro dal punto materiale.



Risultati: ω_0 =_____ [_____] ; m=_____ [_____] ;

v_0=_____ [_____]; d=_____ [_____]

Esercizio 3 (Punti 8)

Si rappresenti sul piano di Clapeyron il Ciclo di Carnot per un gas ideale e se ne calcoli il rendimento in funzione delle temperature massima e minima raggiunte nel ciclo.

CORSO DI FISICA GENERALE 1

(Prof. Gianluca QUARTA)

ESAME SCRITTO 15 Febbraio 2017

NOME E COGNOME:_____**Matricola:**_____

Esercizio 1 (Punti 10)

Un uomo di massa M=60 Kg con in mano una palla di massa m=2 Kg, è in piedi ai bordi di un disco di raggio R=2 m e massa M che può ruotare senza attrito intorno ad un asse verticale passante per il suo centro. All'istante di tempo t=0, l'uomo lancia la palla con velocità v_0=10 m/s diretta tangenzialmente al bordo del disco. Determinare (nell'ipotesi che l'uomo sia approssimabile come un punto materiale di massa M):

1. La velocità angolare ϖ_0 con cui inizia a ruotare il disco;
2. La velocità v_0 dell'uomo immediatamente dopo il lancio della palla;

Negli istanti successivi al lancio della palla sull'asse di rotazione del disco inizia ad agire un momento frenante τ di modulo costante e pari a 1.5 Nm e diretto lungo l'asse di rotazione. Determinare:

3. Il numero di giri compiuti dal disco prima di fermarsi;
4. Il lavoro compiuto dal momento frenante.

Risultati: ϖ_0 =_____ [_____] ; v_0=_____ [_____] ; N=_____ [_____];W=_____ [_____]

Esercizio 2 (Punti 12)

Due moli di gas perfetto monoatomico subiscono una trasformazione termodinamica reversibile dallo stato A (Va=1 l, Pa=10 bar) allo stato B corrispondente al volume Vb=2 l. Sapendo che la trasformazione è descritta da:

$$PV^2 = k$$

essendo k una costante reale e positiva, determinare:

1. La variazione di energia interna ΔU_{AB};
2. Il calore scambiato dal gas Q_{AB};
3. La variazione di entropia del gas ΔS_{AB};

Risultati: ΔU_{AB} =_____ [_____] ; Q_{AB} =_____ [_____] ; ΔS_{AB} =_____ [_____]

Esercizio 3 (Punti 8)

Il moto di un sistema di punti materiali avviene in maniera tale che il centro di massa rimanga fermo. Rispondere alle seguenti domande, giustificando la risposta:

1. Quanto vale la quantità di moto del sistema di punti?
2. L'energia cinetica del sistema di punti è, in generale, nulla?
3. Fare un esempio di moto di questo tipo.

CORSO DI FISICA GENERALE 1

(Prof. Gianluca QUARTA)

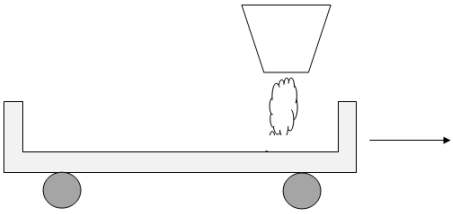
ESAME SCRITTO 17 Marzo 2017

NOME E COGNOME:_____**Matricola:**_____

Esercizio 1 (Punti 10)

Un vagone ferroviario di massa M, si muove con velocità costante V_0. All'istante t=0 una tramoggia inizia a scaricare sul vagone sabbia ad una velocità costante pari λ (Kg/s). Si determini:

1. Se il moto del vagone per t>0 avviene ancora a velocità costante, giustificando la risposta.
2. Si determini l'andamento nel tempo della velocità del vagone.
3. Si determini l'andamento nel tempo dell'accelerazione del vagone.

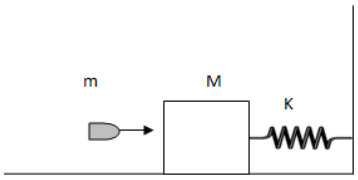


Risultati: v(t) =_____ [_____] ; a(t)=_____ [_____]

Esercizio 2 (Punti 12)

Un blocco di massa M=300 g è collegato tramite una molla di costante elastica K=120 N/m ad una parete verticale. Il blocco può muoversi sul piano orizzontale con un coefficiente di attrito dinamico μd=0.3. In un certo istante di tempo il blocco viene colpito, in modo completamente anelastico, da un proiettile di massa m=100 g che si muove con velocità v_0=50 m/s. La molla è inizialmente in posizione di riposo. Determinare:

1. La velocità del blocchetto subito dopo l'urto con il proiettile.
2. La massima compressione della molla.
3. Il lavoro compiuto dalla forza di attrito tra l'istante dell'urto e il punto di massima compressione.



Risultati: v =_____ [_____] ; Δx=_____ [_____] ; W=_____ [_____]

Esercizio 3 (Punti 8)

Si rappresenti sul piano di Clapeyron il ciclo di Stirling per un gas perfetto e se ne calcoli il rendimento in funzione delle temperature massima e minima raggiunte nel ciclo.

CORSO DI FISICA GENERALE 1

(Prof. Gianluca QUARTA)

ESAME SCRITTO DEL 07 Giugno 2017

NOME E COGNOME:_____**Matricola:**_____

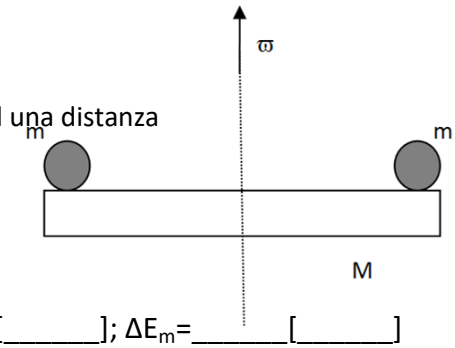
Esercizio 1 (Punti 12)

Un sistema è costituito da un disco rigido ed omogeneo di massa M=2 Kg e raggio R=0.5 m che può ruotare intorno ad un asse verticale passante per il suo centro e da due punti materiali, vincolati alla superficie del disco, ciascuno di massa m=0.2 Kg inizialmente disposti lungo il bordo del disco. Ad un certo istante di tempo al sistema (inizialmente in quiete) viene applicato un momento τ= 5 Nm diretto lungo l'asse di rotazione per un tempo t= 5 s. Si calcoli:

1. Il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse di rotazione;
2. La velocità angolare del sistema al tempo t=5 s;

Ad un certo istante di tempo t_2 i due blocchetti vengono poi spostati ad una distanza d=0.2 m dall'asse di rotazione. Si calcoli

3. La velocità angolare del sistema.
4. La variazione di energia meccanica tra il tempo t=5 s ed t=7 s.



Risultati: I=_____ [_____] ; ϖ_1=_____[_____] ϖ_2=_____[_____]; ΔE_m=_____[_____]

Esercizio 2 (Punti 10)

Data la forza: $\vec{F} = k(2x^2\hat{x} + 2z^2\hat{y} + 4yz\hat{z})$ con k numero reale positivo:

1. Determinare le dimensioni di k;
2. Determinare per quali valori di k la forza è conservativa;
3. Il lavoro compiuto dalla forza (in funzione di k) per spostare un punto materiale dall'origine al punto di coordinate P (3,2,1).

Risultati: [k]=_____ ; k=_____[_____] W=_____[_____]

Esercizio 3 (Punti 8)

Si enunci e si dimostri il teorema di Carnot.

CORSO DI FISICA GENERALE 1

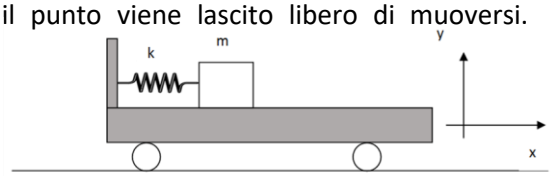
(Prof. Gianluca QUARTA)

ESAME SCRITTO DEL 21 Giugno 2017

NOME E COGNOME:_____**Matricola:**_____

Esercizio 1 (Punti 12)

Un punto materiale di massa m si può muovere sulla superficie liscia di un carrello. Il punto materiale è connesso ad una molla di sostante elastica k come indicato in figura. Inizialmente il carrello si muove di moto rettilineo uniforme con velocità v_0 diretta lungo l'asse x, e il punto è fisso rispetto alla superficie del carrello e tende la molla di una quantità x_0. Al tempo t_0 il punto viene lascito libero di muoversi. Determinare:



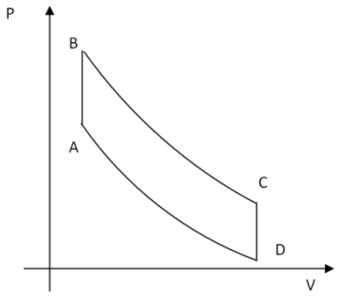
1. L'equazione del moto del punto materiale nel sistema di riferimento solidale con il carrello
2. La velocità del punto materiale nel sistema di riferimento fisso (del laboratorio)

Al tempo $t_1=2\pi\sqrt{m/k}$ il carrello inizia a muoversi con accelerazione costante a_0 diretta nel verso positivo dell'asse x. Determinare:

3. L'equazione del moto del punto materiale per $t>t_1$ nel sistema solidale al carrello
4. La legge oraria del moto nel sistema solidale al carrello per $t>t_1$

Esercizio 2 (Punti 10)

Il ciclo termodinamico rappresentato in figura consiste di due trasformazioni adiabatiche reversibili e due isocore pure reversibili . Sapendo che il volume in D è pari al doppio del volume in A. si ricavi il rendimento del ciclo. Il gas è un gas perfetto monoatomico.



Risultati: [η]=_____

Esercizio 3 (Punti 8)

Si enunci e si dimostri il teorema dell'energia cinetica per il punto materiale.

CORSO DI FISICA GENERALE 1

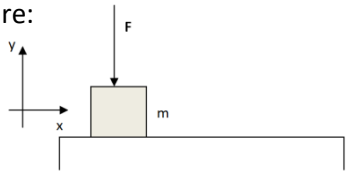
(Prof. Gianluca QUARTA)

ESAME SCRITTO DEL 21 Luglio 2017

NOME E COGNOME:_____**Matricola:**_____

Esercizio 1 (Punti 12)

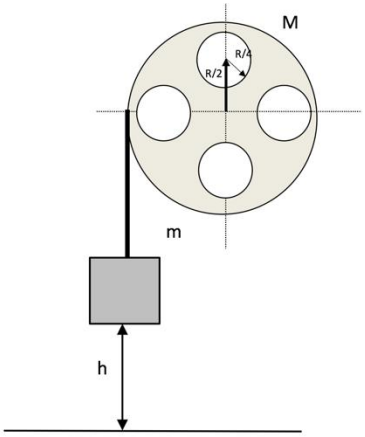
Un punto materiale di massa m=2 Kg si muove su un piano orizzontale. Al tempo t=0 la sua velocità è pari a v_0= 10 m/s diretta nel verso positivo dell'asse x, come in figura. Al tempo t=0 viene applicata al punto materiale una forza verticale **F** diretta nel verso negativo dell'asse y. Determinare:



1. Nel caso in cui il piano sia liscio la velocità al tempo t_1=10 s;
2. Nel caso il cui il piano sia scabro con μ_d=0.3
   dopo quanto tempo si ferma il corpo se la forza F ha modulo pari a 5 N.
3. Nel caso in cui il piano sia scabro con μ_d=0.3 dopo quanto tempo si ferma il corpo se il modulo della forza F varia nel tempo con la legge F= k t, essendo t il tempo e k=50 N/s.
4. Si calcoli la potenza sviluppata dalla forza di attrito in funzione del tempo.

Esercizio 2 (Punti 10)

Una puleggia di massa M=2 Kg ha la struttura indicata in figura ed è formata da un disco di raggio R=40 cm e da quattro aree vuote di forma circolare ciascuna di raggio r=R/4 il cui centro dista d=R/2 dal centro del disco. La puleggia può ruotare intorno ad un asse orizzontale fisso passante per il suo centro. Al disco è avvolta una fune (inestensibile e di massa trascurabile) alla cui estremità è appesa una massa m=200 g. Al tempo t=0 il corpo (inizialmente fermo) viene lasciato libero di muoversi. Si determini:



1. Il momento d'inerzia della puleggia rispetto all'asse di rotazione;
2. La tensione della fune;
3. La velocità angolare della puleggia in funzione del tempo;
4. Si calcoli la velocità angolare della ruota quando il corpo è sceso di una quota h.

Esercizio 3 (Punti 8)

Si ricavi l'espressione della variazione di entropia per un gas ideale.

CORSO DI FISICA GENERALE 1

(Prof. Gianluca QUARTA)

ESAME SCRITTO DEL 19 Settembre 2017

NOME E COGNOME:_____**Matricola:**_____

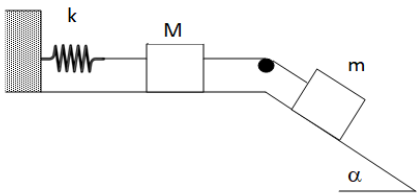
Esercizio 1 (Punti 12)

Due punti materiali di massa m=0.4 Kg e M=0.6 Kg sono collegati tra loro come in figura. La molla ha costante elastica k= 80 N/m e il piano è inclinato di un angolo α= 30°. Nell'ipotesi che la fune che collega i due punti materiali sia inestensibile e di massa trascurabile, che tutti i piani siano lisci e che la puleggia abbia massa e dimensioni trascurabili, determinare:

1. Di quanto è deformata la molla in condizioni di equilibrio;

Se il corpo di massa M viene spostato dalla posizione di equilibrio di x_0 e quindi lasciato libero di muoversi, da fermo, si determini:

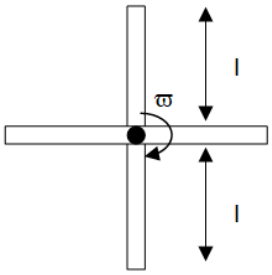
2. L'equazione del moto dei due corpi;
3. Il periodo del moto;
4. La legge oraria del moto.



Esercizio 2 (Punti 10)

Una girandola, che può essere schematizzata come formata da due aste uguali di lunghezza 2l (l=10 cm) e massa (ciascuna) M= 200 g, unite nel centro come in figura, è libera di ruotare intorno ad un asse orizzontale passante per il suo centro ed è inizialmente ferma. Al tempo t=0 gli viene applicato un momento costante M_0=0.1 Nm diretto lungo l'asse di rotazione fino all'istante t_1= 5 s. Per $t>t_1$ sulla girandola inizia ad agire esclusivamente un momento frenante (diretto sempre lungo l'asse di rotazione) il cui modulo è pari a $M=-k\varpi$, essendo k=5 Nms. Si determini:

1. Il momento d'inerzia della girandola rispetto all'asse di rotazione;
2. La velocità angolare della girandola al tempo t= 5s;
3. La legge oraria del moto per $t>t_1$
4. Il numero di giri effettuati dalla girandola prima di fermarsi.



Esercizio 3 (Punti 8)

Si ricavi la relazione che lega la variazione di energia interna di un gas perfetto dalla temperatura.

CORSO DI FISICA GENERALE 1

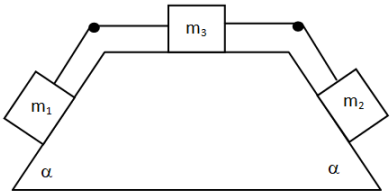
(Prof. Gianluca QUARTA)

ESAME SCRITTO DEL 18 Ottobre 2017

NOME E COGNOME:_____**Matricola:**_____

Esercizio 1 (Punti 12)

Un corpo di massa m_3=1 Kg è posto su un piano orizzontale ed è connesso a due altri corpi di massa m_1=2 Kg ed m_2=3 Kg mediante della funi inestensibili e di massa trascurabile attraverso delle carrucole lisce e di massa trascurabile così come indicato in figura. L'angolo α è pari a 45°.



Si determini:

1. Supponendo tutti i piani lisci l'accelerazione del corpo di massa m_3.
2. In queste condizioni (piano liscio) quale relazione deve sussistere tra le masse m_1 ed m_2 perché si abbia equilibrio;
3. Il valore del coefficiente di attrito statico minimo che ci deve essere tra il piano e ciascuno dei tre blocchi perché si abbia equilibrio per i valori indicati delle tre masse m_1, m_2 ed m_3.

Esercizio 2 (Punti 10)

Un disco omogeneo di massa M=0.5 Kg e raggio R=0.5 m, ruota intorno ad un asse verticale passante per il suo centro in maniera tale che risulti:

$$\theta(t) = \frac{3t}{t+1} \quad \text{(rad)}$$

Determinare:

1. L'andamento della velocità angolare $\varpi(t)$ in funzione del tempo;
2. L'accelerazione angolare;
3. Il momento agente sul disco;
4. Il lavoro compiuto dal momento tra l'instante iniziale e l'istante t=5 s.

Esercizio 3 (Punti 8)

Si ricavi la relazione che lega la temperatura e il volume di un gas perfetto nel corso di una trasformazione adiabatica reversibile.

CORSO DI FISICA GENERALE 1

(Prof. Gianluca QUARTA)

ESAME SCRITTO 19 Gennaio 2018

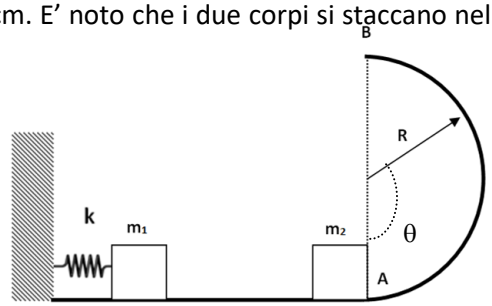
NOME E COGNOME:_____**Matricola:**_____

Esercizio 1 (Punti 10)

Un punto materiale di massa m_1=100 g comprime di una quantità Δx=15 cm una molla di costante elastica k=200 N/m. Il punto viene quindi lasciato libero di muoversi su un piano orizzontale liscio finché non urta, in modo completamente anelastico, un corpo di mass m_2, inizialmente fermo. Dopo l'urto i due corpi procedono, attaccati, su una guida circolare liscia di raggio R= 20 cm. E' noto che i due corpi si staccano nel punto B indicato in figura.

Si determini:

1. La velocità con cui il corpo m_1 colpisce il corpo di massa m_2
2. La velocità dei due corpi in B
3. La massa del corpo m_2
4. L'accelerazione centripeta lungo la guida circolare in funzione dell'angolo θ.

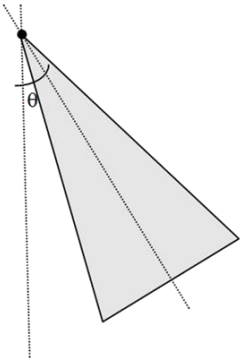


Risultati: v_A=_____ [_____] ; m_2=_____ [_____]; a_c=_____ [_____] ; v_B=_____ [_____]

Esercizio 2 (Punti 12)

Un triangolo isoscele omogeneo di massa M= 1 Kg, altezza h= 0.4 m e angolo alla base pari a $\pi/6$ è appeso ad una parete tramite un chiodo passante per il suo vertice (come in Figura). Ad un certo istante di tempo il corpo viene spostato dalla posizione verticale e quindi lasciato libero di muoversi. Si determini:

1. La posizione del centro di massa del triangolo
2. Il momento d'inerzia del triangolo rispetto all'asse passante per il suo vertice ed ortogonale alla superficie del triangolo
3. L'equazione differenziale del moto
4. Il periodo nell'ipotesi delle piccole oscillazioni.



Risultati: Y_{cm} =_____ [_____] ; I=_____ [_____] ; T=_____ [_____]

Esercizio 3 (Punti 8)

Si enunci e dimostri il teorema di Huygens-Steiner sul momento d'inerzia.

CORSO DI FISICA GENERALE 1

(Prof. Gianluca QUARTA)

ESAME SCRITTO 07 Febbraio 2018

NOME E COGNOME:_____**Matricola:**_____

Esercizio 1 (Punti 10)

Un punto materiale di massa m=2 Kg si muove su un piano con la seguente legge oraria:

$$\vec{r}(t) = (3\alpha t + 2\beta)\hat{x} + (2\beta t^2 - \alpha)\hat{y}$$

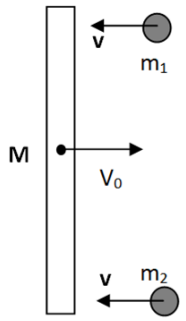
Essendo t il tempo e α e β costanti reali. Sapendo che al tempo t=1 s il punto si trova nel punto P(8,0) si determini:

1. Il valore delle due costanti α e β
2. L'angolo formato con l'orizzontale dalla traiettoria del punto quando esso si trova in P(8,0)
3. Il lavoro compiuto dalla forza agente sul punto tra il tempo t=1 s e t=10 s
4. Si verifichi il teorema dell'energia cinetica tra i due istanti di tempo t=1 s e t=10 s.

Esercizio 2 (Punti 12)

Una sbarretta omogenea di massa M=300g e lunghezza l=20 cm si muove, su un piano liscio, di moto puramente traslatorio con velocità costante V_0=2 m/s. Ad un certo istante di tempo la sbarretta viene colpita da due punti materiali di massa m_1=100 g e m_2=50 g che si muovono con la stessa velocità v=2 m/s come indicato in figura. I punti rimangono quindi conficcati nella sbarretta. Si determini:

1. La posizione del centro di massa del sistema dopo l'urto;
2. La velocità del centro di massa del sistema dopo l'urto;
3. La velocità angolare del sistema subito dopo l'urto (specificandone il verso).
4. Quanto dovrebbe valere la velocità v perché il centro di massa del sistema sbarretta+punti sia fermo dopo l'urto.



Esercizio 3 (Punti 8)

Si calcolo il momento d'inerzia di una sbarretta omogenea di massa m e lunghezza l rispetto ad un asse passante per uno dei suoi estremi.

CORSO DI FISICA GENERALE 1

(Prof. Gianluca QUARTA)

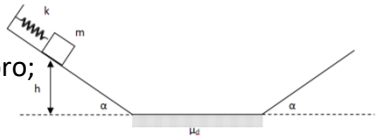
ESAME SCRITTO 26 Febbraio 2018

NOME E COGNOME:_____**Matricola:**_____

Esercizio 1 (Punti 10)

Un punto materiale di massa m=0.5 Kg comprime di x=10 cm una molla costante elastica K=100 N/m. Inizialmente il punto si trova, fermo, ad una quota h=0.6 m lungo un piano liscio, inclinato di α rispetto all'orizzontale. Dopo aver percorso il piano inclinato, il punto percorre un tratto orizzontale di lunghezza d=0.3 m, scabro con coefficiente di attrito dinamico μ_d=0.3. Successivamente il punto risale un altro piano, liscio ed inclinato sempre di un angolo α fino ad una quota z, fermandosi. Si determini:

1. La velocità del punto alla base del primo piano inclinato;
2. Il lavoro compiuto dalla forza di attrito lungo il piano orizzontale scabro;
3. La velocità del punto alla fine del piano orizzontale;
4. La quota z raggiunta dal punto materiale sul secondo piano inclinato.



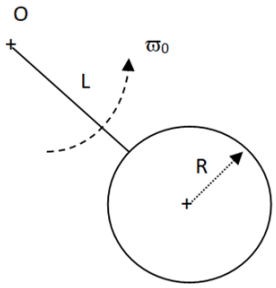
Esercizio 2 (Punti 12)

Un disco omogeneo di raggio R=0.6 m e massa M= 2 Kg è disposto su un piano orizzontale liscio ed è legato come in figura ad un filo di lunghezza L=2R, inestensibile e di massa trascurabile. Il filo è fissato ad un punto O fisso. Il sistema disco+filo ruota con velocità ϖ_0= 2 π rad/s in senso antiorario intorno ad un asse passante per O e ortogonale al piano. Tutti gli attriti sono nulli.

Si determini:

1. Il momento d'inerzia del disco rispetto al punto O;
2. La tensione del filo;
3. L'energia cinetica del disco;
4. Il momento angolare **L** del disco (in modulo, direzione e verso).

Si stabilisca se (e se si perché) il momento angolare si conserva.



Esercizio 3 (Punti 8)

Si dimostri che la forza peso è una forza conservativa e si ricavi l'espressione dell'energia potenziale ad essa associata.

CORSO DI FISICA GENERALE 1

(Prof. Gianluca QUARTA)

ESAME SCRITTO 15 Marzo 2018

NOME E COGNOME:_____**Matricola:**_____

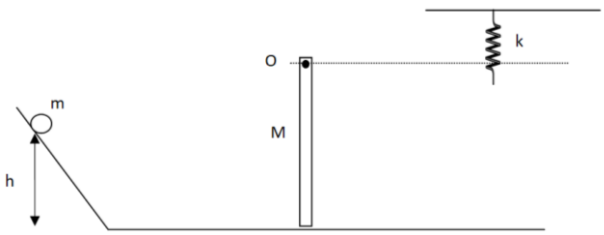
Esercizio 1 (Punti 10)

Un punto materiale di massa m=1 Kg si muove, inizialmente, di moto rettilineo uniforme lungo l'asse x con velocità $\vec{v} = v_0\hat{x}$ essendo v_0= 10 m/s. Al tempo t=0 sul corpo inizia ad agire una forza $\vec{F} = kt\hat{x}$ essendo k una costante reale pari a 2 N/s e t il tempo. Si determini:

1. La quantità di moto del corpo al tempo t= 0 s
2. La quantità di moto del punto materiale al tempo t= 5 s
3. Il lavoro compiuto dalla forza tra il tempo t=0 e t= 5s
4. Si verifichi il teorema dell'energia cinetica tra 0 e 5 s.

Esercizio 2 (Punti 12)

Un punto materiale di massa m= 0.5 Kg si trova su un piano inclinato ad una quota h=2 m come in figura. Il corpo, inizialmente fermo, viene lasciato libero di muoversi ed urta una sbarretta di massa M= 1 Kg e lunghezza l=0.6 m che può ruotare intorno ad un suo estremo O. La sbarretta è inizialmente in quiete in posizione verticale. Nell'urto il punto materiale rimane conficcato nella sbarretta.



Dopo l'urto il sistema sbarretta+punto materiale ruota intorno ad O bloccandosi in posizione orizzontale dopo aver compresso una molla di costante elastica k= 50 N/m inizialmente in posizione di riposo. Si trascurino tutti gli attriti.

Si determini:

1. La velocità con cui il punto materiale urta la sbarretta;
2. La velocità angolare del sistema sbarretta+punto materiale subito dopo l'urto
3. La velocità del centro di massa dopo l'urto;
4. La compressione della molla.

Esercizio 3 (Punti 8)

Si calcoli il momento d'inerzia di un anello omogeneo di raggio R e massa M.

CORSO DI FISICA GENERALE 1

(Prof. Gianluca QUARTA)

SOLUZIONE DELLE PROVE D'ESAME

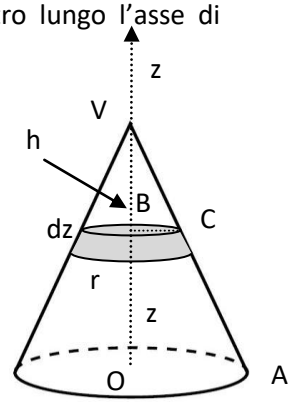
CORSO DI FISICA GENERALE 1

(Prof. Gianluca QUARTA)

SOLUZIONI APPELLO DEL 09/06/2016

ESERCIZIO 1

Il momento d'inerzia I_z si può calcolare considerando dei dischi elementari con centro lungo l'asse di rotazione come indicato in Figura. Risulta quindi:



$$I_z = \int_{Corpo} dI_z = \int_M \frac{r^2}{2} dm = \int_V \frac{r^2}{2} \rho dV = \int_0^h \frac{r^2}{2} \rho \pi r^2 dz = \frac{\rho\pi}{2}\int_0^h r^4 dz$$

Dalla similitudine di VOA e VBC deriva che: $r = \frac{R}{h}(h-z)$

Quindi:

$$I_z = \frac{\rho\pi}{2h^4} R^4 \int_0^h (h-z)^4 dz = \frac{3MR^2}{10} = 0.75\,Kg\,m^2 \quad \text{essendo} \quad \rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{\pi R^2 h}$$

$$\vec{M}^E = 2\vec{r} \wedge \vec{F} = 2rF\hat{z} \qquad \alpha = \frac{M_z^E}{I_z} = \frac{20F}{3MR} \text{ (costante)} \qquad \omega_f = \varpi_0 + \alpha t = \alpha t = \frac{20F}{3MR} t = 66.67\, rad/s$$

Calcolo del lavoro:

$$\theta = \theta_0 + \varpi_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{10F}{3MR} t^2 = 166.67\, rad \qquad W = \int_0^\theta M_z^E d\theta = 2RF\theta = \frac{20F^2}{3M} t^2 = 1666.67\, J$$

$$W = \Delta E_k = \frac{1}{2} I_z \varpi_f^2 - \frac{1}{2} I_z \varpi_0^2 = \frac{1}{2} I_z \varpi_f^2 = \frac{20F^2}{3M} t^2 = 1666.67\, J \quad (CVD)$$

ESERCIZIO 2

$$W_{diss} = \Delta E_m = \frac{1}{2} m v_A^2 - \frac{1}{2} k x^2 = \int_0^A \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\mu m g l \qquad v_A^2 = \frac{kx^2}{m} - 2\mu g l$$

Lungo la guida circolare, la II legge di Newton proiettata lungo la direzione normale alla guida si scrive:

$$N = mg\cos\theta + \frac{mv^2}{R}$$

La condizione di distacco in B si scrive $N_B=0$ e $\theta=\pi$ da cui : $v_B^2 = gR$

Dalla conservazione dell'energia meccanica lungo la guida si ottiene:

$$E_{m,A} = E_{m,B} \rightarrow \frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} m v_B^2 + mg(2R) \rightarrow v_A^2 = v_B^2 + 4gR = 5gR \quad \text{ma} \quad v_A^2 = \frac{kx^2}{m} - 2\mu g l$$

Quindi:

$$5gR = \frac{kx^2}{m} - 2\mu g l \rightarrow x = \left[\frac{m}{k}(5gR + 2\mu g l)\right]^{1/2} = 0.268\, m$$

CORSO DI FISICA GENERALE 1

(Prof. Gianluca QUARTA)

SOLUZIONI APPELLO 24/06/2016

ESERCIZIO 1

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = t\,\hat{x} + 3t^2\hat{y} \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \rightarrow \begin{cases} v_x = v_{0x} + \int_0^t a_x dt \\ v_y = v_{0y} + \int_0^t a_y dt \end{cases} \qquad \vec{v} = \frac{t^2}{2}\hat{x} + t^3\hat{y}$$

$$W = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt = \int_0^2 (4t\,\hat{x} + 12t^2\hat{y})\cdot(\frac{t^2}{2}\hat{x} + t^3\hat{y})\,dt = \int_0^2 (2t^3 + 12t^5)dt = \left[\frac{t^4}{2} + 2t^6\right]_0^2 = 136\,J$$

$$W = \Delta E_K = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}m(\frac{t^4}{4} + t^6)\Big|_{t=2} = 136\,J \quad (CVD)$$

ESERCIZIO 2

Durante l'urto si conservano sia la quantità di moto che il momento angolare.

$$m_1\vec{v} + m_2\vec{v} = (m_1 + m_2 + M)\vec{v}_{cm} \rightarrow \vec{v}_{cm} = \frac{(m_1 + m_2)}{(m_1 + m_2 + M)}\vec{v} = 4.12\,\hat{v}\frac{m}{s}$$

Determiniamo la posizione del CM del sistema (avendo assunto come origine il centro del disco):

$$y_{cm} = \frac{m_1R - m_2R}{m_1 + m_2 + M} = \frac{(m_1 - m_2)R}{m_1 + m_2 + M} = d = 0.012\,m$$

Scrivendo la legge di conservazione del momento angolare <u>rispetto al centro di massa del sistema</u> si ha:

$$L_0 = m_1v(R-d) - m_2v(R+d) = L' = (I_1 + I_2 + I_3)\varpi = \left[m_1(R-d)^2 + m_2(R+d)^2 + M(\frac{R^2}{2} + d^2)\right]\varpi$$

Da cui si ottiene:

$$\varpi = \frac{(m_1 - m_2)R - (m_1 + m_2)d}{m_1(R-d)^2 + m_2(R+d)^2 + M(\frac{R^2}{2} + d^2)}v = 2.46\frac{rad}{s} > 0 \rightarrow La\ rotazione\ avviene\ in\ senso\ orario$$

In generale: $\vec{v}_1 = \vec{v}_{cm} + \vec{\varpi}\wedge\vec{r}$ che per una rotazione pari a $\pi/2$ diventa:

$$\vec{v}_1 = v_{cm}\hat{x} - \varpi(R-d)\hat{y} \rightarrow |v_1| = \sqrt{v_{cm}^2 + \varpi^2(R-d)^2} = 4.15\frac{m}{s}$$

Se m_1=m_2 si ottiene: ϖ=0 e il moto del disco dopo l'urto è puramente traslatorio.

CORSO DI FISICA GENERALE 1

(Prof. Gianluca QUARTA)

SOLUZIONI APPELLO 19/07/2016

ESERCIZIO 1

La legge di Newton lungo il piano inclinato fornisce:

$$\begin{cases} -F_a + mgsen\theta = ma \\ N = mg\cos\theta \end{cases} \qquad essendo F_a = \mu N \; si\, ha: F_a = \mu mg\cos\theta$$

Da cui si ottiene:

$a = g(sen\theta - \mu\cos\theta)$ Il moto è uniformemente accelerato e quindi:

$$l = \frac{1}{2}at^2 \rightarrow t = \left[\frac{2l}{a}\right]^{1/2} = \sqrt{\frac{2h}{g\, sen\theta(sen\theta - \mu\cos\theta)}} = 0.92s$$

$$V_A = at = \sqrt{\frac{2gh(sen\theta - \mu\cos\theta)}{sen\theta}} = 2.17m/s$$

Allo stesso risultato si poteva anche pervenire applicando:

$$W_{diss} = \Delta E_m = \frac{1}{2}mv_A^2 - mgh = -F_a l = -\mu mg\cos\theta\frac{h}{sen\theta}$$

Da qui si ottiene facilmente la velocità del corpo prima dell'urto con la sbarretta:

$$V_A = \sqrt{2gh(\frac{sen\theta - \mu\cos\theta}{sen\theta})}$$

Dalla conservazione del momento angolare si ha:

$$mv_A(l-d) = I\varpi_0 \rightarrow \varpi_0 = \frac{mv_A(l-d)}{\left[\frac{Ml^2}{12} + M(\frac{l}{2}-d)^2\right] + m(l-d)^2} = 5.56\,\frac{rad}{s}$$

Poiché il punto rimane conficcato nell'asta si ha: $V_A^{'} = \varpi(l-d) = 1.39\,\frac{m}{s}$

Dopo l'urto sul sistema agiscono solo forze conservative. E' quindi possibile applicare il Teorema di conservazione dell'energia meccanica.

Metodo 1

$E_{m,A} = E_{m,B}$ essendo B la posizione corrispondente alla massima quota.

CORSO DI FISICA GENERALE 1

(Prof. Gianluca QUARTA)

$$E_{m,A} = \frac{1}{2} I_d \varpi_0^2 + \frac{1}{2} m v_A'^2 + Mg\frac{l}{2} = \frac{1}{2}[I_d + m(l-d)^2]\varpi_0^2 + Mg\frac{l}{2}$$

$$E_{m,B} = E_{p,M} + E_{p,m} = mg(l-d)(1-\cos\theta) + Mg[\frac{l}{2} + (\frac{l}{2} - d)(1-\cos\theta)]$$

Imponendo: $E_{m,A} = E_{m,B}$

Si ottiene: $1-\cos\theta = \dfrac{\frac{1}{2}[I_d + m(l-d)^2]\varpi_0^2}{[mg(l-d) + Mg(\frac{l}{2} - d)]}$ da cui si ha:

$$h = (l-d)(1-\cos\theta) = (l-d)\frac{\frac{1}{2}[I_d + m(l-d)^2]\varpi_0^2}{[mg(l-d) + Mg(\frac{l}{2} - d)} = 8.54\,cm$$

Essendo: $I_d = \dfrac{Ml^2}{12} + M(\dfrac{l}{2} - d)^2$

<u>Metodo 2 (considerando il sistema dei due corpi come un unico corpo rigido)</u>

In questo caso è possibile calcolare la posizione del centro di massa del sistema come (avendo scelto l'origine nel punto di intersezione tra l'asta e l'asse di rotazione):

$y_{cm} = \dfrac{M(\frac{l}{2} - d) + m(l-d)}{m+M}$ la cui variazione di quota è data da:

$$\Delta h_{cm} = \frac{M(\frac{l}{2} - d) + m(l-d)}{m+M}(1-\cos\theta)$$

Quindi la conservazione dell'energia si scrive:

$\frac{1}{2}[I_d + m(l-d)^2]\varpi_0^2 = (m+M)d\Delta h_{cm} = [M(\frac{l}{2} - d) + m(l-d)]g(1-\cos\theta)$ da cui si ricava lo stesso risultato trovato in precedenza.

<u>ESERCIZIO 2</u>

Il calore Q_1 assorbito dal corpo 1 e il calore Q_2 ceduto dal corpo 2 possono essere scritti come:

$$Q_1 = \int_{T1}^{Te} M_1 c(T)dT = \int_{T1}^{Te} M_1 \alpha T^2 dT = M_1\alpha\int_{T1}^{Te} T^2 dT = \frac{M_1\alpha}{3}(T_e^3 - T_1^3) > 0 \text{ e}$$

CORSO DI FISICA GENERALE 1

(Prof. Gianluca QUARTA)

$$Q_2 = \int_{T2}^{Te} M_2 c(T)dT = \int_{T2}^{Te} M_2 \alpha T^2 dT = M_2 \alpha \int_{T2}^{Te} T^2 dT = \frac{M_2 \alpha}{3}(T_e^3 - T_2^3) < 0$$

Imponendo che (sistema isolato): $Q_1 + Q_2 = 0$ si ha:

$\frac{M_1 \alpha}{3}(T_e^3 - T_1^3) + \frac{M_2 \alpha}{3}(T_e^3 - T_2^3) = 0$ da cui si ricava:

$$T_e = \sqrt[3]{\frac{M_1 T_1^3 + M_2 T_2^3}{M_1 + M_2}} = 91.98\ K$$

$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$ essendo

$$\Delta S_1 = \int_{T1}^{Te} \frac{dQ}{T} = \int_{T1}^{Te} \frac{M_1 c(T)dT}{T} = M_1 \alpha \int_{T1}^{Te} \frac{T^2 dT}{T} = M_1 \alpha \int_{T1}^{Te} T dT = \frac{M_1 \alpha}{2}(T_e^2 - T_1^2)$$

$$\Delta S_2 = \int_{T2}^{Te} \frac{dQ}{T} = \int_{T2}^{Te} \frac{M_2 c(T)dT}{T} = M_2 \alpha \int_{T2}^{Te} \frac{T^2 dT}{T} = M_2 \alpha \int_{T2}^{Te} T dT = \frac{M_2 \alpha}{2}(T_e^2 - T_2^2)$$

$$\Delta S = \frac{M_1 \alpha}{2}(T_e^2 - T_1^2) + \frac{M_2 \alpha}{2}(T_e^2 - T_2^2) = \frac{\alpha}{2}[(M_1 + M_2)T_e^2 - M_1 T_1^2 - M_2 T_2^2] = 0.21 \frac{J}{K}$$

Ovviamente è $\Delta S > 0$ essendo il processo irreversibile.

SOLUZIONI APPELLO 07/09/2016

ESERCIZIO 1

La condizione di equilibrio si scrive: $\overset{\upsilon}{M}{}_o^E = 0$ quindi:

$$-mg\frac{l}{2}\cos\theta_0 + k_1 \Delta y_1 \frac{l}{2}\cos\theta_0 + k_2 \Delta y_2 l \cos\theta_0 = 0 \ \ ma \ \ essendo \begin{cases} \Delta y_1 = \frac{l}{2} sen\theta_0 \\ \Delta y_2 = l\, sen\theta_0 \end{cases} \ si\ ottiene:$$

$$\theta_0 = arcsen\left(\frac{2mg}{l} \cdot \frac{1}{k_1 + 4k_2}\right) = 3.12°$$

L'equazione del moto può essere ottenuta in due modi:

CORSO DI FISICA GENERALE 1

(Prof. Gianluca QUARTA)

METODO 1

$$\vec{M}_o^E = I_o\vec{\alpha} \rightarrow I_o\ddot{\theta} = mg\frac{l}{2}\cos\theta - k_1\Delta y_1\frac{l}{2}\cos\theta - k_2\Delta y_2 l\cos\theta =$$

$$= mg\frac{l}{2}\cos\theta - k_1\frac{l^2}{4}sen\theta\cos\theta - k_2 l^2 sen\theta\cos\theta \rightarrow \ddot{\theta} + \frac{l^2}{I_0}(\frac{k_1}{8}+\frac{k_2}{2})\sin(2\theta) = mg\frac{l}{2I_o}\cos\theta$$

METODO 2: Sul sistema agiscono solo forze conservative (e la reazione del vincolo in O non compie lavoro) quindi si conserva l'energia meccanica:

$$E_m = -mg\frac{l}{2}sen\theta + \frac{1}{2}k_1(\frac{l}{2}sen\theta)^2 + \frac{1}{2}k_2(lsen\theta)^2 + \frac{1}{2}I_o\varpi^2$$

E deve essere $\frac{dE_m}{dt} = 0$ da cui si ottiene:

$$-mg\frac{l}{2}\cos\theta\dot{\theta} + \frac{k_1 l^2}{8}2sen\theta\cos\theta\dot{\theta} + \frac{k_2 l^2}{2}2sen\theta\cos\theta\dot{\theta} + I_o\dot{\theta}\ddot{\theta} = 0$$

Da cui (esclusa la soluzione $\dot{\theta}$=0) si riottiene: $\ddot{\theta} + \frac{l^2}{I_0}(\frac{k_1}{8}+\frac{k_2}{2})\sin(2\theta) = mg\frac{l}{2I_o}\cos\theta$ che è l'equazione differenziale del moto.

Nell'ipotesi delle piccole oscillazioni è: $\sin\theta \cong \theta$ *e* $\cos\theta \cong 1$ quindi l'equazione del moto diventa:

$$\ddot{\theta} + \frac{l^2}{I_0}(\frac{k_1}{4}+k_2)\theta = mg\frac{l}{2I_o}$$ e quindi:

$$\varpi = \sqrt{\frac{l^2}{I_o}(\frac{k_1}{4}+k_2)} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{l^2}{I_o}(\frac{k_1}{4}+k_2)}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{3}{m}(\frac{k_1}{4}+k_2)}} = 0.296\ s$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale è:

$$\theta(t) = \theta_{omogenea}(t) + \theta_{particolare}(t) = \theta_0 sen(\varpi t + \varphi) + \frac{mg}{l}\left(\frac{1}{\frac{k_1}{2}+2k_2}\right)$$

CORSO DI FISICA GENERALE 1

(Prof. Gianluca QUARTA)

Quindi la legge oraria si ottiene imponendo le condizioni iniziali (problema di Cauchy):

$$\begin{cases}\theta(t=0)=0\\ \dot{\theta}(t=0)=0\end{cases} \text{ da cui si ottiene: } \theta(t)=\frac{mg}{l}\left(\frac{1}{\frac{k_1}{2}+2k_2}\right)(1-\cos\varpi t)$$

ESERCIZIO 2

Per il corpo 1 si ha: $\vec{a}_1=\frac{\vec{F}}{m}=\frac{t}{m}\hat{x}+\frac{2t}{m}\hat{z}$ e

$$\vec{v}_1=\vec{v}_1^0+\int_0^t\vec{a}_1(t)dt=\frac{t^2}{2m}\hat{x}+\frac{t^2}{m}\hat{z} \quad \text{e } \vec{r}(t)=\vec{r}_1(0)+\int_0^t\vec{v}_1(t)dt=\left(\frac{t^3}{6m}-5\right)\hat{x}+\hat{y}+\left(\frac{t^3}{3m}-6\right)\hat{z}$$

Quindi la particella 1 al tempo t= 3 s si trova nel punto individuato dal vettore: $\vec{r}_1(t=3)=4\hat{x}+\hat{y}+12\hat{z}$ che quindi è il punto in cui avviene l'urto: P(4, 1, 12).

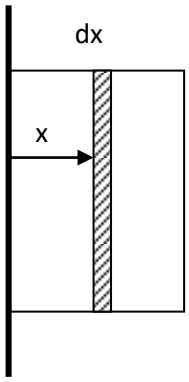
Nell'urto si conserva la quantità di moto e i due punti rimangono attaccati, quindi:

$$\vec{P}_o=m\vec{v}_1(t=3)+2m\vec{v}_2=(m+2m)\vec{v}_f$$

$$\vec{v}_f=\frac{\vec{v}_1(t=3)+2\vec{v}_2}{3}=\frac{7}{2}\hat{x}+4\hat{z}\rightarrow|\vec{v}_f|=5.31\,\frac{m}{s}$$

SOLUZIONI APPELLO 21/09/2016

ESERCIZIO 1



Calcolo del momento d'inerzia:

$$\mathrm{I}=\int_M x^2dm=\int_V x^2\rho dv=\rho\int_0^l x^2(2l)s\,dx=2ls\rho\int_0^l x^2dx=2ls\rho\frac{l^3}{3}=2ls\frac{Ml^3}{2l^2s}$$

Da cui segue: $I=\frac{Ml^2}{3}$ =0.0125 Kg/m^2

Dalla conservazione della componente lungo l'asse di rotazione del momento angolare si ha:

$mv_o\frac{l}{2}=mv\frac{l}{2}+I\varpi_0$ ma poiché il proiettile rimane conficcato nella banderuola si ha: $v=\varpi\frac{l}{2}$

CORSO DI FISICA GENERALE 1

(Prof. Gianluca QUARTA)

Da cui si ricava con semplici passaggi che: $\varpi = \dfrac{\dfrac{mv_0}{2}}{\dfrac{ml}{4}+\dfrac{Ml}{3}} = \dfrac{2v_0}{9l} = 44.4\,rad/s\ e\ \ v = \varpi\dfrac{l}{2}$ =5.6 m/s

L'impulso è dato dalla variazione della quantità di moto del sistema proiettile+porta:

$$\vec{J} = \Delta\vec{P} = \vec{P}_{fin} - \vec{P}_{in} = [M\vec{v}_{CM} + m\vec{v} - m\vec{v}_0] = [Mv_{CM} + mv - mv_0]\hat{v}_0 = [M\frac{\varpi l}{2} + m\frac{\varpi l}{2} - mv_0]\hat{v}_0 =$$

$$= -\frac{2mv_0}{9}\hat{v}_0 = -\frac{2m\vec{v}_0}{9}$$

$$\vec{J} = -1.1\hat{v}_0\ \ Ns$$

ESERCIZIO 2

$$\begin{cases} x(t) = A\cos\varpi t \\ y(t) = B\,sen(\varpi t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2(t) = A^2\cos^2\varpi t \\ y^2(t) = B^2\,sen^2(\varpi t) \end{cases} \rightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$ che è l'equazione di un'ellisse

$\vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = (-A\varpi\, sen\varpi t)\hat{x} + (B\varpi\cos\varpi t)\hat{y}$; $\vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = (-A\varpi^2\cos\varpi t)\hat{x} - (B\varpi^2\, sen\varpi t)\hat{y}$ e quindi:

$$\vec{F} = m\vec{a}(t) = (-mA\varpi^2\cos\varpi t)\hat{x} - (mB\varpi^2\, sen\varpi t)\hat{y}$$

Si noti che la forza può anche essere scritta come: $\vec{F} = -m\varpi^2(x\hat{x} + y\hat{y})$

Il lavoro della forza è dato da:

CORSO DI FISICA GENERALE 1

(Prof. Gianluca QUARTA)

Il lavoro della forza è dato da:

$$W=\int_P^Q \vec{F}\cdot d\vec{r}=-m\varpi^2\int_P^Q (x\hat{x}+y\hat{y})\cdot(dx\hat{x}+dy\hat{y})=-m\varpi^2[\int_A^{-A} xdx+\int_0^B ydy+\int_B^0 ydy]=-m\varpi^2[\frac{A^2}{2}-\frac{A^2}{2}+\frac{B^2}{2}-\frac{B^2}{2}]=0$$

Il teorema dell'energia cinetica si scrive:

$$W=\Delta E_k=\frac{1}{2}m(v_Q^2-v_P^2)$$

Osserviamo che:

$$\vec{v}(t)=\frac{d\vec{r}}{dt}=(-A\varpi\, sen\varpi t)\hat{x}+(B\varpi\cos\varpi t)\hat{y}=-\frac{A}{B}\varpi y\hat{x}+\frac{B}{A}\varpi x\hat{y}$$

Quindi: $\begin{cases}\vec{v}_P=\varpi B\hat{y}\\ \vec{v}_Q=-\varpi B\hat{y}\end{cases}$ e quindi

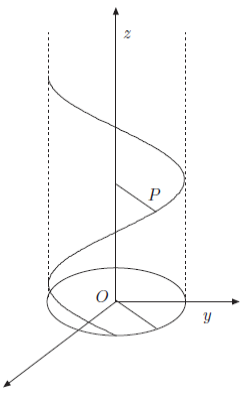
$$W=\Delta E_k=\frac{1}{2}m(v_Q^2-v_P^2)=\frac{1}{2}m(\varpi^2B^2-\varpi^2B^2)=0 \quad \text{CVD}$$

SOLUZIONI APPELLO 25/10/2016

ESERCIZIO 1

$|\vec{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}=\sqrt{A^2sen^2\varpi t+A^2\cos^2\omega t+4}=\sqrt{A^2+4}$ che è costante e quindi il moto è uniforme

$$\begin{cases}x(t)=x_0+\int_0^t Asen\varpi t\,dt=-\frac{A}{\varpi}\cos\varpi t\\ y(t)=y_0+\int_o^t A\cos\varpi t\,dt=\frac{A}{\varpi}sen\varpi t\\ z=z_0+2t\end{cases}$$ da cui si ricava che: $\begin{cases}x^2+y^2=\frac{A^2}{\varpi^2}\\ z(t)=2t\end{cases}$



La traiettoria è un'elica cilindrica la cui proiezione sul piano XY è una circonferenza di raggio A/ω.

$$\vec{F}=m\vec{a}=m\frac{d\vec{v}}{dt}=(mA\varpi\cos\varpi t)\hat{x}-(mA\varpi sen\varpi t)\hat{y}$$

CORSO DI FISICA GENERALE 1

(Prof. Gianluca QUARTA)

Si noti che la forza non ha componente lungo z essendo il moto rettilineo uniforme lungo quest'asse.

Per rispondere all'ultimo quesito basta osservare che l'energia cinetica è costante essendo costante il modulo della velocità. Quindi dal teorema dell'energia cinetica consegue che:

$W = \Delta E_k = 0$ CVD

ESERCIZIO 2

$$T_A = \frac{P_A V_A}{nR} = 13.5\ K$$

$$T_B = \frac{P_B V_B}{nR} = \frac{P_A V_B}{nR} = 27\ K$$

$$P_c = \frac{nRT_C}{V_C} = \frac{nRT_A}{V_B} = 0.75\,bar$$

$$\Delta U_{AB} = nC_V(T_B - T_A) = \frac{5}{2}Rn(T_B - T_A) = 561.2\,J$$

$$\Delta U_{BC} = nC_V(T_C - T_B) = -561.2\,J$$

$$\Delta U_{ac} = 0 \quad (Isoterma)$$

$$Q_{AB} = nC_V(T_B - T_A) + P_A(V_B - V_A) = 786.19\,J$$

$$Q_{BC} = \Delta U_{BC} = -561.2\,J$$

$$Q_{CA} = W_{CA} = \int_C^A PdV = nRT_A \ln\frac{V_A}{V_C} = -155.59\,J$$

$$\eta = \frac{W}{Q_A} = \frac{Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA}}{Q_{AB}} = 0.088$$

SOLUZIONI APPELLO 16/01/2017

ESERCIZIO 1

Per il punto materiale (in condizioni di equilibrio, a=0) si ha:

$$\begin{cases} -F_a + mgsen\theta - T = 0 \\ N = mg\cos\theta \end{cases} \qquad essendo F_a = \mu N\ si\ ha: T = mg\,(sen\theta - \mu_s\cos\theta)$$

CORSO DI FISICA GENERALE 1

(Prof. Gianluca QUARTA)

Sul disco si ha: $\begin{cases} -k\Delta x + T - Mgsen\theta = 0 \\ N = Mg\cos\theta \\ M_C^E = F_a R = 0 \rightarrow F_a = 0 \end{cases}$

Da qui si ottiene: $\Delta x = \dfrac{g\,sen\theta(m-M) - mg\mu_s\cos\theta}{k} = -1.5cm$

Essendo Δx<0 la molla è compressa.

Quando il sistema viene allontanato dalla condizione di equilibrio risulta:

Per il punto materiale:

$$\begin{cases} -F_a + mgsen\theta - T = ma \\ N = mg\cos\theta \end{cases} \qquad essendo F_a = \mu N\ si\ ha: T = mg\,(sen\theta - \mu_d\cos\theta) - ma$$

Sul disco invece risulta (scegliendo l'origine in corrispondenza della posizione di equilibrio della molla):

$$\begin{cases} -kx + T - Mgsen\theta - F_a = Ma \\ N = Mg\cos\theta \\ M_C^E = F_a R = I\alpha = I\dfrac{a}{R}\ essendo\ \alpha = \dfrac{a}{R}\,(moto\ di\ puro\ rotolamento) \end{cases}$$

<u>Da cui si ottiene:</u>

$-kx + T - Mgsen\theta - I\dfrac{a}{R^2} = Ma$ da cui si ricava che:

$$\ddot{x} + \frac{k}{\frac{3}{2}M + m}x = \frac{mg\,sen\theta - \mu_d mg\cos\theta - Mgsen\theta}{\frac{3}{2}M + m}$$

che è l'equazione di un moto armonico.

Da cui $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\frac{3}{2}M + m}{k}} = 0.51\,s$

La condizione limite quando viene tagliata la fune si ottiene imponendo m=0 per cui

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{3M}{2k}} = 0.44\,s$$

CORSO DI FISICA GENERALE 1

(Prof. Gianluca QUARTA)

ESERCIZIO 2

Dalla conservazione dell'energia meccanica lungo il piano inclinato si ha che:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 \rightarrow v_0 = \sqrt{2gh} = 3.4\frac{m}{s}$$

Analogamente per determinare la massima compressione della molla si può scrivere (essendo il piano liscio):

$$mgh = \frac{1}{2}k\Delta x^2 \rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{2mgh}{k}} = 0.3m$$

Per rispondere all'ultimo quesito occorre studiare le leggi orarie del moto nei diversi tratti,

Lungo il piano inclinato il modo è uniformemente accelerato con accelerazione:

$a = g\,sen\alpha$ e quindi $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}(gsen\alpha)t^2 \rightarrow \frac{h}{sen\alpha} = \frac{1}{2}gsen\alpha t^2 \rightarrow t_1 = \frac{1}{sen\alpha}\sqrt{\frac{2h}{g}} = 0.086s$

Lungo il tratto rettilineo il moto è rettilineo uniforme con velocità v_0 per cui $t_2 = \frac{d}{v_0} = \frac{d}{\sqrt{2gh}} = 0.23s$

Il moto quando il punto materiale è a contatto con la molla è un moto armonico semplice di periodo $t_3 = \frac{2\pi}{\varpi} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0.56\,s$

Quindi il tempo richiesto è: $t = 2t_1 + 2t_2 + t_3 = 1.1s$

SOLUZIONI ESAME 01/02/2017

ESERCIZIO 1

La II Legge di Newton si scrive, nel caso in esame, proiettata lungo la direzione del moto:

$-kv - mg = m\frac{dv}{dt}$ che è un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili per cui:

$$\int_0^t dt = -\int_{v0}^{v}\frac{dv}{\frac{k}{m}v + g} = -\frac{m}{k}\int_{v0}^{v}\frac{k}{m}\frac{dv}{\frac{k}{m}v + g} \rightarrow v(t) = \frac{m}{k}\left[(\frac{k}{m}v_0 + g)e^{-\frac{kt}{m}} - g\right]$$

Il tempo ts si ottiene imponendo che: v(t=ts)=0 ovvero

CORSO DI FISICA GENERALE 1

(Prof. Gianluca QUARTA)

$v(t_s) = 0 = \frac{m}{k}\left[(\frac{k}{m}v_0 + g)e^{-\frac{kt_s}{m}} - g\right]$ da cui si ricava che: $t = \frac{m}{k}\ln(\frac{k}{mg}v_0 + 1) = 0.81\,s$

Per calcolare la massima quota raggiunta si osservi che essa corrisponde alla distanza percorsa dal punto materiale nel tempo t=ts:

$h = \int_o^{ts} dy = \int_0^{ts} v dt = \int_0^{ts} \frac{m}{k}\left[(\frac{k}{m}v_0 + g)e^{-\frac{kt}{m}} - g\right]dt = \frac{m}{k}[(\frac{k}{m}v_0 + g)(-\frac{m}{k})(e^{-\frac{kts}{m}} - 1) - gt_s]$ da cui:

$$h = \left(\frac{m}{k}\right)\left(v_0 + \frac{mg}{k}\right)\left(1 - e^{-\frac{kt_S}{m}}\right) - \frac{mg}{k}t_S$$

Tuttavia dalla (1) si osserva che:

$\frac{m}{k}\left[(\frac{k}{m}v_0 + g)e^{-\frac{kt_s}{m}} - g\right] = 0 \rightarrow (\frac{k}{m}v_0 + g)e^{-\frac{kt_s}{m}} = g$ e quindi si ricava che:

$$h = \frac{m}{k}(v_o - gt_s) = 6.0\,m$$

Per calcolare il lavoro della forza di attrito viscoso osserviamo che:

$$W = \Delta E_m = E_{m,s} - E_{m,0} = mgh_s - \frac{1}{2}mv_0^2 = -141.2\,J$$

ESERCIZIO 2

Essendo i vincoli lisci è possibile scrivere, nel moto dell'asta, la conservazione dell'energia meccanica:

$\left(l - \frac{l}{2}\cos\theta\right)Mg = \frac{1}{2}I\varpi_0^2 + Mg\frac{l}{2}$ essendo $I = \frac{Ml^2}{3}$

Quindi di ottiene: $\varpi_0 = \sqrt{\frac{3g}{l}(1 - \cos\theta)} = 4.15\frac{rad}{s}$

Nell'urto si conserva sia il momento angolare rispetto al polo O (essendo nullo il momento rispetto a questo polo delle forze esterne agenti) che l'energia cinetica (essendo l'urto elastico). Quindi si può scrivere:

CORSO DI FISICA GENERALE 1

(Prof. Gianluca QUARTA)

$$\begin{cases} \frac{1}{2} I\varpi_0^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 \\ I\varpi_0 = m v_0 l \end{cases}$$ da cui si ricava in modo semplice che: $$\begin{cases} m = \frac{M}{3} = 0.13\,Kg \\ v_0 = \varpi_0 l = \sqrt{3gl(1-\cos\theta)} = 2.1\frac{m}{s} \end{cases}$$

Lungo il piano scabro è possibile scrivere che:

$$\Delta E_m = 0 - \frac{1}{2} m v_0^2 = W_{diss} = -\mu_d mgd \rightarrow d = \frac{3l(1-\cos\theta)}{2\mu_d} = 0.54\,m$$

SOLUZIONI ESAME 16/02/2017

ESERCIZIO 1

Si conserva la componente del momento angolare lungo l'asse di rotazione:

$$0 = (I_z + MR^2)\varpi_0 + m v_0 R \rightarrow \varpi_0 = -\frac{m v_0 R}{I_z + MR^2} = -\frac{2 m v_0}{3MR} = -0.11\frac{rad}{s}$$

$$v = \varpi_0 R = 0.22\frac{m}{s}$$

Si può scrivere che:

$$W_{diss} = -\tau\Delta\theta = \Delta E_m = -\frac{1}{2} I\varpi^2 = -\frac{1}{2}(\frac{1}{2}MR^2 + MR^2)\varpi_0^2 = -2.18\,J$$ da cui si ha:

$$\Delta\theta = \frac{3MR^2}{4\tau}\varpi_0^2$$ e quindi $$N = \frac{3MR^2}{8\pi\tau}\varpi_0^2 = 0.23$$

ESERCIZIO 2

Dall'equazione di stato dei gas perfetti si ha che:

$$T_A = \frac{P_A V_A}{nR} = 60.1\,K$$

Inoltre: $P_A V_A^2 = P_B V_B^2 \rightarrow P_B = P_A\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^2 = 2.5\,bar$ e quindi $T_B = \frac{P_B V_B}{nR} = 30\ K$

Per un gas perfetto: $\Delta U_{AB} = nC_v\Delta T = nc_v(T_B - T_A) = -748.3\,J$

Il lavoro scambiato nel ciclo si può scrivere come:

CORSO DI FISICA GENERALE 1

(Prof. Gianluca QUARTA)

$$W_{AB} = \int_A^A pdV = \int_A^B \frac{k}{V^2} dV = k\int_A^B \frac{dV}{V^2} = P_A V_A^2 \left[\frac{1}{V_A} - \frac{1}{V_B} \right] = 500\ J$$

Dal primo principio della termodinamica si ha quindi che: $Q_{AB} = \Delta U + W = -248.3\,J$

La variazione di entropia si calcola come:

$$\Delta S_{AB} = \int_A^B \left(\frac{\partial Q}{T} \right)_{rev} = \int_A^B \frac{nC_v}{T} dT + \int_A^B \frac{pdV}{T} = \int_A^B \frac{nC_v}{T} dT + \int_A^B \frac{nR}{V} dV = nC_V \ln \frac{T_B}{T_A} + nR \ln \frac{V_B}{V_A} = -5.76 \frac{J}{K}$$

ESERCIZIO 3

In un sistema di punti materiali vale la relazione:

$$\vec{P} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = M\vec{V}_{CM}$$ essendo M la massa totale del sistema

Ma essendo per ipotesi $\vec{V}_{CM} = 0$ *si ha* $\vec{P} = 0$

Per quanto concerne l'energia cinetica si ha: $E_k = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 \neq 0$ in generale.

D'altronde per il teorema di Konig sull'energia si ha:

$E_k = (\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i\, v_i'^2) + \frac{1}{2} M V_{CM}^2$ nel caso in esame essendo V_{CM}=0 si ha:

$E_k = (\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i\, v_i'^2)$ che in generale è non nulla.

Un esempio è il moto di un sistema rigido di punti materiali che ruota con velocità angolare ϖ, intorno ad un asse fisso passante per il centro di massa. In questo caso infatti:

$$\vec{V}_{CM} = 0 \ \boldsymbol{e}\ E_k = \frac{1}{2} I \varpi^2$$

CORSO DI FISICA GENERALE 1

(Prof. Gianluca QUARTA)

SOLUZIONI ESAME 17/03/2017

ESERCIZIO 1

La massa del carro varia nel tempo con la legge (lineare):

$$m(t) = M + \lambda t$$

Ricordiamo anche che la II legge di Newton si scrive come: $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ che proiettata lungo la direzione del moto (indicata con x) diventa: $F_x = \frac{dP_x}{dt} = 0$ essendo nulle le forze agenti lungo l'asse x. Quindi:

essendo $P_x = m(t)v(t) = (M + \lambda t)v(t)$ si ha:

$$\frac{d(Mv + \lambda vt)}{dt} \rightarrow M\frac{dv}{dt} + \lambda t\frac{dv}{dt} + \lambda v = 0 \rightarrow (M + \lambda t)\frac{dv}{dt} = -\lambda v \rightarrow \int_{vo}^{v}\frac{dv}{v} = -\int_{0}^{t}\frac{\lambda dt}{M + \lambda t}$$

Da cui si ottiene con semplici passaggi che:

$$v(t) = \frac{v_0 M}{M + \lambda t}$$

Quindi il moto avviene con velocità variabile (decrescente) e quindi non è più un moto uniforme.

Ovviamente $a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -\frac{voM\lambda}{(M + \lambda t)^2}$

ESERCIZIO 2

Nell'urto si conserva la quantità di moto:

$$mv_0 = (m + M)v \rightarrow v = \frac{m}{m + M}v_0 = 12.5\frac{m}{s}$$

$$W_{att} = \Delta E_m = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}(m + M)v^2 = -\mu_d mgx \rightarrow x = 0.72\,m$$

$$W_{att} = -\mu_d(M + m)gx = -0.83J$$

SOLUZIONI ESAME 07/06/2017

ESERCIZIO 1

Il momento d'inerzia del sistema si scrive per $t<t_2$:

CORSO DI FISICA GENERALE 1

(Prof. Gianluca QUARTA)

$I = \frac{MR^2}{2} + 2mR^2 = 0.35\,Kgm^2$ inoltre:

$\alpha = \frac{\tau}{I}$ quindi essendo il moto uniformemente accelerato: $\varpi_1 = \alpha t_1 = \frac{\tau}{I} t_1 = 71.4\,rad/s$

Per effetto dello spostamento cambia il momento d'inerzia del sistema che diventa:

$$I' = \frac{MR^2}{2} + 2md^2 = 0.266\,Kgm^2$$

Nello spostamento si conserva il momento angolare lungo l'asse di rotazione quindi:

$$L = L' \rightarrow I\varpi_1 = I'\varpi_2 \rightarrow \varpi_2 = \frac{I}{I'}\varpi_1 = 93.9\,rad/s$$

$$\Delta E_m = \Delta E_k = \frac{1}{2} I'\varpi_2^2 - \frac{1}{2} I\varpi_1^2 = 268\,J$$

ESERCIZIO 2

[F]=[N]=[MLT^{-2}]

Nel caso specifico per K si ottiene:

$[F_x] = [\mathrm{ML}T^{-2}] = [k] \cdot [L^2] \rightarrow [k] = [ML^{-1}T^{-2}]$

Per determinare per quali valori di k la forza è conservativa calcoliamone il rotore:

$\vec{\nabla} x \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2kx^2 & 2kz^2 & 4kyz \end{vmatrix} = 0 \;\; \forall k$ quindi la forza è conservativa per qualsiasi valore di k

Essendo la forza conservativa il lavoro da essa compiuto è indipendente dal percorso seguito per andare dall'origine (0,0,0) al punto P(3,2,1). Pertanto possiamo scegliere come percorso quello che va dall'origine O(0,0,0) al punto A(3,0,0) lungo l'asse x, poi da A(3,0,0) lungo un tratto parallelo all'asse y fino a B(3,2,0) e quindi da B lungo un tratto parallelo all'asse z fino al punto P (3,2,1). Quindi:

$$W = \int_0^P \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_{0,0,0}^{3,0,0} F_x dx + \int_{3,0,0}^{3,2,0} F_y dy + \int_{3,2,0}^{3,2,1} F_z dz = \left[\frac{2}{3}kx^3\right]_{0,0,0}^{3,0,0} + [2kyz^2]_{3,0,0}^{3,2,0} + [2kyz^2]_{3,2,0}^{3,2,1} = 22k$$

CORSO DI FISICA GENERALE 1

(Prof. Gianluca QUARTA)

SOLUZIONI ESAME 21/06/2017

ESERCIZIO 1

Per $t<t_1$ il sistema solidale con il carrello è un sistema inerziale. L'equazione del moto lungo l'asse x', solidale con il carrello, si ottiene banalmente come: $\ddot{x}+\frac{k}{m}x=0 \rightarrow \ddot{x}+\varpi^2 x=0$

La cui soluzione è del tipo: $x(t)=A\sin(\varpi t+\varphi)$ imponendo le condizioni iniziali: $\begin{cases} x(t=0)=x_0 \\ \dot{x}(t=0)=0 \end{cases}$ si ha la soluzione: $x(t)=x_0\cos(\varpi t)$. La velocità relativa al carrello è quindi: $v'(t)=-x_0\varpi\, sen(\varpi t)$. Quindi la velocità nel sistema di riferimento fisso (del laboratorio) sarà (per il teorema delle velocità relative):

$$\vec{v}(t)=\vec{v}_0+\vec{v}'(t)=[v_0-x_0\varpi\, sen(\varpi t)]\hat{x}$$

Per $t>t_1$ il sistema solidale al carrello non è più inerziale pertanto bisogna tener conto della forza apparente(di trascinamento) che vale $\vec{F}_{app}=-m\vec{a}_0$. Quindi nel sistema solidale al carrello è possibile scrivere (lungo l'asse x'): $\ddot{x}+\frac{k}{m}x=-a_0 \rightarrow \ddot{x}+\varpi^2 x=-a_0$ che ammette soluzioni del tipo $x(t)=A\sin(\varpi t+\varphi)-\frac{ma_0}{k}$. Osserviamo ora che il tempo t_1 corrisponde proprio al periodo del moto armonico quindi il punto materiale si trova in x_0 con velocità nulla (rispetto al carrello). Imponendo queste condizioni $\begin{cases} x(t=t_1)=x_0 \\ \dot{x}(t=t_1)=0 \end{cases}$ si ottiene: $x(t)=(x_0+\frac{ma_0}{k})\cos(\varpi t)-\frac{ma_0}{k}$

ESERCIZIO 2

$$\eta=\frac{W}{Q_A}=\frac{Q_A+Q_C}{Q_A}=1+\frac{Q_C}{Q_A}=1+\frac{nc_v(T_D-T_C)}{nc_v(T_B-T_A)}=1-\frac{T_C(\frac{T_D}{T_C}-1)}{T_B(\frac{T_A}{T_B}-1)}$$

Ma $\begin{matrix} T_D V_D^{\gamma-1}=T_A V_A^{\gamma-1} \\ T_C V_C^{\gamma-1}=T_B V_B^{\gamma-1} \end{matrix}$ da cui si ottiene $\frac{T_A}{T_B}=\frac{T_D}{T_C}$ e $\frac{T_C}{T_B}=\left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{\gamma-1}=2^{1-\gamma}$ da cui si ricava che:

$$\eta=1-\frac{1}{2^{2/3}}=0.37$$

CORSO DI FISICA GENERALE 1

(Prof. Gianluca QUARTA)

SOLUZIONI ESAME 21/07/2017

ESERCIZIO 1

Nel caso in cui il piano è liscio non agiscono forze lungo l'asse x, pertanto il modo è rettilineo uniforme con velocità v_0=10 m/s.
Nel caso in cui il piano è scabro la legge di Newton proiettata lungo l'asse x si scrive:

$$-F_a = ma \rightarrow -\mu_d N = ma \rightarrow -\mu_d (F+mg) = ma \rightarrow a = -\frac{\mu_d (F+mg)}{m} = 3.69\frac{m}{s^2}$$

Il moto è quindi uniformemente decelerato e si ha allora: $t_f = \frac{v_0}{a} = 2.71s$

Nel caso in cui sia F=kt la legge di Newton proiettata lungo l'asse x porta a scrivere: $a = -\frac{\mu_d (kt+mg)}{m}$ che non è più costante. Da cui si ricava che: $\frac{dv}{dt} = -\frac{\mu_d (kt+mg)}{m} \rightarrow v = v_0 - \int_0^t \frac{\mu_d (kt+mg)}{m} dt = v_0 - \frac{\mu_d k}{2m} t^2 - \mu_d g t$ quindi imponendo che v=0 si ha che: $\frac{\mu_d k}{2m} t^2 + \mu_d g t - v_0 = 0$ la cui soluzione è t_f=0.37 s

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = -\mu_d (mg + kt)(v_0 - \frac{\mu_d k}{2m} t^2 - \mu_d g t)$$

ESERCIZIO 2

Essendo il momento d'inerzia una grandezza additiva, Il momento d'inerzia della puleggia si può scrivere come differenza tra il momento d'inerzia di raggio R e quello di quattro dischi di pari spessore e raggio R/4:

$$I_R = I_D - 4I_d$$

applicando il teorema di Steiner si trova che $I_d = \frac{m}{2}\frac{R^2}{16} + m\frac{R^2}{4} = \frac{9mR^2}{32}$ essendo m la massa corrispondente al disco forato. E' inoltre noto che $I_D = \frac{m_D R^2}{2}$ essendo m_D la massa del disco (pieno).

D'altronde è possibile scrivere che $m = \rho v = \frac{\rho s \pi R^2}{16}$ e $m_D = \rho S \pi R^2$ma essendo nota la massa della puleggia ed il suo volume si può scrivere:

$\rho = \frac{M}{(\pi R^2 - 4\frac{\pi R^2}{16})s}$ *da cui si ottiene che* $\rho s = \frac{4M}{3\pi R^2}$ da cui si ricava per le relazioni trovate prima che:

$m = \frac{M}{12}$ *e* $m_D = \frac{4M}{3}$ da cui si ricava che $I_R = \frac{55}{96} MR^2$=0.18 Kgm^2

CORSO DI FISICA GENERALE 1

(Prof. Gianluca QUARTA)

Le equazioni che regolano il moto del sistema puleggia-corpo sono:

$$\begin{cases} TR = I_R\alpha \\ mg - T = ma \\ a = \alpha R \end{cases}$$ da cui si ricava che $T = \frac{mg}{1+\frac{mR^2}{I_{ruota}}}$ e $\alpha = \frac{mgR}{I_R+mR^2}$

quindi il moto è circolare uniformemente accelerato per cui:

$$\omega = \frac{mgR}{I_R + mR^2}t$$

Per rispondere all'ultimo quesito si può applicare la conservazione dell'energia meccanica:

$mgh = \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}I_R\omega_f^2 = \frac{1}{2}m\omega_f^2R^2 + \frac{1}{2}I_R\omega_f^2$ da cui si ricava che $\omega_f = \sqrt{\frac{2mgh}{mR^2+I_R}}$

SOLUZIONI ESAME 19/09/2017

ESERCIZIO 1

La seconda legge della dinamica si scrive, in condizioni di equilibrio, (proiettata lungo il piano per ciascuno dei due corpi):

$$\begin{cases} -T + mgsen\alpha = 0 \\ T - k\Delta x = 0 \end{cases}$$ da cui si ottiene $\Delta x = \frac{mgsen\alpha}{k} = 2.4$ cm

Durante il moto, la seconda legge della dinamica si scrive, sempre proiettata lungo il piano per ciascuno dei due corpi,:

$$\begin{cases} -T + mgsen\alpha = ma = m\ddot{x} \\ T - kx = ma = m\ddot{x} \end{cases}$$ da cui si ricava facilmente l'equazione del moto:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m+M}x = \frac{mgsen\alpha}{m+M}$$ Da cui si ha $T = \frac{2\pi}{\varpi} = 2\pi\sqrt{\frac{m+M}{k}} = 0.7s$

L'integrale dell'equazione differenziale si ottiene come somma dell'integrale dell'omogena associata e di un integrale particolare. Nel caso specifico: $x(t) = Asen(\varpi t + \varphi) + \frac{mgsen\alpha}{k}$ imponendo le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x(t=0) = x_0 + \Delta x = x_0 + \frac{mgsen\alpha}{k} \\ v(t=0) = 0 \end{cases}$$ si ottiene: $x(t) = x_0\cos(\varpi t) + \frac{mgsen\alpha}{k}$

CORSO DI FISICA GENERALE 1

(Prof. Gianluca QUARTA)

ESERCIZIO 2

Il momento d'inerzia di ottiene semplicemente sommando quello di due aste omogenee di lunghezza 2l:

$I = 2\left(\frac{M\,4l^2}{12}\right) = \frac{2}{3}Ml^2 = 0.0013\,Kgm^2$. Per 0<t<5 s il moto è uniformemente accelerato con accelerazione $\alpha = \frac{M_0}{I}$. Essendo la girandola inizialmente ferma si ha che: $\varpi = \frac{M_0}{I}t$ e quindi ϖ_1(t=5)=384 rad/s.

Per t>t1 si ha: $M = I\alpha = I\frac{d\varpi}{dt}$ da cui $-k\varpi = I\frac{d\varpi}{dt}$ che è un'equazione differenziale a variabili separabili la cui integrazione fornisce: $\varpi = \varpi_1 e^{-\frac{k}{I}t} \rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \varpi_1 e^{-\frac{k}{I}t}$ che integrata consente di ricavare: $\theta(t) = \theta_1 + \frac{\varpi_1 I}{k}(1 - e^{-\frac{k}{I}t}) = \frac{M_0}{2I}t_1^2 + \frac{\varpi_1 I}{k}(1 - e^{-\frac{k}{I}t})$ per calcolare il numero di giri fatti dalla girandola prima di fermarsi basta calcolare:

$$N = \frac{1}{2\pi}\lim_{t\to+\infty}[\frac{M_0}{2I}t_1^2 + \frac{\varpi_1 I}{k}(1 - e^{-\frac{k}{I}t})] = \frac{\frac{M_0}{2I}t_1^2 + \frac{\varpi_1 I}{k}}{2\pi}$$ =153.1 giri

SOLUZIONI ESAME DEL 18 Ottobre 2017

ESERCIZIO 1

La seconda legge della dinamica si scrive, in condizioni di equilibrio, (proiettata lungo il piano per ciascuno dei due corpi):

$$\begin{cases} T_1 - m_1 g sen\alpha = m_1 a_1 \\ -T_2 + m_2 g sen\alpha = m_2 a_2 \\ T_2 - T_1 = m_3 a_2 \end{cases}$$ da cui essendo $a_1=a_2=a_3=a$ si ricava che: $a = \frac{g\,sen\alpha(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2 + m_3} = 1.16\frac{m}{s^2}$

La condizione perché si possa avere equilibrio è quella per cui a=0 ossia $m_2=m_1$ (e velocità iniziale nulla del sistema).

In presenza di attrito la seconda legge della dinamica porta a scrivere, per i tre corpi ed in condizioni di equilibrio a=0:

CORSO DI FISICA GENERALE 1

(Prof. Gianluca QUARTA)

$$\begin{cases} T_1 - m_1 g sen\alpha - \mu_s m_2 g \cos\alpha = 0 \\ -T_2 + m_2 g sen\alpha - \mu_s m_2 g \cos\alpha = 0 \\ T_2 - T_1 - \mu_s m_3 g = 0 \end{cases}$$ da cui si ottiene $\mu_s = \dfrac{sen\alpha(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)\cos\alpha + m_3} = 0.16$

ESERCIZIO 2

$$\varpi(t) = \frac{d\theta}{dt} = \frac{3}{(t+1)^2}\ \frac{rad}{s}$$ e $$\alpha(t) = \frac{d\varpi}{dt} = -\frac{6(t+1)}{(t+1)^4} = -\frac{6}{(t+1)^3}\ \frac{rad}{s^2}$$

$$M(t) = I\alpha(t) = -\frac{6I}{(t+1)^3} = \frac{3M}{R^2(t+1)^3}$$ Nm

$$W = \Delta E_k = \frac{1}{2} I(\varpi_f^2 - \varpi_i^2) = \frac{3MR^2}{4}\left[\frac{1}{(t_f+1)^4} - \frac{1}{(t_0+1)^4}\right] = \frac{3MR^2}{4}\left[\frac{1}{(t_f+1)^4} - 1\right] = -0.19J$$

SOLUZIONI ESAME DEL 19/01/2018

ESERCIZIO 1

Dalla conservazione dell'energia meccanica si ha:

$V_A = \sqrt{\frac{kx^2}{m_1}}$=6.7 m/s dalla conservazione della quantità di moto nell'urto si ha: $V_A' = \frac{m_1 V_A}{(m_1+m_2)}$

Dalla proiezione della II legge di Newton lungo la normale alla guida si ha:

$$\mathrm{N} = (m_1 + m_2) g cos\theta + \frac{(m_1 + m_2)V^2}{R}$$

La condizione di distacco è N=0 per θ=π ovvero:

$0 = -(m_1 + m_2)g + \frac{(m_1+m_2)V_B^2}{R}$ da cui $V_B = \sqrt{gR}$=1.4 m/s

Dalla conservazione delle energia meccanica lungo la guida liscia si ottiene:

$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V_A'^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V_B^2 + 2(m_1 + m_2)gR$=$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)gR + 2(m_1 + m_2)gR =$

$= \frac{5}{2}(m_1 + m_2)gR$ da cui si ottiene$V_A' = \sqrt{5gR}$

CORSO DI FISICA GENERALE 1

(Prof. Gianluca QUARTA)

E quindi $V_A' = \frac{m_1 V_A}{(m_1+m_2)} = \sqrt{5gR}$ da cui si ottiene $m_2 = m_1(\frac{V_A}{\sqrt{5gR}} - 1)$ da cui si ottiene m_2=0.11 Kg

Dalla conservazione delle energia meccanica lungo la guida liscia si ottiene:

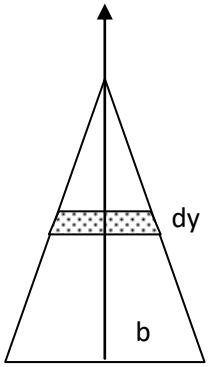
$\frac{1}{2}(m_1+m_2)V_A'^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2 + (m_1+m_2)gR(1-cos\theta)$ da cui si ottiene

$V^2 = V_A'^2 - 2gR(1-cos\theta) = (\frac{m_1 V_A}{(m_1+m_2)})^2 - 2gR(1-cos\theta)$

E quindi l'accelerazione centripeta lungo la guida è:

$$a_c = \frac{V^2}{R} = (\frac{m_1 V_A}{R(m_1+m_2)})^2 - 2g(1-cos\theta)$$

<u>ESERCIZIO 2</u>



Il CM si trova lungo l'altezza (h) per ragioni di simmetria.

La distanza dalla base si ottiene risolvendo:

$Y_{CM} = \frac{1}{M}\int_0^h y dm = \frac{1}{M}\int_0^h y\rho\, s dA = \frac{2\rho S b}{hM}\int_0^h y(h-y)\, dA = \frac{h}{3}$

Per il calcolo del momento d'inerzia si può considerare il momento d'inerzia della sbarretta elementare di massa dm, spessore dy e lunghezza l=l(y) indicata nella figura e indicando con y <u>la distanza dal vertice</u> superiore del triangolo. In questo caso per il teorema di Steiner il momento d'inerzia si può scrivere come:

$$dI = \frac{l^2}{12}dm + y^2 dm$$

per cui si ha: $I = \int dI = \int(\frac{l^2}{12} + y^2)dm = \int\left(\frac{l^2}{12} + y^2\right)\rho dV = \rho S\left(\frac{b^2}{12h^2} + 1\right)\frac{b}{h}\int_0^h y^3 dy$

da cui si ottiene:

$I = M(\frac{h^2}{2} + \frac{b^2}{24})$=0.4 Kgm^2

Si tratta di un pendolo fisico. Pertanto l'equazione del moto si ricava semplicemente scegliendo come polo per il calcolo dei momenti il vertice del triangolo intorno al quale esso ruota e scrivendo:

$M_O^E = I\alpha = I\ddot{\vartheta} = -Mg\frac{2}{3I}h\, sen\theta$ da cui si ricava l'equazione differenziale del moto:

$\ddot{\vartheta} + Mg\frac{2}{3I}h\, sen\theta = 0$ che nel caso delle piccole oscillazioni (sen θ≅θ) diventa:

$$\ddot{\vartheta} + Mg\frac{2}{3I}h\,\theta = 0$$

CORSO DI FISICA GENERALE 1

(Prof. Gianluca QUARTA)

Per cui $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{3I}{2Mgh}}$=2.46 s

SOLUZIONI ESAME 07/02/2018

ESERCIZIO 1

Perché al tempo t=1 s il punto si trovi in P(8,0) devono essere soddisfatte:

$\begin{cases} 3\alpha + 2\beta = 8 \\ 2\beta - \alpha = 0 \end{cases}$ da cui si ottiene facilmente α=2 e β=1 e quindi la legge oraria diventa:
$\vec{r}(t) = (6t+2)\hat{x} + (2t^2-2)\hat{y}$
Da cui $\vec{v}(t) = (6)\hat{x} + (4t)\hat{y}$ e l'angolo formato dalla traiettoria in p si ottiene da:
$tg(\theta) = \frac{v_y}{v_x}(t=1) = \frac{4}{6}$ da cui si ottiene θ=arctg (2/3)=33.7 °
La forza agente sul punto si ottiene da: $\vec{F} = m\frac{\overrightarrow{dV}}{dt} = 8\hat{y}$
Il lavoro si può ottenere da:

$$W = \int_1^{10} \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt = \int_1^{10} 8\hat{y}\cdot(6\hat{x}+4t)\hat{y}\,dt = \int_1^{10} 32tdt = 1584\,J$$

Dal teorema dell'energia cinetica si ha:

$W = \Delta E_k = \frac{m}{2}[v^2(10) - v^2(1)] = 1584\,J$ che era quanto si voleva dimostrare

ESERCIZIO 2

Scegliendo come origine il centro della sbaretta il CM del sistema si ottiene da:

$y_{cm} = d = \frac{-m_2+m_1}{m_1+m_2+M}\frac{l}{2}$ =0.011 m

La velocità del CM dopo l'urto si ricava imponendo la conservazione della quantità di moto:

$Mv_0 - (m_1+m_2)v = (m_1+m_2+M)v_f$ da cui si ottiene $v_f = \frac{Mv_0-(m_1+m_2)v}{(m_1+m_2+M)} = +0.67\,m/s$

Dalla conservazione del momento angolare rispetto al CM del sistema si ha:

$dMv_0 + m_1v\left(\frac{l}{2}-d\right) - m_2v\left(\frac{l}{2}+d\right) = I\omega$ da cui si ottiene
$\omega = \frac{dMv_0+m_1v\left(\frac{l}{2}-d\right)-m_2v\left(\frac{l}{2}+d\right)}{\frac{Ml^2}{12}+Md^2+m_2(\frac{l}{2}+d)^2+m_1(\frac{l}{2}-d)^2}$=5.4 rad/s

Perché il CM sia fermo deve essere:

$v_f = \frac{Mv_0-(m_1+m_2)v}{(m_1+m_2+M)} = 0$ da cui si ottiene $v = \frac{Mv_0}{(m_1+m_2)} = 4\,m/s$

CORSO DI FISICA GENERALE 1

(Prof. Gianluca QUARTA)

SOLUZIONI ESAME 23/02/2018

ESERCIZIO 1

Dalla conservazione dell'energia meccanica si ottiene:

$\frac{1}{2}kx^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_b^2$ da cui si ottiene $v_b = \sqrt{\frac{kx^2+2mgh}{m}} = 3.71\ m/s$

Il lavoro della forza di attrito si ottiene da: $W_{att} = \Delta E_m = -\mu_d mgd = -0.44\ J$

E quindi:

$\frac{1}{2}mv_c^2 - \frac{1}{2}mv_b^2 = -\mu_d mgd$ da cui si ottiene $v_c = \sqrt{v_b^2 - 2\mu_d gd} = 3.46\ m/s$

La quota z si ottiene imponendo la conservazione dell'energia meccanica lungo il piano inclinato:

$mgz = \frac{1}{2}mv_c^2$ da cui si ottiene $z = \frac{1}{2g}v_c^2$=0.61 m

ESERCIZIO 2

Il momento d'inerzia rispetto al punto O si ricava dal teorema di Steiner:

$$I_o = \frac{MR^2}{2} + M(L+R)^2 = \frac{MR^2}{2} + M(3R)^2 = \frac{19MR^2}{2} = 6.84\ Kgm^2$$

L'equazione cardinale della dinamica si scrive in questo caso (proiettata lungo la fune):

$T = Ma_{CM} = M\frac{v_O^2}{(R+L)}$ essendo O il centro del disco che coincide con il centro di massa del sistema. Da qui deriva che: $T = Ma_{CM} = M\omega_O^2(R+2R) = 3MR\omega_O^2 = 142\ N$

$$E_K = \frac{1}{2}I_o\omega_O^2 = 135\ J$$

$\vec{L} = I_0\overrightarrow{\omega_0}$ il cui modulo vale 42.97 Js, è diretto perpendicolarmente al piano e uscente da esso.

Il momento delle forze esterne agenti sul sistema (tensione del filo) rispetto al polo O è nullo. Da ciò consegue che il momento angolare si conserva

CORSO DI FISICA GENERALE 1

(Prof. Gianluca QUARTA)

SOLUZIONI ESAME DEL 15/03/2018

ESERCIZIO 1

La quantità di moto iniziale è pari a: $\overrightarrow{P_0} = mv_o\hat{x} = 10\hat{x}\ m/s$
Dal teorema dell'impulso è noto che:
$\Delta\vec{P} = \int_0^t \vec{F}dt = \int_0^t ktdt\,\hat{x}$ da cui si ottiene facilmente che $\vec{P}(t) = \overrightarrow{P_0} + \frac{1}{2}kt^2\hat{x}$ da cui:
$\vec{P}(t=5) = 35\,\hat{x}\ Ns$
$\frac{dv}{dt} = \frac{k}{m}t$ da cui si ottiene che $v(t) = v_0 + \frac{k}{2m}t^2$

$$W = \int_0^t \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt = \int_0^t (kt)\left(v_0 + \frac{k}{2m}t^2\right)dt = \frac{kv_0}{2}t^2 + \frac{k^2t^4}{8m} = 562.5\,J$$

Per il teorema dell'energia cinetica:
$W = \Delta E_k = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{kv_0}{2}t^2 + \frac{k^2t^4}{8m} = 562.5\,J$ che era quanto si voleva dimostrare

ESERCIZIO 2

La velocità con cui il punto urta la sbarretta si calcola applicando la conservazione dell'energia meccanica.
$mgh = \frac{1}{2}mv_0^2$ da cui si ricava $v_0 = \sqrt{2gh} = 6.26\ m/s$
Nell'urto sbarretta-punto materiale si conserva il momento angolare per cui:
$mv_0l = \left(\frac{Ml^2}{3} + ml^2\right)\omega_0$ da cui si ricava che $\omega_0 = \frac{mv_0l}{\left(\frac{Ml^2}{3}+ml^2\right)}$ =6.26 rad/s
La posizione del centro di massa (come distanza da O) si ottiene da:

$$d = \frac{\frac{Ml}{2} + ml}{m+M} = \frac{\frac{M}{2}+m}{m+M}l = 0.4\ m$$

Essendo il moto puramente rotatorio intorno ad O si ha che:

$$v_{CM} = \omega_0 d = \frac{\frac{M}{2}+m}{m+M}l\omega_0 = 2.5\ m/s$$

Dalla conservazione dell'energia meccanica si ottiene:

$$\frac{1}{2}I\omega_0^2 + \frac{Mgl}{2} = (M+m)gl + \frac{1}{2}kx^2$$

Da cui si ottiene x=0.69 m