

Esercitazioni del corso di Fisica Teorica I¹ Complementi di matematica

A Integrali gaussiani

Vogliamo calcolare il seguente integrale:

$$I(a, b, c) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp [-(ax^2 + bx + c)] \quad (\text{A1})$$

con a , b e c reali e $a > 0$. Cominciamo intanto col calcolare il seguente integrale:

$$I = I(1, 0, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2} \quad (\text{A2})$$

Utilizziamo il seguente trucco:

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-y^2} \\ &= \int \int_{\mathbf{R}^2} dx dy \exp [-(x^2 + y^2)] \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

Facciamo il cambiamento di variabili $x = \rho \cos \theta$ e $y = \rho \sin \theta$. Poiché lo jacobiano della trasformazione vale

$$\left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{array} \right\| = \rho \quad (\text{A4})$$

¹Per informazioni, chiarimenti o segnalazione di errori rivolgersi a:
Dr. Daniele Montanino, Università del Salento
C/O Dip. di Fisica, stanza 220,
via Arnesano, 73100 LECCE (ITALY)
Tel/FAX: +39 0832 297 447 (interno: 7447)
e-mail: daniele.montanino@le.infn.it
web: <http://www.le.infn.it/~montanin/>

avremo $dx dy = \rho d\rho d\theta$ e quindi

$$I^2 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} \rho d\rho e^{-\rho^2} \\ \stackrel{t=\rho^2}{=} \pi \int_0^{+\infty} dt e^{-t} = \pi \quad (\text{A5})$$

da cui ricaviamo $I = \sqrt{\pi}$. A questo punto per calcolare l'integrale (A1) è sufficiente completare il quadrato nell'esponenziale:

$$I(a, b, c) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp \left[-a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{b^2}{4a} - c \right] \\ \stackrel{t=\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)}{=} \frac{\exp\left(\frac{b^2}{4a} - c\right)}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-t^2} \\ = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{4a} - c\right) \quad (\text{A6})$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp \left[\frac{(b \pm 2a)^2}{4a} - (a \mp b + c) \right] \quad (\text{A7})$$

Questo risultato può essere esteso per continuazione analitica anche a valori complessi di a , b e c , purché $a \neq 0$. In particolare, per $a = -i\alpha$ con α reale, abbiamo i seguenti integrali notevoli:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \sin \alpha x^2 = \text{sign}(\alpha) \sqrt{\frac{\pi}{2|\alpha|}} \quad (\text{A8})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \cos \alpha x^2 = \sqrt{\frac{\pi}{2|\alpha|}} \quad (\text{A9})$$

Si definisce infine la *funzione errore* come segue:

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dy e^{-y^2} \quad (\text{A10})$$

per cui:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \exp \left[-(ax^2 + bx + c) \right] = I(a, b, c) \cdot \frac{\text{erf}(t_2) - \text{erf}(t_1)}{2} \quad (\text{A11})$$

con

$$t_{1,2} = \sqrt{a} \left(x_{1,2} + \frac{b}{2a} \right) \quad (\text{A12})$$

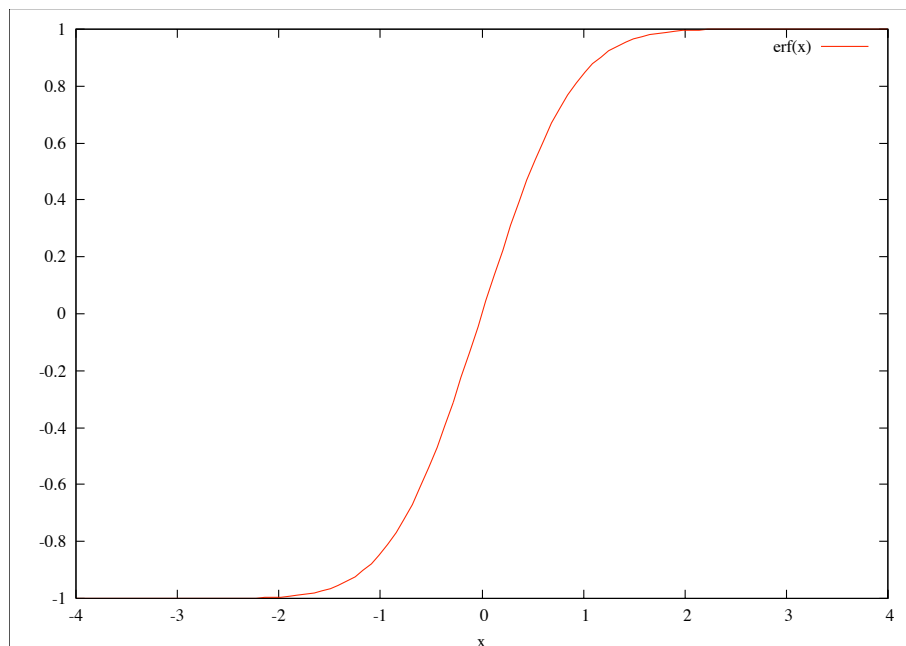


Figura 1: Grafico della funzione errore.

B La funzione Γ di Eulero (cenni)

La funzione

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} dy y^{x-1} e^{-y} \quad (\text{B1})$$

viene chiamata *funzione Gamma di Eulero*. Essa può essere definita per continuazione analitica anche per valori complessi di x purché $x \neq -n$ con $n \in \mathbf{N}$, dove ha dei poli semplici. Vale la seguente proprietà che si può dimostrare facilmente per mezzo di una integrazione per parti (si lascia la dimostrazione per esercizio):

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (\text{B2})$$

Utilizzando questa proprietà è facile mostrare per induzione che $\Gamma(n+1) = n!$. E' utile calcolare $\Gamma(x)$ per x semiinteri. Cominciamo col calcolare $\Gamma(\frac{1}{2})$:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{y}} e^{-y}$$

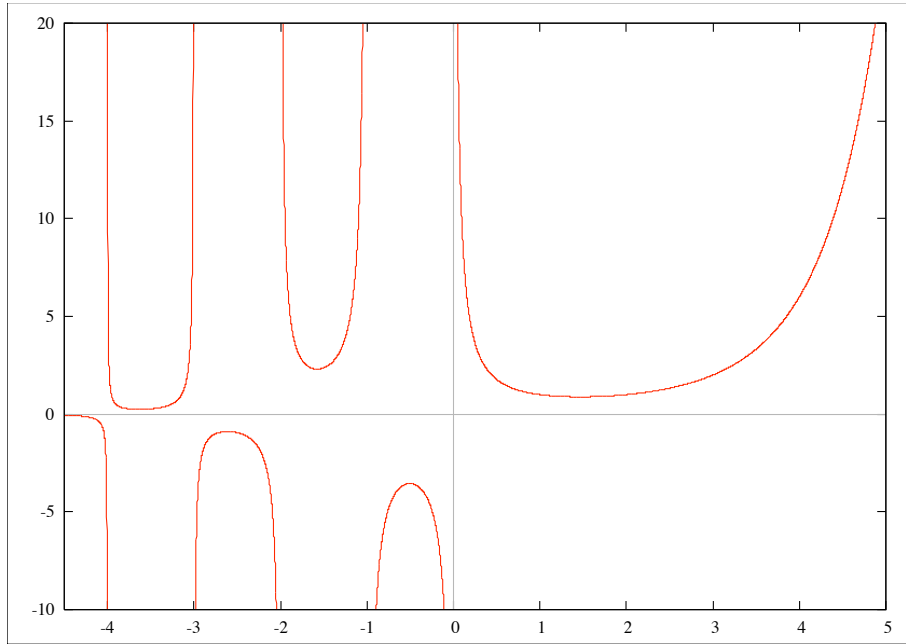


Figura 2: Grafico della funzione $\Gamma(x)$.

$$\begin{aligned}
 & \stackrel{y=t^2}{=} 2 \int_0^{+\infty} dt e^{-t^2} \\
 & = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-t^2} = \sqrt{\pi}
 \end{aligned} \tag{B3}$$

Utilizzando la proprietà (B2) è facile mostrare per induzione che:

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi} \tag{B4}$$

con $n \geq 1$. Il *semifattoriale* $n!!$ è definito come:

$$\begin{aligned}
 (2n)!! &= 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n = 2^n n! \\
 (2n+1)!! &= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}
 \end{aligned} \tag{B5}$$

Un'altra formula utile è la seguente:

$$\int_0^{+\infty} dy y^p e^{-y^2} = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \tag{B6}$$

Questa relazione è ottenuta semplicemente tramite la sostituzione $t = y^2$. Vale anche il seguente andamento asintotico:

$$\Gamma(x+1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x} \quad (\text{B7})$$

Infatti dalla (B1) si ha:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} dy e^{-(y-x \ln y)} \quad (\text{B8})$$

La funzione

$$f(y) = y - x \ln y \quad (\text{B9})$$

è minima per $y = x$. In un intorno di $y = x$ la $f(y)$ può essere sviluppata in serie di Taylor

$$f(y) \simeq x - x \ln x + \frac{1}{2x}(y-x)^2 \quad (\text{B10})$$

Sostituendo nella (B8) si ha

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &\simeq \int_0^{+\infty} dy e^{-(x-x \ln x)} \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2x}\right] \\ &\stackrel{t=\frac{y-x}{\sqrt{2x}}}{=} x^x e^{-x} \sqrt{2x} \int_{-\sqrt{x/2}}^{+\infty} dy e^{-y^2} \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^x e^{-x} \sqrt{2x} \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-y^2} = x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x} \end{aligned}$$

Ne consegue che per n molto grande si ha

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \quad (\text{B11})$$

C La funzione ipergeometrica (cenni)

Si definisce *funzione ipergeometrica generalizzata* la funzione definita dalla seguente serie di potenze:²

$${}_pF_q(a_1, a_2 \dots a_p; b_1, b_2 \dots b_q; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdot (a_2)_n \cdot \dots \cdot (a_p)_n x^n}{(b_1)_n \cdot (b_2)_n \cdot \dots \cdot (b_q)_n n!} \quad (\text{C1})$$

²Il nome deriva dal fatto che la funzione è una generalizzazione della serie geometrica, poiché:

$${}_1F_0(1, x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

dove $\{a_k\}_{k=1\dots p}$ e $\{b_k\}_{k=1\dots q}$ sono numeri in generale complessi e $(a)_n$ è il simbolo di Pochhammer definito come:

$$(a)_n = a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \quad (\text{C2})$$

Evidentemente $(1)_n = n!$. Se uno qualsiasi degli a_k è nullo, la (C1) è identicamente nulla. Inoltre deve essere $b_k \neq -m$, con m intero, perché il denominatore nella (C1) non si annulli. Se invece per uno qualunque degli a_k si ha $a_k = -m$ la serie si tronca ad un polinomio di grado m . Se $a_k \neq -m$, usando il criterio del rapporto è semplice dimostrare che se $p < q + 1$ il raggio di convergenza della serie è infinito, se $p = q + 1$ il raggio di convergenza della serie è $|x| < 1$ (sebbene la funzione si possa estendere per prolungamento analitico ad altri valori complessi di x). Se $p \geq q + 1$ e $a_k \neq -m$ la serie ha raggio di convergenza nullo.

La funzione ipergeometrica è una delle più importanti e studiate della Fisica Matematica e possiede innumerevoli proprietà che qui è impossibile elencare. Basti pensare che le funzioni elementari (e gran parte delle funzioni speciali utilizzate nella Fisica Matematica) possono essere scritte in termini di funzioni ipergeometriche. Così per esempio:

$$\begin{aligned} e^x &= {}_0F_0(;;x) \\ \ln x &= {}_2F_1(1, 1; 2; 1-x) \\ \cos x &= {}_0F_1\left(\left;; \frac{1}{2}; -\frac{x^2}{4}\right) \\ \operatorname{erf}(x) &= \frac{2x}{\sqrt{\pi}} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -x^2\right) \end{aligned}$$

etc.

Storicamente, la prima delle funzioni ipergeometriche che è stata studiata è la ${}_2F_1(a_1, a_2; b; x)$, la quale è quindi chiamata funzione ipergeometrica per antonomasia. Inoltre la ${}_1F_1(a; b; x)$ è detta anche *funzione ipergeometrica confluyente*. La funzione ipergeometrica ${}_2F_1(a_1, a_2; b; x)$ è soluzione dell'equazione differenziale con due punti Fuchsiani $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$ ³

$$x(x-1)y'' + [b - (a_1 + a_2 + 1)x]y' - a_1a_2y = 0 \quad (\text{C3})$$

³Si consideri l'equazione differenziale omogenea del secondo ordine

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Se in $x = x_0$ la $p(x)$ e/o la $q(x)$ hanno una singolarità ma per $x \rightarrow x_0$ $(x - x_0)p(x)$ e

detta per l'appunto *equazione ipergeometrica*. La funzione ${}_1F_1(a; b; x)$ è invece soluzione dell'*equazione ipergeometrica confluyente* (detta anche *equazione di Kummer*):⁴

$$xy'' + (b - x)y' - ay = 0 \quad (\text{C4})$$

Per semplicità dimostriamo solo la più semplice di queste proprietà, cioè la seconda, lasciando la dimostrazione della prima come esercizio. Per fare ciò utilizziamo la *tecnica di Frobenius*. Sviluppiamo la $y(x)$ in serie di potenze in un intorno di $x = 0$:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (\text{C5})$$

da cui ricaviamo:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \stackrel{n=m+1}{=} \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) c_{m+1} x^m \\ y''(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^{n+1} \end{aligned}$$

Sostituendo nella (C4) si ha

$$xy'' + (b - x)y' - ay = \sum_{n=0}^{\infty} [n(n+1)c_{n+1} + b(n+1)c_{n+1} - n c_n - a c_n] x^n = 0 \quad (\text{C6})$$

Poiché ogni coefficiente di x^n deve annullarsi, abbiamo la relazione di ricorrenza seguente:

$$(b+n)(n+1)c_{n+1} = (a+n)c_n \quad (\text{C7})$$

Fissato c_0 si ha:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{a c_0}{b \cdot 1} \\ c_2 &= \frac{a+1}{b+1} \frac{c_1}{2} = \frac{a(a+1)}{b(b+1)} \frac{c_0}{1 \cdot 2} \\ &\dots \\ c_n &= \frac{a(a+1) \dots (a+n-1)}{b(b+1) \dots (b+n-1)} \frac{c_0}{n!} = \frac{(a)_n}{(b)_n} \frac{c_0}{n!} \end{aligned}$$

$(x - x_0)^2 q(x)$ sono sviluppabili in serie di Taylor in un intorno di x_0 , si dice che il punto x_0 è una *singolarità regolare* o *Fuchsiana*. In tal caso la $y(x)$ è anche essa sviluppabile in serie di Taylor in un intorno di x_0 . Se tutti i punti singolari sono Fuchsiani allora l'equazione si dice *totalmente Fuchsiana*.

⁴Il nome deriva dal fatto che questa equazione è ottenuta dall'equazione ipergeometrica facendo "confluire" la singolarità Fuchsiana x_2 in $x = 0$.

e quindi

$$y(x) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n} \frac{x^n}{n!} = c_0 \cdot {}_1F_1(a; b; x) \quad (\text{C8})$$

Per trovare l'integrale generale dell'equazione (C4) è necessario trovare una seconda soluzione linearmente indipendente. Vi sono due alternative: la *funzione di Kummer* oppure la *funzione di Whittaker*, sulle quali però non ci soffermeremo.

D Serie di funzioni ortogonali (cenni)

Consideriamo l'insieme delle funzioni $f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ di classe $\mathbf{L}^2([a, b])$ (in particolare, possiamo anche considerare $[a, b] = \mathbf{R}$). Sia $w(x) : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ sempre positiva ($w(x) > 0$ per $x \in [a, b]$), che supporremo per semplicità continua. La funzione $w(x)$ si definisce come “funzione peso” o “misura”. Definiamo il prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (secondo la misura $w(x)$) tra due funzioni f e g come segue:

$$\langle g, f \rangle = \int_a^b w(x) dx g^*(x) f(x) \quad (\text{D1})$$

Si lascia come esercizio il provare che $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è una forma bilineare, cioè:

$$\langle h, af + bg \rangle = a \langle h, f \rangle + b \langle h, g \rangle \quad (\text{D2})$$

$$\langle af + bg, h \rangle = a^* \langle f, h \rangle + b^* \langle g, h \rangle \quad (\text{D3})$$

$$\langle f, f \rangle \geq 0 \quad (\text{D4})$$

Inoltre è facile vedere che $\langle g, f \rangle = \langle f, g \rangle^*$. Si noti però che il prodotto scalare è definito semipositivo, ovvero in generale $\langle f, f \rangle \neq 0$. Si definisce *norma* di una funzione f la quantità:

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} \quad (\text{D5})$$

Lo spazio $\mathbf{L}^2([a, b])$ munito del prodotto scalare (D1) è uno spazio vettoriale a infinite dimensioni (in quanto non è possibile scrivere una qualunque funzione f come combinazione lineare di un numero finito di funzioni). Vale la *diseguaglianza di Cauchy-Schwarz*:

$$|\langle g, f \rangle| \leq \|f\| \|g\| \quad (\text{D6})$$

Infatti, consideriamo la seguente funzione

$$h(\lambda) = \|f + \lambda\langle g, f \rangle g\|^2 = \|f\|^2 + 2\lambda|\langle g, f \rangle|^2 + \lambda^2|\langle g, f \rangle|^2\|g\|^2 \quad (\text{D7})$$

con λ reale. Evidentemente $h(\lambda) \geq 0$ per costruzione. In particolare ciò rimane vero per il valore di λ che minimizza h , ovvero:

$$h'(\lambda_{\min}) = 0 \Rightarrow \lambda_{\min} = -\|g\|^{-2} \quad (\text{D8})$$

Sostituendo in (D7) si ha

$$h(\lambda_{\min}) = \|f\|^2 - |\langle g, f \rangle|^2\|g\|^{-2} \geq 0 \quad (\text{D9})$$

da cui discende l'asserto. Da questa proprietà discende che se $\|f\| = 0 \Rightarrow \langle g, f \rangle = 0, \forall g$.

Due funzioni f e g si dicono *ortogonali* se il loro prodotto scalare è nullo:

$$\langle g, f \rangle = 0 \quad (\text{D10})$$

In particolare, consideriamo una successione di funzioni $\{\phi_n\}_{n \in \mathbf{N}}$. Questa successione si dice *ortogonale* se per $m \neq n$ si ha $\langle \phi_n, \phi_m \rangle = 0$. Se poi accade che $\|\phi_n\| = 1, \forall n$ la successione si dice *ortonormale*.

Consideriamo un sistema ortonormale $\{\phi_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ e una funzione $f \in \mathbf{L}^2([a, b])$. Ci chiediamo quanto una combinazione lineare dei ϕ_n del tipo

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n \phi_n(x) \quad (\text{D11})$$

possa approssimare la funzione f . Consideriamo una successione $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ di numeri complessi e definiamo il *resto* N -esimo come:

$$R_N(x) = f(x) - \sum_{n=1}^N a_n \phi_n(x) \quad (\text{D12})$$

Definiamo la “media” del resto come:

$$I_N = \|R_N\|^2 = \int_a^b |R_N(x)|^2 w(x) dx \quad (\text{D13})$$

Definiamo inoltre i *coefficienti di Fourier* come le seguenti quantità:

$$c_n = \langle \phi_n, f \rangle \quad (\text{D14})$$

Dimostriamo la seguente proprietà: *i coefficienti c_n sono quelli che minimizzano la media del resto.* Infatti definendo:

$$I_N^{(F)} = \left\| f - \sum_{n=1}^N c_n \phi_n \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^N |c_n|^2 \quad (\text{D15})$$

si ha:

$$\begin{aligned} I_N &= \left\| f - \sum_{n=1}^N a_n \phi_n \right\|^2 \\ &= \left\langle f - \sum_{n=1}^N a_n \phi_n, f - \sum_{n=1}^N a_n \phi_n \right\rangle \\ &= \|f\|^2 + \sum_{n=1}^N (|a_n|^2 - a_n c_n^* - a_n^* c_n) \\ &= \|f\|^2 + \sum_{n=1}^N (|a_n|^2 - a_n c_n^* - a_n^* c_n + |c_n|^2) - \sum_{n=1}^N |c_n|^2 \\ &= \|f\|^2 + \sum_{n=1}^N |c_n - a_n|^2 - \sum_{n=1}^N |c_n|^2 \\ &\geq \|f\|^2 - \sum_{n=1}^N |c_n|^2 = I_N^{(F)} \end{aligned} \quad (\text{D16})$$

Ne segue quindi che la serie

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} c_n \phi_n(x) = \sum_{n \in \mathbf{N}} \langle \phi_n, f \rangle \phi_n(x) \quad (\text{D17})$$

è quella che fornisce la migliore approssimazione della funzione f . In particolare, poiché $I_N^{(F)} \geq 0$, passando al limite per $N \rightarrow \infty$ si ha la *disegualianza di Bessel*:

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} |c_n|^2 = \sum_{n \in \mathbf{N}} |\langle \phi_n, f \rangle|^2 \leq \|f\|^2 \quad (\text{D18})$$

Quando vale l'egualianza, la relazione precedente prende il nome di *egualianza di Parseval*:

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} |c_n|^2 = \|f\|^2 \quad (\text{D19})$$

Se ciò accade si ha che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_n^{(F)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{n=1}^N c_n \phi_n \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n \in \mathbf{N}} |c_n|^2 = 0 \quad (\text{D20})$$

In tal caso, si dice che la serie

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} c_n \phi_n(x) \quad (\text{D21})$$

converge *è in media* a f , e scrive:

$$f(x) \stackrel{\text{i.m.}}{=} \sum_{n \in \mathbf{N}} c_n \phi_n(x) \quad (\text{D22})$$

(spesso però si sottintende la scritta “i.m.”). Si noti che, essendo il prodotto scalare semidefinito positivo, la convergenza in media non implica necessariamente la convergenza puntuale, ovvero non è detto che per ogni $x \in [a, b]$ si abbia:

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N c_n \phi_n(x) \quad (\text{D23})$$

Inoltre, in generale non è detto che, dato un sistema ortonormale $\{\phi_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, ogni funzione $f \in \mathbf{L}^2([a, b])$ possa scriversi come una combinazione dei ϕ_n , sia pure in media.⁵ Quando ciò accade si dice che il sistema dei $\{\phi_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ è un *sistema ortonormale completo* (abbrev. *s.o.n.c.*).⁶ In tal caso si dice che $\{\phi_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ genera lo spazio $\mathbf{L}^2([a, b])$. Un sistema $\{\phi_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ non completo genererà un sottospazio $\mathbf{S} \subset \mathbf{L}^2([a, b])$, ovvero lo spazio di tutte le funzioni costruite come combinazioni lineari dei ϕ_n . In questo sottospazio i $\{\phi_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ costituiranno quindi un sistema completo.

E Serie di Fourier (o trigonometriche)

Consideriamo l'intervallo $[-a, a]$ e $w(x) = 1$. Consideriamo l'insieme dei $\{\phi_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ definito come:

$$\phi_n(x) = \exp\left(i \frac{\pi n x}{a}\right) \quad (\text{E1})$$

⁵In uno spazio finito-dimensionale di dimensione p invece, un sistema di $\{\mathbf{e}_p\}_{p=1 \dots n}$ di vettori ortonormali costituisce sempre una base dello spazio, ovvero ogni vettore \mathbf{v} appartenente allo spazio può scriversi come $\mathbf{v} = \sum_p v_p \mathbf{e}_p$.

⁶Il fatto che non tutte le successioni di funzioni ortonormali possano essere complete si capisce immediatamente da questo fatto: se da una sistema $\{\phi_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ completo si estrae ad esempio ϕ_0 la restante sottosuccessione $\{\phi_n\}_{n \geq 0}$ pur essendo infinita sarà incompleta, in quanto ϕ_0 non potrà essere scritta come combinazione lineare degli altri ϕ_n .

E' facile mostrare che:

$$\langle \phi_m, \phi_n \rangle = \int_{-a}^{+a} dx \phi_m^*(x) \phi_n(x) = 2a \delta_{mn} \quad (\text{E2})$$

Infatti, se $m = n$ l'asserto è banale. Se $m \neq n$ si ha:

$$\int_{-a}^{+a} dx \exp\left(i \frac{\pi(n-m)x}{a}\right) = \frac{a}{i\pi(n-m)} \left[\exp\left(i \frac{\pi(n-m)x}{a}\right) \right]_{x=-a}^{x=+a} = 0 \quad (\text{E3})$$

Le corrispondenti funzioni ortonormali sono evidentemente

$$\phi'_n(x) = (2a)^{-1/2} \phi_n(x) \quad (\text{E4})$$

Si può mostrare che il sistema dei ϕ'_n costituisce un s.o.n.c. per lo spazio $\mathbf{L}^2([-a, a])$, che quindi ogni funzione $f(x) : [-a, a] \rightarrow \mathbf{C}$ a quadrato sommabile può essere scritta in termini di serie dei ϕ'_n :

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c'_n \phi'_n(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c'_n \frac{1}{\sqrt{2a}} \exp\left(i \frac{\pi n x}{a}\right) \quad (\text{E5})$$

dove i coefficienti c'_n sono dati da:

$$c'_n = \langle \phi_n, f \rangle = \int_{-a}^{+a} dy \frac{1}{\sqrt{2a}} \exp\left(-i \frac{\pi n y}{a}\right) f(y) \quad (\text{E6})$$

Per ragioni di praticità si conviene scrivere la serie in termine dei ϕ_n anziché dei ϕ'_n :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left(i \frac{\pi n x}{a}\right) \quad (\text{E7})$$

con

$$c_n = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} dy f(y) \exp\left(-i \frac{\pi n y}{a}\right) \quad (\text{E8})$$

La serie (E7) viene detta *serie di Fourier trigonometrica in forma complessa*. Si ricordi che l'identità (E7) va intesa in media. Vale tuttavia il *teorema di Dirichelet*, che qui ci limitiamo ad enunciare: *se la $f(x)$ presenta delle discontinuità di prima specie, la (E7) da come risultato la funzione \bar{f} definita come:*

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{2} \left[\lim_{y \rightarrow x^-} f(y) + \lim_{y \rightarrow x^+} f(y) \right]$$

Nei punti di continuità quindi la $\bar{f}(x)$ coincide con la funzione $f(x)$, mentre nei punti di discontinuità la $\bar{f}(x)$ assume il valore medio tra i limiti destro e sinistro. Si noti che se $f(x)$ è una funzione pari (ovvero $f(-x) = f(x)$) si ha $c_{-n} = c_n$, mentre se la $f(x)$ è una funzione dispari (ovvero $f(-x) = -f(x)$) si ha $c_{-n} = -c_n$. Se, infine, la $f(x)$ è reale si ha $c_{-n} = c_n^*$.

Se utilizziamo le formule di Eulero per le funzioni trigonometriche, vediamo che la (E7) può essere riscritta nella forma usuale (*serie di Fourier trigonometrica in forma reale*):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{a} + b_n \sin \frac{n\pi x}{a} \right) \quad (\text{E9})$$

con

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{1}{a} \int_{-a}^{+a} dy f(y) \cos \frac{\pi n y}{a} \quad (\text{E10})$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = \frac{1}{a} \int_{-a}^{+a} dy f(y) \sin \frac{\pi n y}{a} \quad (\text{E11})$$

$n \in \mathbf{N}$. Se $f(x)$ è reale, gli a_n e b_n sono reali. Se $f(x)$ è pari si ha $b_n = 0$ e

$$a_n = \frac{2}{a} \int_0^a dy f(y) \cos \frac{\pi n y}{a} \quad (\text{E12})$$

Invece se $f(x)$ è dispari si ha $a_n = 0$ e

$$b_n = \frac{2}{a} \int_0^a dy f(y) \sin \frac{\pi n y}{a} \quad (\text{E13})$$

Vale infine l'identità di Parseval:

$$\frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} dx |f(x)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \right] \quad (\text{E14})$$

La proprietà più importante delle serie di Fourier trigonometriche è che esse descrivono funzioni periodiche di periodo $2a$. Infatti, poiché

$$\exp \left(i \frac{\pi n (x + 2ak)}{a} \right) = \exp \left(i \frac{\pi n x}{a} \right) e^{2ikn\pi} = \exp \left(i \frac{\pi n x}{a} \right) \quad (\text{E15})$$

se $k \in \mathbf{Z}$, si vede facilmente che $f(x + 2ka) = f(x)$. Ne consegue che ogni funzione periodica può essere scritta in termini di serie di seni e coseni.

Esempi di serie di Fourier.

1) Calcolare lo sviluppo in serie di Fourier della funzione (*onda quadra*):

$$f(x) = 2\vartheta(x) - 1 = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad x \in [-a, a]$$

$$f(x) = f(x - 2ka), \quad x \in [(2k - 1)a, (2k + 1)a], \quad k \in \mathbf{Z} \quad (\text{E16})$$

dove $\vartheta(x)$ è la *funzione scalino* (o *funzione di Heavyside*), definita come:

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad (\text{E17})$$

Poiché la funzione è dispari avremo $a_n = 0$ e:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{a} \int_0^a dx \sin \frac{\pi nx}{a} \\ &\stackrel{y = \frac{\pi nx}{a}}{=} \frac{2}{n\pi} \int_0^{n\pi} dx \sin y \\ &= \frac{2}{n\pi} [-\cos y]_0^{n\pi} \\ &= \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n] = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ \frac{4}{(2k+1)\pi} & n = 2k + 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{E18})$$

Lo sviluppo in serie di Fourier sarà quindi:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{a} \\ &= \frac{4}{\pi} \left[\sin \frac{\pi x}{a} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{a} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi x}{a} + \dots \right] \end{aligned} \quad (\text{E19})$$

In figura 3 è mostrata la funzione $f(x)$ con la serie troncata al 1°, 2°, 3° e 4° termine, rispettivamente. Si noti come nei punti di discontinuità (per esempio, in $x = 0$) la serie tenda effettivamente alla media dei limiti destri e sinistro. Inoltre, per $x = a/2$ si ha $f(x) = 1$. Poiché $\sin(k + 1/2)\pi = (-1)^k$ si ha la relazione notevole:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad (\text{E20})$$

Utilizzando l'identità di Parseval, si ha anche:

$$\frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} |f(x)|^2 = 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \quad (\text{E21})$$

da cui ricaviamo la relazione

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \quad (\text{E22})$$

Utilizzando quest'ultima relazione, si lascia come esercizio dimostrare la seguente:⁷

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \quad (\text{E23})$$

⁷Si definisce funzione *zeta di Riemann* la serie

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \dots$$

valida per $\text{Re}[x] > 1$ sebbene si possa estendere per continuazione analitica a tutto il piano complesso, tranne che per $x = 1$, dove ha un polo semplice. La funzione $\zeta(x)$ ha importanti applicazioni in meccanica statistica e in teoria dei numeri. E' facile mostrare le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \zeta(x) &= \frac{1}{1-2^{-x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^x} \\ \zeta(x) &= \frac{1}{1-2^{1-x}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x} \end{aligned}$$

Si può anche mostrare che valgono le seguenti rappresentazioni della ζ :

$$\begin{aligned} \zeta(x) &= \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^{\infty} dt \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} = \frac{1}{(1-2^{1-x})\Gamma(x)} \int_0^{\infty} dt \frac{t^{x-1}}{e^t + 1} \\ \zeta(x) &= \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^{\infty} dt \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} = \frac{1}{(1-2^{1-x})\Gamma(x)} \int_0^{\infty} dt \frac{t^{x-1}}{e^t + 1} \\ \frac{1}{\zeta(x)} &= \prod_{k=1}^{\infty} (1 - p_k^{-x}) = (1-2^{-x}) \cdot (1-3^{-x}) \cdot (1-5^{-x}) \dots \end{aligned}$$

dove p_k è il k -esimo numero primo. Dalla (E23) ricaviamo quindi $\zeta(2) = \pi^2/6$.

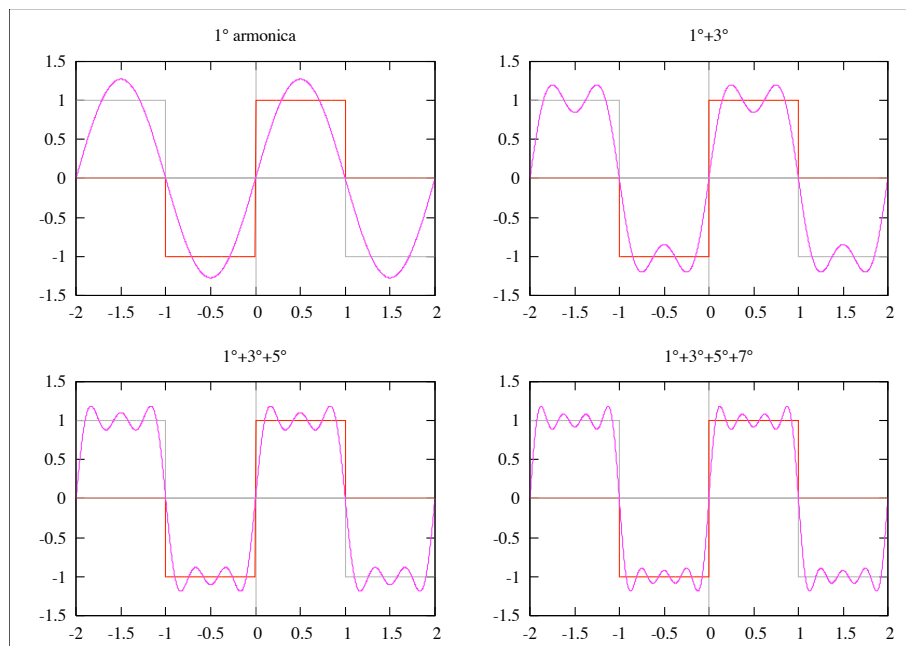


Figura 3: L'onda quadra con $a = 1$ e la sua espansione in serie di Fourier.

2) Calcolare lo sviluppo in serie di Fourier della funzione (*dente di sega*):

$$\begin{aligned} f(x) &= x, \quad x \in [-a, a] \\ f(x) &= f(x - 2ka), \quad x \in [(2k - 1)a, (2k + 1)a], \quad k \in \mathbf{Z} \end{aligned} \quad (\text{E24})$$

La funzione è dispari e quindi $a_n = 0$, mentre

$$b_n = \frac{2}{a} \int_0^a x dx \sin \frac{\pi n x}{a} = \dots = (-1)^{n+1} \frac{2a}{n\pi} \quad (\text{E25})$$

(si lascia il calcolo per esercizio), e quindi la serie vale:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi x}{a} \\ &= \frac{2a}{\pi} \left[\sin \frac{\pi x}{a} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{a} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{a} + \dots \right] \end{aligned} \quad (\text{E26})$$

In figura 4 è mostrata la funzione $f(x)$ con la serie troncata al 1°, 2°, 3° e 4° termine, rispettivamente.

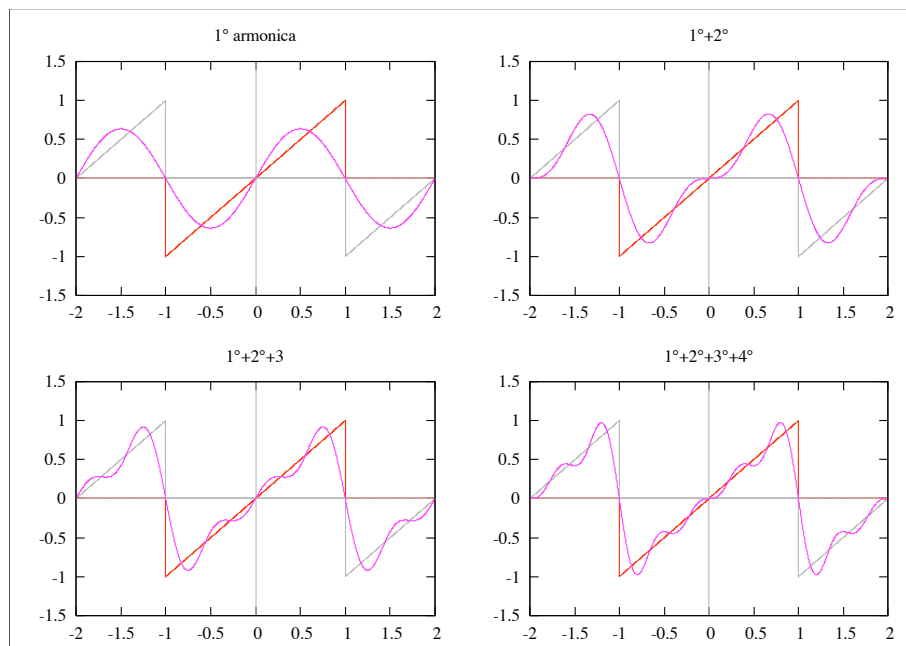


Figura 4: Il “dente di sega” con $a = 1$ e la sua espansione in serie di Fourier.

3) Calcolare lo sviluppo in serie di Fourier della funzione:

$$\begin{aligned} f(x) &= |x|, \quad x \in [-a, a] \\ f(x) &= f(x - 2ka), \quad x \in [(2k - 1)a, (2k + 1)a], \quad k \in \mathbf{Z} \end{aligned} \quad (\text{E27})$$

In questo caso la funzione è pari e quindi $b_n = 0$. Per $n \neq 0$ si ha:

$$a_n = \frac{2}{a} \int_0^a x dx \cos \frac{\pi n x}{a} = \dots = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ -\frac{4a}{((2k+1)\pi)^2} & n = 2k + 1 \end{cases} \quad (\text{E28})$$

(si lascia il calcolo per esercizio), mentre per $n = 0$ si ha:

$$a_0 = \frac{2}{a} \int_0^a x dx = a \quad (\text{E29})$$

La serie vale quindi:

$$f(x) = a \left[\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{a} \right] \quad (\text{E30})$$

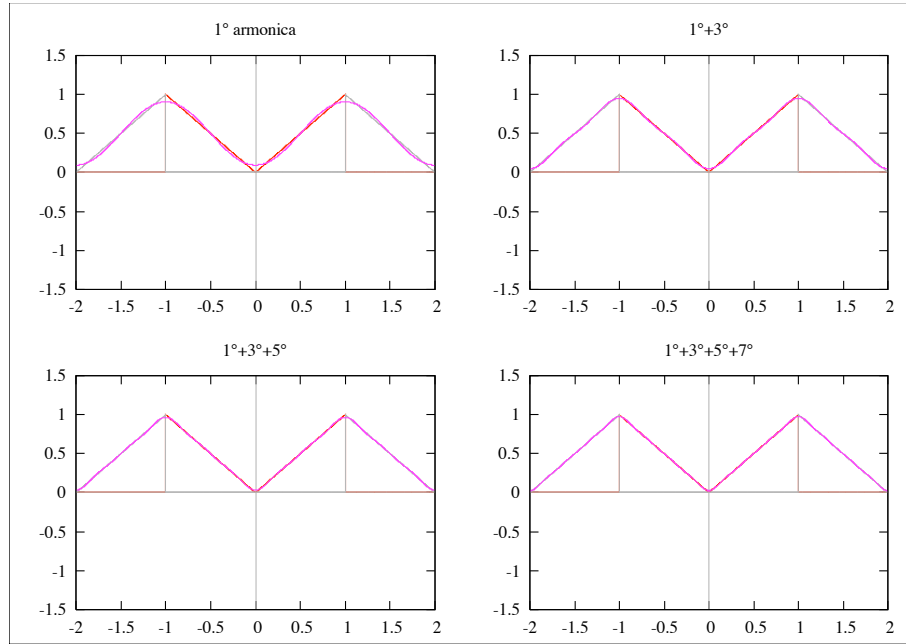


Figura 5: La funzione relativa all'esempio 3) con $a = 1$ e la sua espansione in serie di Fourier.

In figura 5 è mostrata la funzione $f(x)$ con la serie troncata al 1°, 2°, 3° e 4° termine, rispettivamente. Usando l'identità di Parseval si ha

$$\frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} x^2 = \frac{2a^2}{3} = \frac{a^2}{2} + \frac{16a^2}{\pi^4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} \quad (\text{E31})$$

da cui ricaviamo la relazione⁸

$$\frac{\pi^4}{96} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-(-1)^k}{(2k+1)^4} = 1 - \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} - \frac{1}{7^4} + \dots \quad (\text{E32})$$

4) Calcolare lo sviluppo in serie di Fourier della funzione:

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos zx, & x &\in [-\pi, \pi] \\ f(x) &= f(x - 2k\pi), & x &\in [(2k-1)\pi, (2k+1)\pi], \quad k \in \mathbf{Z} \end{aligned} \quad (\text{E33})$$

⁸Dalla quale ricaviamo anche $\zeta(4) = \pi^4/90$.

con $z \neq \text{intero}$. Poiché questa funzione è pari, $b_n = 0$ e

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi dx \cos zx \cos nx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^\pi dx \cos(z-n)x + \int_0^\pi dx \cos(z+n)x \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(z-n)\pi}{z-n} + \frac{\sin(z+n)\pi}{z+n} \right] \\
 &= \frac{2(-1)^n z \sin \pi z}{\pi} \frac{1}{z^2 - n^2}
 \end{aligned} \tag{E34}$$

per cui la serie diviene:

$$f(x) = \cos \pi z = \frac{2z \sin \pi z}{\pi} \left[\frac{1}{2z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{z^2 - n^2} \right] \tag{E35}$$

In particolare, poiché la funzione $f(x)$ è sempre continua, per $x = \pi$ si ottiene la seguente relazione notevole:⁹

$$\frac{\cot \pi z}{\pi z} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2} \tag{E36}$$

⁹Si lascia per esercizio dimostrare, per mezzo dello sviluppo in serie di Fourier della funzione $\cosh zx$ in $[-\pi, \pi]$ che:

$$\frac{\coth \pi z}{\pi z} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^2 + n^2}$$

la quale si potrebbe ottenere per continuazione analitica della (E36) per $z \rightarrow iz$. Inoltre, riscrivendo la (E36) nella forma

$$\pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} - \frac{1}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

e integrando ambo i membri da 0 a θ/π si ottiene anche questa relazione notevole:

$$\sin \theta = \theta \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\theta^2}{n^2 \pi^2} \right)$$

in cui gli zeri della funzione seno sono stati esplicitati. Ponendo inoltre $\theta = \pi/2$ si ottiene la celebre *formula di Wallis*:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots$$

F Problemi di Sturm-Liouville (cenni)

Si consideri l'equazione differenziale omogenea del II ordine:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (\text{F1})$$

dove, per semplicità, supponiamo $p(x)$ e $q(x)$ reali. Come noto questa equazione, sotto ipotesi abbastanza generali, ammette un'unica soluzione qualora siano fissate le *condizioni iniziali* $y(x_0) = y_0$ e $y'(x_0) = y'_0$. Il problema di risolvere l'equazione (F1) una volta che siano fissate le condizioni iniziali viene detto *problema di Cauchy*. Spesso in fisica è però necessario fissare anziché delle condizioni iniziali delle *condizioni al contorno* (o *ai bordi*) *omogenee* del tipo:

$$\begin{cases} \alpha y(a) + \alpha' y'(a) = 0 \\ \beta y(b) + \beta' y'(b) = 0 \end{cases} \quad (\text{F2})$$

con $a < b$ (eventualmente anche $a = -\infty$ e/o $b = +\infty$) e $|\alpha| + |\alpha'| \neq 0$ e $|\beta| + |\beta'| \neq 0$. Intanto notiamo che $y = 0$ è sempre una soluzione banale del problema e che se $y(x)$ è una soluzione lo è anche $cy(x)$ con c costante, e quindi le soluzioni del problema se esistono non sono uniche. Inoltre l'esistenza della soluzione (a parte la soluzione "banale" $y = 0$) non è in generale garantita. Si consideri ad esempio il caso $\alpha' = \beta' = 0$. La condizione al contorno diviene $y(a) = y(b) = 0$. Ciò equivale a forzare la soluzione della (F1) ad avere degli zeri in a e b . Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono due soluzioni linearmente indipendenti della (F1), l'integrale generale sarà:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad (\text{F3})$$

La richiesta $y(a) = y(b) = 0$ equivale a chiedere

$$\begin{cases} c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) = 0 \\ c_1 y_1(b) + c_2 y_2(b) = 0 \end{cases} \quad (\text{F4})$$

Questa equazione ammette la soluzione non banale solo se

$$\begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{F5})$$

Questa condizione non è in generale garantita. La situazione è però differente se $p(x)$ e/o $q(x)$ contengono un parametro libero λ . In tal caso la (F5) diventa

un'equazione in λ . Nel seguito supporremo che solo $q(x)$ dipenda da λ e che vi dipenda anche linearmente:

$$q(x) = s(x) - \lambda r(x) \quad (\text{F6})$$

Inoltre supporremo $r(x) > 0$ per $x \in [a, b]$. Il problema da risolvere sarà quindi del tipo

$$y'' + p(x)y' + s(x)y = \lambda r(x)y \quad (\text{F7})$$

con le condizioni al contorno (F2). Un problema del genere è noto come *problema di Sturm-Liouville*; i valori di λ per cui si hanno soluzioni non banali sono chiamati *autovalori* e le $y(x)$ corrispondenti sono chiamate *autofunzioni*. Intanto conviene riscrivere l'equazione (F7) nella *forma autoaggiunta*:

$$\frac{1}{w(x)} \left[\frac{d}{dx} P(x) \frac{d}{dx} + S(x) \right] y(x) = \lambda y(x) \quad (\text{F8})$$

dove

$$P(x) = \exp \left[\int p(x) dx \right] \quad (\text{F9})$$

e $S(x) = s(x)P(x)$, $w(x) = r(x)P(x)$. Si può facilmente dimostrare il seguente teorema: autofunzioni corrispondenti a diversi autovalori sono ortogonali secondo la misura $w(x)$:

$$\langle y_{\lambda_1}, y_{\lambda_2} \rangle = \int_a^b w(x) dx y_{\lambda_1}(x) y_{\lambda_2}(x) = 0 \quad (\text{F10})$$

Per semplicità lo dimostriamo nel caso in cui $\alpha' = \beta' = 0$ (oppure $\alpha = \beta = 0$). Infatti se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, avremo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{w(x)} \left[\frac{d}{dx} P(x) \frac{d}{dx} + S(x) \right] y_{\lambda_1}(x) &= \lambda_1 y_{\lambda_1}(x) \\ \frac{1}{w(x)} \left[\frac{d}{dx} P(x) \frac{d}{dx} + S(x) \right] y_{\lambda_2}(x) &= \lambda_2 y_{\lambda_2}(x) \end{aligned}$$

Moltiplicando la prima di queste equazioni per $W y_{\lambda_2}$ e la seconda per $W y_{\lambda_1}$ e sottraendo membro a membro, otterremo:

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \lambda_2) W y_{\lambda_1} y_{\lambda_2} &= y_{\lambda_2} \frac{d}{dx} P \frac{d}{dx} y_{\lambda_1} - y_{\lambda_1} \frac{d}{dx} P \frac{d}{dx} y_{\lambda_2} \\ &= \frac{d}{dx} P [y'_{\lambda_2} y_{\lambda_1} - y_{\lambda_2} y'_{\lambda_1}] \end{aligned}$$

Integrando membro a membro da a a b si ha:

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b W dx y_{\lambda_1} y_{\lambda_2} = P[y'_{\lambda_2} y_{\lambda_1} - y_{\lambda_2} y'_{\lambda_1}] \Big|_{x=a}^{x=b} \quad (\text{F11})$$

e considerando che $y_{\lambda_{1,2}}(a) = y_{\lambda_{1,2}}(b) = 0$ (oppure $y'_{\lambda_{1,2}}(a) = y'_{\lambda_{1,2}}(b) = 0$) si ha l'asserto. E' quindi possibile normalizzare le y_λ in modo che il sistema delle autofunzioni di un problema di Sturm-Liouville costituisca un sistema ortonormale. Si noti che, in base alla precedente dimostrazione, la condizione di ortogonalità è ancora valida se:

- $P(a) = 0$: in tal caso è sufficiente richiedere che $\lim_{x \rightarrow a} P(x)y(x) = 0$ (in particolare ciò è vero se $y(a)$ è finito); ovviamente lo stesso vale per $x = b$ se $P(b) = 0$;
- $P(a) = P(b) \neq 0$: in tal caso l'ortogonalità è valida anche se anziché le (F2) valgono condizioni al contorno *periodiche*, ovvero $y(a) = y(b)$ e $y'(a) = y'(b)$

Si può mostrare che, sotto opportune condizioni, si ha anche:

1. Gli autovalori $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ del problema sono reali e costituiscono una infinità numerabile;
2. Le autofunzioni $\{y_n(x)\}_{n \in \mathbf{N}}$ costituiscono un s.o.n.c. nello spazio delle funzioni di $\mathbf{L}^2([a, b])$;
3. nessun autovalore è *degenere*, ovvero a ogni λ_n corrisponde uno e un solo $y_n(x)$ a norma 1.

Per semplicità non dimostreremo questo teorema ma ci limiteremo all'illustrazione di un semplice esempio di applicazione.

Esempio: (corda vibrante con estremi fissi) risolvere l'equazione delle onde

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{F12})$$

(v è la velocità dell'onda nella corda) con le condizioni al contorno $\psi(a, t) = \psi(-a, t) = 0, \forall t$. Utilizziamo il metodo della *separazione delle variabili* ovvero facciamo l'ansatz $\psi(x, t) = X(x)T(t)$. Sostituendo nella (F12) avremo:

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \frac{1}{v^2 T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} \quad (\text{F13})$$

Poiché il primo membro dell'equazione dipende solo da x mentre il secondo dipende solo da t , si può supporre che entrambi i membri sono uguali ad una medesima costante λ :

$$\begin{aligned}\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} &= \lambda \\ \frac{1}{v^2 T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} &= \lambda\end{aligned}\tag{F14}$$

Come è facile vedere, le condizioni al contorno equivalgono a richiedere $X(a) = X(-a) = 0$. Con questa condizione, la prima delle (F14) diviene un problema di Sturm-Liouville (con $P(x) = w(x) = 1$ e $S(x) = 0$). È facile mostrare che se $\lambda \geq 0$ l'unica soluzione possibile è quella banale, $X(x) = 0$. Poniamo allora $\lambda = -k^2$, con k reale. La soluzione generale sarà quindi:

$$X(x) = A \cos kx + B \sin kx\tag{F15}$$

con A e B costanti arbitrarie. Imponendo le condizioni al contorno avremo:

$$\begin{aligned}X(a) &= A \cos ka + B \sin ka = 0 \\ X(-a) &= A \cos ka - B \sin ka = 0\end{aligned}$$

Questo sistema ammette soluzioni non banali se:

$$\begin{vmatrix} \cos ka & \sin ka \\ \cos ka & -\sin ka \end{vmatrix} = -\sin 2ka = 0\tag{F16}$$

che ha soluzione:

$$k_n = \frac{n\pi}{2a}\tag{F17}$$

con $n \in \mathbf{N}$. Come si vede, per $n = 0$ si ha solo la soluzione banale. Per $n \neq 0$ si ha:

$$A \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = B \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\tag{F18}$$

Per n pari si ha $\sin(n\pi/2) = 0$ e quindi $A = 0$. Analogamente, per n dispari si ha $B = 0$. In definitiva le autofunzioni (non normalizzate) del problema sono:

$$X_n(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) & n \text{ pari} \\ \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) & n \text{ dispari} \end{cases}\tag{F19}$$

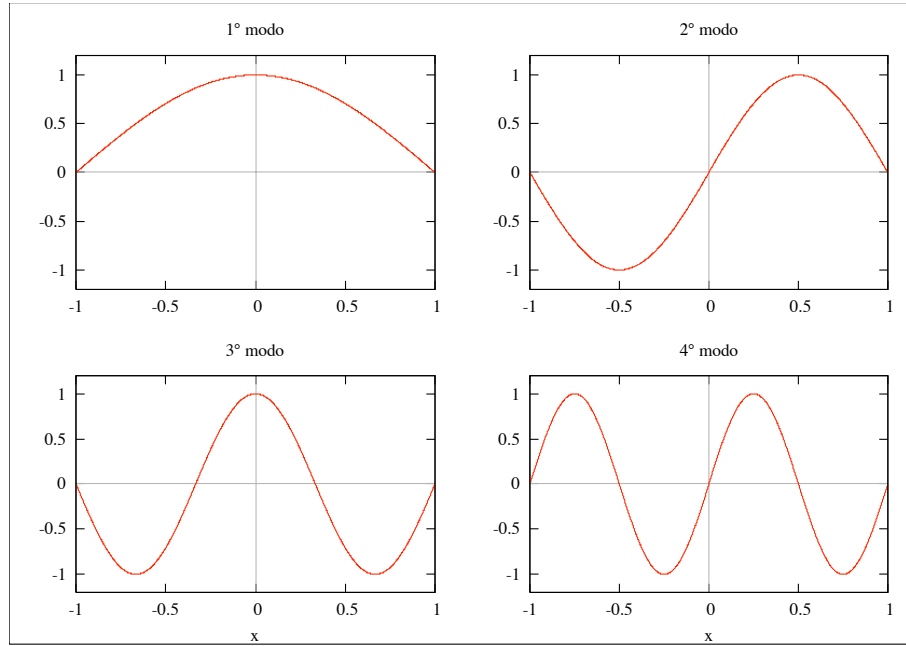


Figura 6: I primi quattro modi propri della corda vibrante per $a = 1$.

che, come è facile mostrare, sono ortogonali, cioè se $m \neq n$:

$$\int_{-a}^{+a} dx X_n(x) X_m(x) = 0 \quad (\text{F20})$$

In figura 6 sono mostrate le autofunzioni $X_n(x)$ per $n = 1, \dots, 4$ (per $a = 1$). Le corrispondenti autofunzioni per $T(t)$ si otterranno risolvendo la seconda delle (F14) per $\lambda = -k_n^2$, cioè:

$$T_n(t) = \alpha_n \cos \omega_n t + \beta_n \sin \omega_n t \quad (\text{F21})$$

dove $\omega_n = k_n v$ sono le frequenze proprie della corda. Le funzioni $\psi_n(x, t) = X_n(x) T_n(t)$ sono note come “modi propri” della corda vibrante e corrispondono a onde stazionarie della corda stessa. La soluzione generale del problema sarà quindi una sovrapposizione dei modi propri:

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x, t) \quad (\text{F22})$$

Le costanti α_n e β_n si possono trovare imponendo le *condizione iniziali*, ovvero “posizione” e “velocità” di ogni punto della corda all’istante $t = 0$:

$$\begin{aligned}\psi(x, 0) &\equiv \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n X_n(x) = \psi_0(x) \\ \left. \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) \right|_{t=0} &\equiv \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \beta_n X_n(x) = \eta_0(x)\end{aligned}$$

Gli α_n e i β_n altro non sono quindi che i coefficienti di Fourier delle funzioni ψ_0 ed η_0 rispetto alla base $X_n(x)$.

G Polinomi ortogonali (cenni)

In analogia agli spazi vettoriali finito-dimensionali, dato un insieme di funzioni linearmente indipendenti $\{\psi_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ è sempre possibile costruire una combinazione lineare di essi tali che questi siano ortonormali (procedimento di Gram-Schmidt). Il procedimento è simile a quello per il caso finito dimensionale, ovvero costruiamo un nuovo sistema $\chi_n(x)$ come segue:

$$\begin{aligned}\chi_0(x) &\equiv \psi_0(x) \\ \chi_1(x) &\equiv \psi_1(x) - \frac{\langle \psi_1, \chi_0 \rangle}{\|\chi_0\|} \chi_0(x) \\ \chi_2(x) &\equiv \psi_2(x) - \frac{\langle \psi_2, \chi_0 \rangle}{\|\chi_0\|} \chi_0(x) - \frac{\langle \psi_2, \chi_1 \rangle}{\|\chi_1\|} \chi_1(x) \\ &\dots \\ \chi_n(x) &\equiv \psi_n(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\langle \psi_n, \chi_k \rangle}{\|\chi_k\|} \chi_k(x)\end{aligned}$$

Ogni χ_n è costruito quindi a partire dai ψ_n eliminando le proiezioni di ψ_n dalle χ_k , con $k < n$. Per costruzione, quindi, il sistema dei $\{\chi_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ è ortogonale. Ovviamente, dai χ_n è possibile ottenere un sistema ortonormale semplicemente come:

$$\phi_n(x) = \frac{\chi_n(x)}{\|\chi_n\|} \tag{G1}$$

Un caso particolare si ha quando $\psi_n(x) = x^n$. In tal caso i χ_n saranno evidentemente dei polinomi chiamati per l’appunto *polinomi ortogonali*. Ovviamente questi polinomi dipenderanno dalla scelta dell’intervallo $[a, b]$ e dalla

funzione peso $w(x)$. Per semplicità, nel seguito discuteremo brevemente solo tre casi notevoli di rilevanza per il presente corso. Verranno inoltre mostrate alcune proprietà che per semplicità verranno date senza dimostrazione.

1) **Polinomi di Legendre:** $[a, b] = [-1, 1]$, $w(x) = 1$. Essi vengono denotati usualmente come $P_n(x)$. Qui di seguito mostriamo i primi cinque polinomi di Legendre:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= -\frac{1}{2} + \frac{3x^2}{2} \\ P_3(x) &= -\frac{3x}{2} + \frac{5x^3}{2} \\ P_4(x) &= \frac{3}{8} - \frac{15x^2}{4} + \frac{35x^4}{8} \\ P_5(x) &= \frac{15x}{8} - \frac{35x^3}{4} + \frac{63x^5}{8} \end{aligned}$$

I polinomi di Legendre possono essere ottenuti come soluzione dell'equazione differenziale (*equazione di Legendre*):

$$(1 - x^2) \frac{d^2 P_n(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_n(x)}{dx} + n(n + 1)P_n(x) = 0 \quad (\text{G2})$$

ovvero, in forma autoaggiunta:

$$-\frac{d}{dx}(1 - x^2) \frac{d}{dx} P_n(x) = n(n + 1)P_n(x) \quad (\text{G3})$$

Poiché $P(x) = 1 - x^2$ e $P(-1) = P(1) = 0$ si può mostrare che i polinomi di Legendre sono soluzione di un problema di Sturm-Liouville in cui l'unica richiesta è che $P_n(-1)$ e $P_n(1)$ siano finiti.

Condizione di normalizzazione:¹⁰

$$\int_{-1}^{+1} dx P_n(x) P_m(x) = \frac{2}{2n + 1} \delta_{nm} \quad (\text{G4})$$

¹⁰Si noti che, per come sono scritti, i polinomi di Legendre non sono ortonormali. Ovviamente, definendo

$$\bar{P}_n(x) = \sqrt{\frac{2n + 1}{2}} P_n(x)$$

i $\bar{P}_n(x)$ saranno ortonormali.

Valgono le seguenti espressioni: *Formula di Rodrigues*:

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{x^2 - 1}{2} \right)^n \quad (\text{G5})$$

Funzione generatrice:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}}, \quad (|z| < 1) \quad (\text{G6})$$

Da questa relazione si ricava anche:

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} \right]_{z=0} \quad (\text{G7})$$

In termini della funzione ipergeometrica:

$$P_n(x) = {}_2F_1 \left(-n, n + 1; 1; \frac{1 - x}{2} \right) \quad (\text{G8})$$

Si può inoltre dimostrare i $P_n(x)$ costituiscono un s.o.n.c nell'intervallo $[-1, 1]$.
 Conviene anche definire le *funzioni associate di Legendre*, soluzioni dell'equazione:

$$(1 - x^2) \frac{d^2 P_n^k(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_n^k(x)}{dx} + \left[n(n + 1) - \frac{k^2}{1 - x^2} \right] P_n^k(x) = 0 \quad (\text{G9})$$

con $k \in \mathbf{N}$. Queste funzioni possono essere ricavate dai polinomi di Legendre tramite l'espressione seguente:

$$P_n^k(x) = (1 - x^2)^{k/2} \frac{d^k}{dx^k} P_n(x) \quad (\text{G10})$$

con $0 \leq k \leq n$ (per $k > n$ evidentemente i $P_n^k(x)$ sono identicamente nulli) e soddisfano la relazione di ortogonalità seguente:

$$\int_{-1}^{+1} dx P_n^k(x) P_m^k(x) = \frac{2}{2n + 1} \frac{(n + k)!}{(n - k)!} \delta_{nm}, \quad (n, m > k) \quad (\text{G11})$$

Si definiscono anche le funzioni *armoniche sferiche*:

$$Y_n^k(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2n + 1)!(n - k)!}{4\pi(n + k)!}} e^{ik\phi} P_n^k(\cos \theta), \quad (0 \leq k \leq n) \quad (\text{G12})$$

Per $k \leq 0$ si definisce $Y_n^{-k}(\theta, \phi) = (-1)^k e^{-2ik\phi} Y_n^k(\theta, \phi)$. Le armoniche sferiche soddisfano l'equazione differenziale:

$$\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + n(n+1) \right] Y_n^k(\theta, \phi) = 0 \quad (\text{G13})$$

e la condizione di normalizzazione:

$$\int d\Omega [Y_n^k(\theta, \phi)]^* Y_m^h(\theta, \phi) = \delta_{kh} \delta_{nm} \quad (\text{G14})$$

(con $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ elemento di angolo solido). Vale anche la relazione:

$$\sum_{k=-n}^n |Y_n^k(\theta, \phi)|^2 = \frac{2n+1}{4\pi} \quad (\text{G15})$$

2) **Polinomi di Laguerre:** $[a, b] = [0, +\infty[$, $w(x) = e^{-x}$. Essi vengono denotati usualmente come $L_n(x)$. Qui di seguito mostriamo i primi cinque polinomi di Laguerre:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1 \\ L_1(x) &= 1 - x \\ L_2(x) &= \frac{2 - 4x + x^2}{2} \\ L_3(x) &= \frac{6 - 18x + 9x^2 - x^3}{6} \\ L_4(x) &= \frac{24 - 96x + 72x^2 - 16x^3 + x^4}{24} \\ L_5(x) &= \frac{120 - 600x + 600x^2 - 200x^3 + 25x^4 - x^5}{120} \end{aligned}$$

Equazione differenziale (*di Laguerre*)

$$x \frac{d^2 L_n(x)}{dx^2} + (1-x) \frac{dL_n(x)}{dx} + nL_n(x) = 0 \quad (\text{G16})$$

ovvero, in forma autoaggiunta:

$$-\frac{1}{e^{-x}} \frac{d}{dx} x e^{-x} \frac{d}{dx} L_n(x) = nL_n(x) \quad (\text{G17})$$

Poiché $P(x) = x e^{-x}$ e $P(0) = P(+\infty) = 0$ si può mostrare che i polinomi di Laguerre sono soluzione di un problema di Sturm-Liouville in cui l'unica

richiesta è che $\lim_{x \rightarrow 0, +\infty} x e^{-x} L_n(x) = 0$.

Condizione di normalizzazione:

$$\int_0^{+\infty} dx e^{-x} L_n(x) L_m(x) = \delta_{nm} \quad (\text{G18})$$

Formula di Rodrigues:

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) \quad (\text{G19})$$

Funzione generatrice:

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) z^n = \frac{1}{1-z} \exp\left(-\frac{xz}{1-z}\right) \quad (\text{G20})$$

ovvero:

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left[\frac{1}{1-z} \exp\left(-\frac{xz}{1-z}\right) \right]_{z=0} \quad (\text{G21})$$

In termini della funzione ipergeometrica:

$$L_n(x) = {}_1F_1(-n; 1; x) \quad (\text{G22})$$

Anche qui conviene definire i *polinomi associati di Laguerre* che soddisfano l'equazione differenziale:

$$x \frac{d^2 L_n^k(x)}{dx^2} + (k+1-x) \frac{d L_n^k(x)}{dx} + n L_n^k(x) = 0 \quad (\text{G23})$$

con $k \in \mathbf{N}$. Queste funzioni possono essere ricavate dai polinomi di Laguerre tramite l'espressione seguente:

$$L_n^k(x) = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} L_{n+k}(x) \quad (\text{G24})$$

Condizione di normalizzazione:

$$\int_0^{+\infty} dx e^{-x} L_n^k(x) L_m^k(x) = \frac{(n+k)!}{n!} \delta_{nm} \quad (\text{G25})$$

Formula di Rodrigues:

$$L_n^k(x) = \frac{e^x}{n! x^k} \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+k} e^{-x}) \quad (\text{G26})$$

Funzione generatrice:

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^k(x) z^n = \frac{1}{(1-z)^{k+1}} \exp\left(-\frac{xz}{1-z}\right) \quad (\text{G27})$$

3) **Polinomi di Hermite:** $[a, b] =]-\infty, +\infty[$, $w(x) = e^{-x^2}$. Essi vengono denotati usualmente come $H_n(x)$. Qui di seguito mostriamo i primi cinque polinomi di Hermite:

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= 2x \\ H_2(x) &= -2 + 4x^2 \\ H_3(x) &= -12x + 8x^3 \\ H_4(x) &= 12 - 48x^2 + 16x^4 \\ H_5(x) &= 120x - 160x^3 + 32x^5 \end{aligned}$$

Equazione differenziale (*di Hermite*)

$$\frac{d^2 H_n(x)}{dx^2} - 2x \frac{dH_n(x)}{dx} + 2nH_n(x) = 0 \quad (\text{G28})$$

ovvero, in forma autoaggiunta:

$$-\frac{1}{e^{-x^2}} \frac{d}{dx} e^{-x^2} \frac{d}{dx} H_n(x) = nH_n(x) \quad (\text{G29})$$

Poiché $P(x) = e^{-x^2}$ e $P(-\infty) = P(+\infty) = 0$ si può mostrare che i polinomi di Hermite sono soluzione di un problema di Sturm-Liouville in cui l'unica richiesta è che $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x^2} H_n(x) = 0$.

Condizione di normalizzazione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{nm} \quad (\text{G30})$$

Formula di Rodrigues:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad (\text{G31})$$

Funzione generatrice:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} z^n = \exp(-z^2 + 2zx) \quad (\text{G32})$$

ovvero:

$$H_n(x) = \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left[e^{-z^2+2zx} \right]_{z=0} \quad (\text{G33})$$

In termini della funzione ipergeometrica:

$$\begin{aligned} H_{2n}(x) &= (-1)^n \frac{2n!}{n!} {}_1F_1 \left(-n, ; \frac{1}{2} ; x^2 \right) \\ H_{2n+1}(x) &= (-1)^n \frac{2(2n+1)!}{n!} x {}_1F_1 \left(-n, ; \frac{3}{2} ; x^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{G34})$$

H La trasformata di Fourier

Sia $f(x) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ una funzione di classe $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$ che supporremo per semplicità continua. Si definisce *trasformata integrale di Fourier* (o *spettro*) della funzione f la seguente:¹¹

$$\tilde{f}(k) = F[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx} f(x) \quad (\text{H1})$$

La particolarità della trasformata di Fourier è che la formula di antitrasformazione è simmetrica, ovvero:¹²

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx} \tilde{f}(k) \quad (\text{H2})$$

Una dimostrazione *naïve* di questa proprietà è la seguente. Consideriamo la restrizione di $f_a(x)$ di $f(x)$ all'intervallo $[-a, a]$, cioè:

$$f_a(x) = \begin{cases} f(x) & -a \leq x \leq a \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (\text{H3})$$

Nell'intervallo $[-a, a]$ questa restrizione può essere sviluppata in serie di Fourier trigonometrica in forma complessa, come in (E7):

$$f_a(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left(i \frac{\pi n x}{a}\right) \quad (\text{H4})$$

¹¹Talvolta la trasformata di Fourier è definita senza il fattore $1/\sqrt{2\pi}$; in tal caso, davanti alla formula di antitrasformazione comparirà un fattore $1/2\pi$.

¹²Il teorema di Dirichelet si estende anche a questo caso, ovvero se $f(x)$ presenta delle discontinuità di prima specie, la (H2) da in realtà come risultato la funzione:

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{2} \left[\lim_{y \rightarrow x^-} f(y) + \lim_{y \rightarrow x^+} f(y) \right]$$

Definiamo $k_n = n\pi/a$ e

$$\tilde{f}_a(k) = F[f_a] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{+a} dy e^{-iky} f(y) \quad (\text{H5})$$

Ne consegue che $c_n = \sqrt{2\pi}/2a \tilde{f}(k_n)$. La serie di Fourier (H4) può essere quindi riscritta come:

$$f_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Delta k \tilde{f}_a(k_n) e^{ik_n x} \quad (\text{H6})$$

dove $\Delta k = k_{n+1} - k_n = \pi/a$. Passando al limite $a \rightarrow \infty$, $f_a \rightarrow f$ e

$$\tilde{f}_a(k) \rightarrow \tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-iky} f(y) \quad (\text{H7})$$

Infine $\Delta k \rightarrow 0$ e quindi la sommatoria (H6) tende all'integrale:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Delta k \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} dk \quad (\text{H8})$$

per cui avremo la (H2).

Si noti che se f è una funzione reale $\tilde{f}(-k) = \tilde{f}^*(k)$. L'operazione di trasformazione è evidentemente lineare, ovvero $F[af(x) + bg(x)] = a\tilde{f} + b\tilde{g}$. Se la $f(x)$ è una funzione pari si ha:

$$\tilde{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} dx f(x) \cos kx \quad (\text{H9})$$

e quindi in tal caso \tilde{f} è reale, mentre se la $f(x)$ è dispari si ha

$$\tilde{f}(k) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} dx f(x) \sin kx \quad (\text{H10})$$

e quindi in tal caso \tilde{f} è immaginario puro. Infine è interessante notare che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) = \sqrt{2\pi} \tilde{f}(0) \quad (\text{H11})$$

ovvero una proprietà *globale* della funzione $f(x)$ si riflette su di una proprietà *locale* della sua trasformata di Fourier (e viceversa).

Proprietà della trasformata di Fourier

1) Proprietà di scala: se la trasformata di Fourier di $f(x)$ è $\tilde{f}(k)$, la trasformata di $f(ax)$, con a reale, vale $\tilde{f}(k/a)/a$. Questa proprietà si dimostra con il cambiamento di variabile $y = ax$ nella (H1).

2) Proprietà di shift: la trasformata di $f(x+a)$, con a reale, vale $e^{ika}\tilde{f}(k)$. Anche questa proprietà è facile da dimostrare con il cambiamento di variabile $y = x+a$. In particolare per la reciprocità della formula dell'antitrasformata, vale anche la seguente proprietà:

$$F[e^{iqx}f(x)] = \tilde{f}(k - q) \quad (\text{H12})$$

3) Trasformata di Fourier della derivata:

$$F\left[\frac{df}{dx}\right] = ik\tilde{f}(k) \quad (\text{H13})$$

Infatti, per la proprietà di shift si ha:

$$F\left[\frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon}\right] = \frac{e^{ik\epsilon} - 1}{\epsilon}\tilde{f}(k) \quad (\text{H14})$$

Per $\epsilon \rightarrow 0$ si ha l'asserto. Per induzione si ha:

$$F\left[\frac{d^n f}{dx^n}\right] = (ik)^n \tilde{f}(k) \quad (\text{H15})$$

A causa della reciprocità della formula dell'antitrasformata, vale anche la seguente proprietà:

$$F[x^n f(x)] = i^n \frac{d^n \tilde{f}(k)}{dk^n} \quad (\text{H16})$$

4) Trasformata di Fourier di un prodotto di convoluzione: Siano f e g due funzioni di classe $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$; definiamo il *prodotto di convoluzione* tra f e g la seguente quantità

$$h(x) = f \star g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t)g(x-t) \quad (\text{H17})$$

È facile mostrare che $f \star g = g \star f$. Vale allora la seguente proprietà: *la trasformata di Fourier di un prodotto di convoluzione di due funzioni f e g è uguale al prodotto delle trasformate di Fourier delle due funzioni:*

$$\tilde{h}(k) = F[f \star g] = \tilde{f}(k)\tilde{g}(k) \quad (\text{H18})$$

Infatti:

$$\begin{aligned}
\tilde{h}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) g(x-t) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-ikt} f(t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ik(x-t)} g(x-t) \\
&\stackrel{z=x-t}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-ikt} f(t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-ikz} g(z) \\
&= \tilde{f}(k) \tilde{g}(k)
\end{aligned} \tag{H19}$$

Vale ovviamente anche il teorema inverso: *la trasformata di Fourier del prodotto di due funzioni f e g è uguale al prodotto di convoluzione delle trasformate di Fourier delle due funzioni.*

5) Teorema di Parseval:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx |f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dk |\tilde{f}(k)|^2 \tag{H20}$$

Più in generale, si può mostrare che:

$$\langle g, f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) g^*(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk \tilde{f}(k) \tilde{g}^*(k) = \langle \tilde{g}, \tilde{f} \rangle \tag{H21}$$

Infatti, consideriamo la funzione $\mathcal{G}(x) = g^*(-x)$, e sia $h(x) = \mathcal{G} \star f(x)$. Com'è facile vedere si ha che $\langle g, f \rangle = \sqrt{2\pi} h(0)$. Inoltre si vede facilmente che $\tilde{\mathcal{G}}(k) = \tilde{g}^*(k)$, per cui $\tilde{h}(k) = \tilde{g}^*(k) \tilde{f}(k)$. D'altronde per la (H11) si ha anche che

$$\sqrt{2\pi} h(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk \tilde{h}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk \tilde{g}^*(k) \tilde{f}(k) \tag{H22}$$

Per $f(x) = g(x)$ si ha il teorema di Parseval.

6) Principio di *indeterminazione*: sia $f(x) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione reale a quadrato sommabile in \mathbf{R} . Definiamo:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} dx x f^2(x) \tag{H23}$$

il *centroide* della funzione d'onda, con

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} dx f^2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk |\tilde{f}(x)|^2 \tag{H24}$$

(l'ultima relazione in virtù del teorema di Parseval) e analogamente definiamo:

$$\langle k \rangle = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} dk k |\tilde{f}(k)|^2 \quad (\text{H25})$$

Poiché f è una funzione reale si ha $\tilde{f}(k) = \tilde{f}^*(-k)$ e quindi $|\tilde{f}(k)|^2$ è una funzione pari. Se ne deduce che $\langle k \rangle = 0$. Definiamo inoltre

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} dx (x - \langle x \rangle)^2 f^2(x) \\ \sigma_k^2 &= \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} dk (k - \langle k \rangle)^2 |\tilde{f}(k)|^2 \equiv \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} dk k^2 |\tilde{f}(k)|^2 \end{aligned} \quad (\text{H26})$$

Si dimostra allora che vale la seguente disegualianza:

$$\sigma_x \sigma_k \geq \frac{1}{2} \quad (\text{H27})$$

Per dimostrare questo teorema, per semplicità definiamo $y = x - \langle x \rangle$ e la funzione normalizzata:

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{N}} f(y + \langle x \rangle) \quad (\text{H28})$$

Con questa definizione abbiamo:

$$\begin{aligned} \langle y \rangle &= 0 \\ \sigma_x^2 = \sigma_y^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} dy y^2 g^2(x) \end{aligned} \quad (\text{H29})$$

Per la proprietà di shift avremo anche

$$\tilde{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \tilde{f}(k) e^{-ik\langle x \rangle} \quad (\text{H30})$$

per cui avremo anche:

$$\sigma_k^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk k^2 |\tilde{g}(k)|^2 \quad (\text{H31})$$

Per il teorema di Schwarz avremo:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} dy y g(x) g'(y) \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} dy y^2 g^2(x) \int_{-\infty}^{\infty} dy [g'(x)]^2 \quad (\text{H32})$$

Per l'egualianza di Parseval abbiamo anche:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy [g'(x)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk |F[g'](k)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk k^2 |\tilde{g}(x)|^2 \quad (\text{H33})$$

Da cui otteniamo:

$$\sigma_x \sigma_k \geq \left| \int_{-\infty}^{\infty} dy y g(x) g'(y) \right| \quad (\text{H34})$$

D'altronde abbiamo anche:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dy y g(x) g'(y) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dy y \frac{d}{dx} g^2(x) \\ &= \frac{1}{2} y g^2(y) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dy g^2(x) \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned} \quad (\text{H35})$$

dove si è sfruttato il fatto che $yg(y) \rightarrow 0$ se $y \rightarrow \pm\infty$ dato che g è una funzione a quadrato sommabile.

Si noti che l'egualianza si ha solo quando $g'(y) = \alpha yg(y)$, ovvero quando

$$g(y) \propto e^{-\beta y^2}$$

($\beta = -\alpha/2 > 0$ se si vuole che la funzione sia a quadrato sommabile). La gaussiana è dunque la funzione di minima indeterminazione.

Esempi di trasformata di Fourier.

1) Calcolare la trasformata di Fourier della seguente funzione (*finestra*):

$$W_a(x) = \frac{1}{2} [\vartheta(x+a) - \vartheta(x-a)] = \begin{cases} 1 & -a \leq x \leq a \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (\text{H36})$$

con $a > 0$. La trasformata è molto semplice da calcolare:

$$\widetilde{W}_a(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a dx e^{-ikx} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ak}{k} = a \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{sinc}(ak) \quad (\text{H37})$$

dove $\text{sinc}(x) = \sin x/x$. La funzione e la sua trasformata sono mostrate in figura 7 per i valori di $a = 1$ e $a = 2.5$. Si noti il fenomeno che è generale per le trasformate di Fourier: se la funzione di partenza è “stretta”,

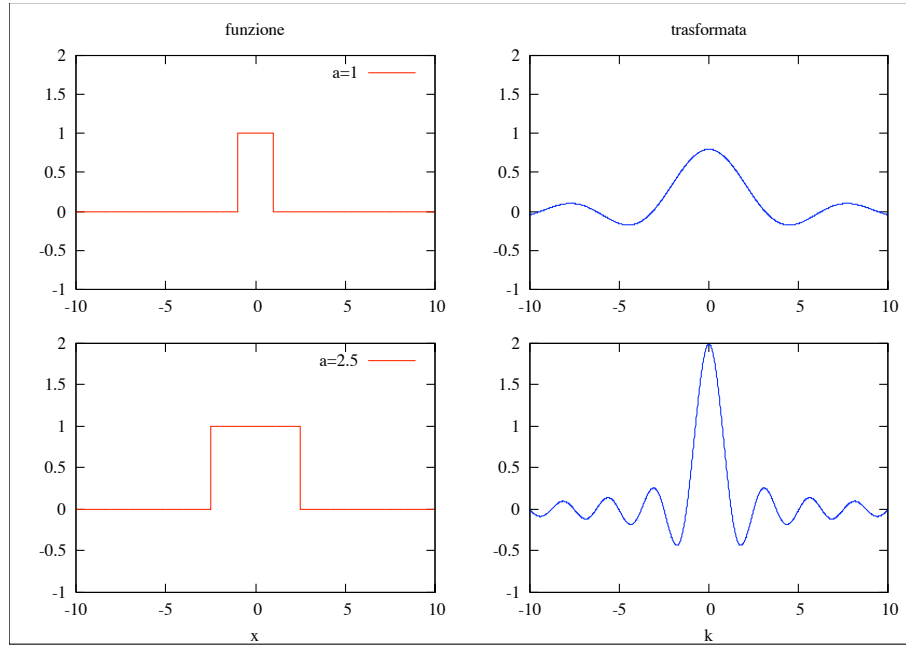


Figura 7: Trasformata di Fourier per la funzione finestra per due valori di a .

la trasformata è “larga” e viceversa. Questo fenomeno deriva dal principio di indeterminazione. Facendo l’antitrasformata per $a = 1$ e $x = 0$ si ha:

$$W_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin k}{k} \quad (\text{H38})$$

Poiché $W_1(0) = 1$ si ha l’integrale notevole:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\sin t}{t} = \pi \quad (\text{H39})$$

Usando inoltre il teorema di Parseval, si ha anche

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\sin^2 t}{t^2} = \pi \quad (\text{H40})$$

Entrambi questi integrali non possono essere calcolati con tecniche elementari.

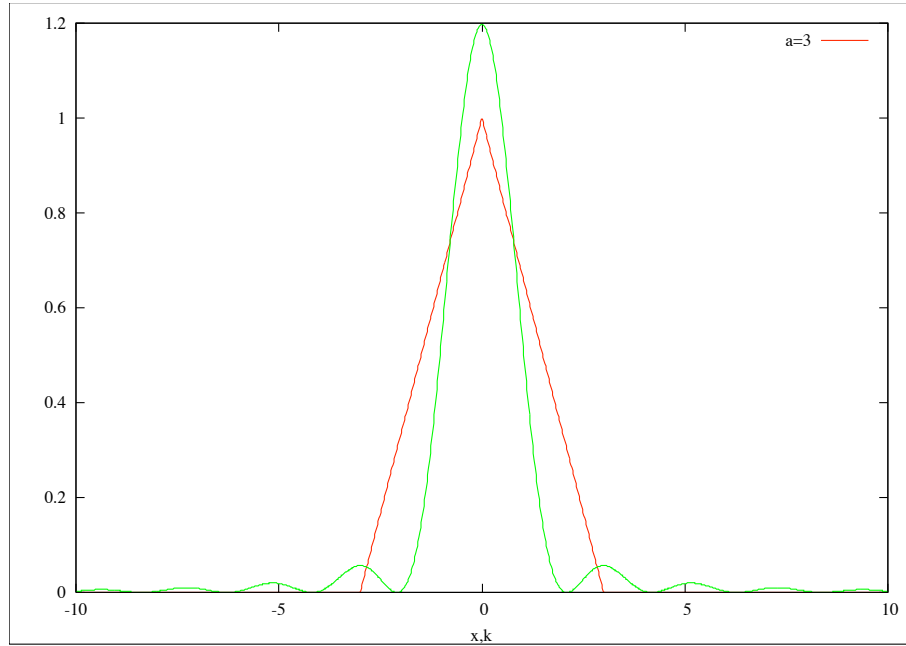


Figura 8: La funzione relativa all'esempio 2 e la sua trasformata di Fourier

2) Calcolare la trasformata di Fourier della seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{a} & -a \leq x \leq a \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (\text{H41})$$

Poiché la funzione è pari, si ha:

$$\tilde{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} dx \left(1 - \frac{x}{a}\right) \cos kx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos ak}{ak^2} \quad (\text{H42})$$

3) Calcolare la trasformata di Fourier della seguente funzione (*treno d'onda*):

$$f(x) = \begin{cases} e^{iqx} & -a \leq x \leq a \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (\text{H43})$$

Come si vede, la funzione può anche scriversi come $f(x) = W_a(x)e^{iqx}$. Usando la proprietà di shift si ha

$$\tilde{f}(k) = a \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{sinc}(a(k - q)) \quad (\text{H44})$$

In particolare, usando le formule di Eulero si ha

$$F[W_a(x) \cos qx] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\text{sinc}(a(k+q)) + \text{sinc}(a(k-q))] \quad (\text{H45})$$

$$F[W_a(x) \sin qx] = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} [\text{sinc}(a(k+q)) - \text{sinc}(a(k-q))] \quad (\text{H46})$$

4) Calcolare la trasformata di Fourier della seguente funzione (*cut-off*):

$$f(x) = e^{-a|x|} \quad (\text{H47})$$

con $a > 0$. Poiché $f(x)$ è pari si può usare la (H9):

$$\tilde{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} dx e^{-ax} \cos kx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + k^2} \quad (\text{H48})$$

Il calcolo è elementare ed è lasciato per esercizio. Per la reciprocità della trasformata di Fourier si ha anche che la trasformata della funzione *Lorentziana*:

$$f(x) = \frac{1}{a^2 + x^2} \quad (\text{H49})$$

vale:

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{|a|} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|ak|} \quad (\text{H50})$$

Da questo si ottiene l'integrale notevole (non calcolabile per via elementare)

$$\int_0^{+\infty} dx \frac{\cos kx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{2|a|} e^{-|ak|} \quad (\text{H51})$$

5) Calcolare la trasformata di Fourier della gaussiana:

$$f(x) = e^{-ax^2} \quad (\text{H52})$$

con $a > 0$. Evidentemente si ha:

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ax^2 - ikx} \quad (\text{H53})$$

Utilizzando la (A6) si ottiene

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2a}} \exp\left(-\frac{k^2}{4a}\right) \quad (\text{H54})$$

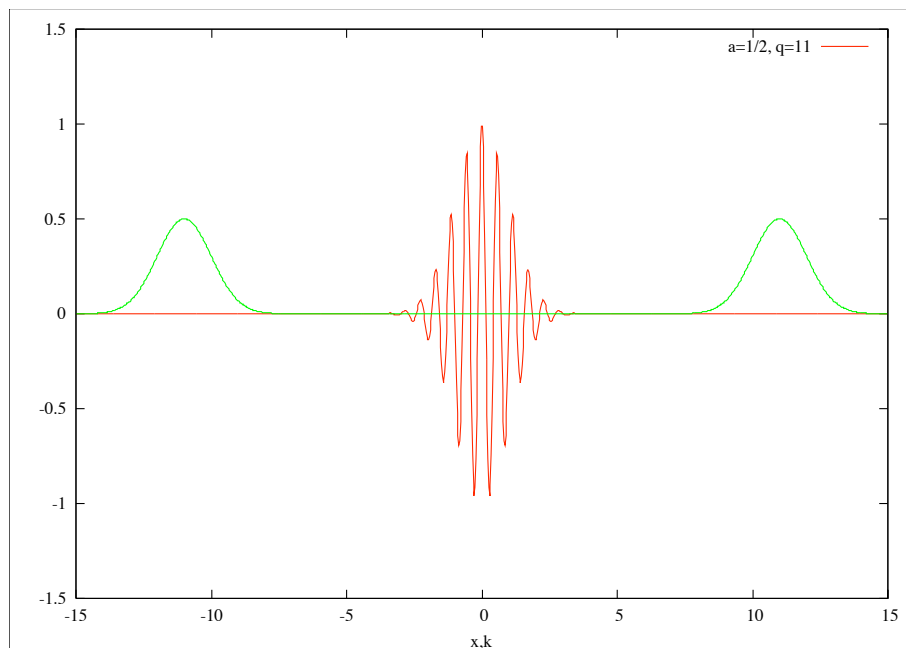


Figura 9: La funzione pacchetto d'onda e la sua trasformata di Fourier

La trasformata di Fourier di una gaussiana è ancora una gaussiana.

6) Calcolare la trasformata di Fourier della funzione:

$$f(x) = x^n e^{-ax^2} \quad (\text{H55})$$

con $n \in \mathbf{N}$. Utilizzando la proprietà (H16) si ha:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(k) &= i^n \frac{d^n}{dk^n} \left[\frac{1}{\sqrt{2a}} \exp\left(-\frac{k^2}{4a}\right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2a}} \left(\frac{i}{2\sqrt{a}}\right)^n H_n\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right) \exp\left(-\frac{k^2}{4a}\right) \end{aligned} \quad (\text{H56})$$

dove è stata utilizzata la formula di Rodrigues per i polinomi di Hermite (G31).

7) Calcolare la trasformata di Fourier della funzione (*pacchetto d'onda*):

$$f(x) = e^{-ax^2} e^{iqx} \quad (\text{H57})$$

Evidentemente, usando la proprietà di shift si ha:

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2a}} \exp \left[-\frac{(k-q)^2}{4a} \right] \quad (\text{H58})$$

Così avremo anche:

$$F[e^{-ax^2} \cos qx] = \frac{\exp \left[-\frac{(k+q)^2}{4a} \right] + \exp \left[-\frac{(k-q)^2}{4a} \right]}{2\sqrt{2a}} \quad (\text{H59})$$

$$F[e^{-ax^2} \sin qx] = i \frac{\exp \left[-\frac{(k+q)^2}{4a} \right] - \exp \left[-\frac{(k-q)^2}{4a} \right]}{2\sqrt{2a}} \quad (\text{H60})$$

In figura 9 è sono mostrate la prima di queste due funzioni e la sua trasformata di Fourier.

Si noti che più in generale la trasformata di Fourier della funzione $f(x) = e^{-ax^2}g(x)$ con $g(x)$ funzione periodica di periodo $2\pi/q$ sarà data da

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2a}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n \exp \left[-\frac{(k-nq/2)^2}{4a} \right] \quad (\text{H61})$$

dove i g_n sono i coefficienti di Fourier della funzione $g(x)$. Si nota quindi come lo spettro di Fourier di una funzione siffatta è una somma di infinite gaussiane piccate sui modi della funzione periodica $g(x)$.

8) *Filtro a finestra*: sia $f(x)$ una funzione a quadrato sommabile in \mathbb{R} . Definiamo $\bar{f}_a(x)$ la media di $f(x)$ definita come

$$\bar{f}_a(x) \equiv \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} dy f(y) \quad (\text{H62})$$

calcolare la trasformata di Fourier della funzione \bar{f}_a .

Come è facile vedere funzione \bar{f}_a può essere riscritta come un prodotto di convoluzione con una funzione finestra

$$\bar{f}_a(x) = \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} dy f(y) W_a(y-x) \quad (\text{H63})$$

Ne consegue quindi che per il teorema della convoluzione si ha

$$\tilde{\bar{f}}_a(k) = \frac{1}{2a} \tilde{W}_a(k) \tilde{f}(k) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \text{sinc}(ak) \tilde{f}(k) \quad (\text{H64})$$

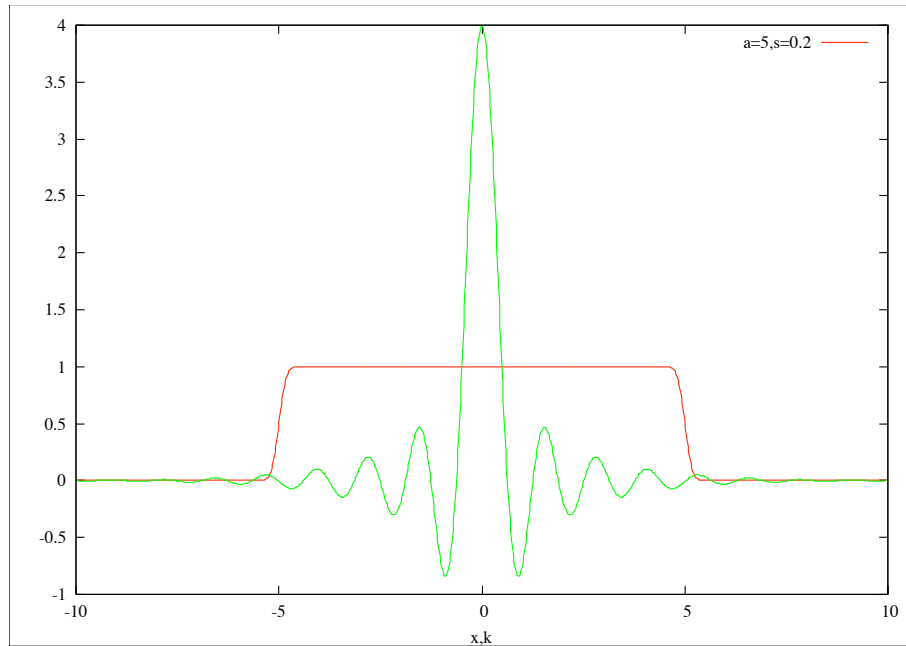


Figura 10: La funzione finestra arrotondata e la sua trasformata di Fourier

Il significato della relazione precedente è intuitivo: l'operazione di media tende a sopprimere le frequenze superiori a $\sim 1/a$. Ne consegue che la trasformata di Fourier della $f(x)$ viene modulata dalla funzione $\tilde{W}_a(k)$ che appunto sopprime le alte frequenze. La funzione $\tilde{W}_a(k)$ agisce quindi come un “filtro passa basso”. Allo stesso modo è possibile definire filtri a cut-off, filtri gaussiani e così via.

9) Calcolare la trasformata di Fourier della funzione (*finestra arrotondata*)

$$f(x) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{x+a}{2s} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x-a}{2s} \right) \right] \quad (\text{H65})$$

Questa funzione rappresenta una versione “continua” della funzione finestra, in cui i bordi sono stati “smussati” (si veda la curva in rosso di figura 10). Ricordando la definizione della funzione errore, si ha che la $f(x)$ può essere scritta come un prodotto di convoluzione:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-a}{2s}}^{\frac{x+a}{2s}} dy e^{-y^2}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{z=2sy}{=} \frac{1}{2s\sqrt{\pi}} \int_{x-a}^{x+a} dz \exp\left(-\frac{z^2}{4s^2}\right) \\
&= \frac{1}{2s\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz W_a(z-x) \exp\left(-\frac{z^2}{4s^2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}s} W_a(x) \star \exp\left(-\frac{x^2}{4s^2}\right) \tag{H66}
\end{aligned}$$

Ricordando la proprietà della trasformata di un prodotto di convoluzione, si ha:

$$\tilde{f}(k) = a\sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sinc}(ak) e^{-s^2 k^2} \tag{H67}$$

10) Calcolare la trasformata di Fourier della funzione (*chirp*):¹³

$$f(x) = e^{i(qx + \alpha x^2)} \tag{H68}$$

Questa equazione è tipica di un fenomeno oscillatorio in cui la frequenza aumenta linearmente col tempo. Utilizzando la (A6) si ha:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\alpha x^2 - i(k-q)x} \\
&= \frac{1}{\sqrt{-2i\alpha}} \exp\left[-i\frac{(k-q)^2}{4\alpha}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \exp\left[-i\frac{(k-q)^2}{4\alpha} + i\frac{\pi}{4}\right] \tag{H69}
\end{aligned}$$

per cui avremo anche:

$$F[\cos(qx + \alpha x^2)] = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \cos\left[\frac{(k-q)^2}{4\alpha} + \frac{\pi}{4}\right] \tag{H70}$$

$$F[\sin(qx + \alpha x^2)] = -\frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \sin\left[\frac{(k-q)^2}{4\alpha} + \frac{\pi}{4}\right] \tag{H71}$$

11) Utilizzando le proprietà della trasformata di Fourier, trovare l'integrale generale dell'equazione di Fourier:

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} = D \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \tag{H72}$$

¹³Si noti che questa funzione non è a quadrato sommabile in \mathbf{R} , quindi non tutti i teoremi sulle trasformate di Fourier potrebbero essere validi per esso (in particolare, l'identità di Parseval).

Questa equazione è tipica di un fenomeno di diffusione e serve per descrivere, ad esempio, l'evoluzione della temperatura all'interno di una sbarra conduttrice. Il coefficiente D è detto *coefficiente di diffusione* (nell'esempio della sbarra conduttrice si ha $D = k/\rho c$, dove k è il coefficiente di conduzione termica della sbarra, ρ la densità di massa e c il calore specifico della stessa). Per risolvere questa equazione, consideriamo la trasformata di Fourier della ψ rispetto a x , ovvero definiamo:

$$\tilde{\psi}(k, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx} \psi(x, t) \quad (\text{H73})$$

Usando la proprietà di trasformazione della derivata si ha che la (H72) diviene:

$$-k^2 \tilde{\psi}(k, t) = D \frac{\partial \tilde{\psi}(k, t)}{\partial t} \quad (\text{H74})$$

Questa equazione ha una semplice soluzione:

$$\tilde{\psi}(k, t) = C(k) \exp\left(-\frac{k^2}{D}t\right) \quad (\text{H75})$$

dove $C(k)$ è una costante rispetto al tempo (ma può dipendere da k). Applicando la formula di antitrasformazione, si ha:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx} C(k) \exp\left(-\frac{k^2}{D}t\right) \quad (\text{H76})$$

Si supponga che al tempo $t = 0$ la ψ sia soggetta ad una *condizione iniziale* del tipo $\psi(x, 0) = \psi_0(x)$. Ponendo $t = 0$ nell'equazione precedente, si ha:

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx} C(k) \quad (\text{H77})$$

da cui si vede che la $C(k)$ altro non è che la trasformata di Fourier della $\psi_0(x)$:

$$C(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-iky} \psi_0(y) \quad (\text{H78})$$

Sostituendo nella (H76) si ha:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx} \exp\left(-\frac{k^2}{D}t\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-iky} \psi_0(y)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \psi_0(y) \int_{-\infty}^{+\infty} dk \exp \left[ik(x-y) - \frac{k^2}{D}t \right] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dy \psi_0(y) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{D}{\pi t}} \exp \left[-D \frac{(x-y)^2}{4t} \right] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dy \psi(y, 0) G(x-y, t) \tag{H79}
\end{aligned}$$

L'integrale precedente è stato valutato con l'ausilio della (A6). La funzione

$$G(x, t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{D}{\pi t}} \exp \left[-D \frac{x^2}{4t} \right] \tag{H80}$$

è detta *funzione di Green* o *propagatore*, in quanto “propaga” la condizione iniziale $\psi(x, 0)$ al tempo t , e corrisponde alla soluzione dell'equazione (H72) con la condizione iniziale $\psi(x, 0) = \delta(x)$ (si veda il capitolo successivo). Come si vede, essa è una gaussiana con larghezza che aumenta come la radice quadrata del tempo: $\sigma(t) = \sqrt{2t/D}$. Questo è solo un esempio di applicazione della trasformata di Fourier alla soluzione di equazioni alle derivate parziali. Il concetto di Funzione di Green è molto comune nella Fisica Matematica.

I La δ di Dirac

Consideriamo la seguente famiglia di funzioni:

$$\delta_a(x - x_0) = \frac{1}{2a} W_a(x - x_0) \tag{I1}$$

Esse costituiscono un insieme di finestre centrate intorno a $x = x_0$ sempre più strette e alte per $a \rightarrow 0$. Inoltre, per costruzione, tutte le δ_a sono normalizzate all'unità:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta_a(x - x_0) = 1 \tag{I2}$$

Consideriamo una funzione $f(x)$, non necessariamente di classe $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$, continua in un intorno di $x = x_0$. Ne consegue per a sufficientemente piccolo $f(x)$ è continua in $[x_0 - a, x_0 + a]$ per cui:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \delta_a(x - x_0) = \frac{1}{2a} \int_{x_0-a}^{x_0+a} dx f(x) = f(\xi) \tag{I3}$$

dove $\xi \in [x_0 - a, x_0 + a]$. Nel limite $a \rightarrow 0$ si ha:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \delta_a(x - x_0) = f(x_0) \quad (\text{I4})$$

E' evidente che il limite e l'integrale non possono essere scambiati. Ciononostante si conviene scrivere formalmente:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \delta_a(x - x_0) = \delta(x - x_0) \quad (\text{I5})$$

e quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \delta(x - x_0) = f(x_0) \quad (\text{I6})$$

A volte invece delle finestre vengono scelte altri tipi di funzioni, per esempio:

$$\delta_a(x - x_0) = \frac{1}{\sqrt{a\pi}} \exp \left[-\frac{(x - x_0)^2}{a} \right] \quad (\text{I7})$$

che rappresentano gaussiane sempre più strette e piccate intorno a $x = x_0$. Infatti:

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \delta_a(x - x_0) &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{f(x)}{\sqrt{a\pi}} \exp \left[-\frac{(x - x_0)^2}{a} \right] \\ &\stackrel{y = \frac{x - x_0}{\sqrt{a}}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \lim_{a \rightarrow 0} f(\sqrt{a}y + x_0) \frac{e^{-y^2}}{\sqrt{\pi}} \\ &= f(x_0) \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{e^{-y^2}}{\sqrt{\pi}} = f(x_0) \end{aligned}$$

cosicché formalmente possiamo scrivere

$$\delta(x - x_0) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{a\pi}} \exp \left[-\frac{(x - x_0)^2}{a} \right] \quad (\text{I8})$$

Altre scelte molto comuni sono

$$\delta(x - x_0) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\pi a} \operatorname{sinc} \left(\frac{x - x_0}{a} \right) \quad (\text{I9})$$

$$\delta(x - x_0) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{2a} \exp \left(-\frac{|x - x_0|}{a} \right) \quad (\text{I10})$$

etc. La scelta delle δ_a non è critica.

La δ non può essere definita come una funzione in senso stretto (una definizione rigorosa può essere data solo nella teoria delle distribuzioni). Infatti si vede che per $x \neq x_0$ si ha $\lim_{a \rightarrow 0} \delta_a(x - x_0) = 0$, mentre per $x = x_0$ si ha $\lim_{a \rightarrow 0} \delta_a(0) = +\infty$. La $\delta(x - x_0)$ può essere quindi interpretata in maniera *naïve* come una funzione nulla per $x \neq x_0$ e infinita per $x = x_0$. Essa può essere quindi identificato come un “impulso” ideale, ovvero di durata nulla e ampiezza infinita.

Proprietà della δ di Dirac

1) Formalmente si ha:

$$\delta(x) = \frac{d}{dx} \vartheta(x) \quad (\text{I11})$$

con $\vartheta(x)$ funzione gradino. Questa relazione è solo formale, in quanto la funzione $\vartheta(x)$ non è derivabile per $x = 0$. Questa proprietà può essere dimostrata in vari modi. Per esempio basta mostrare che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \frac{d}{dx} \vartheta(x) = f(0) \quad (\text{I12})$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \frac{d}{dx} \vartheta(x) &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^{+a} dx f(x) \frac{d}{dx} \vartheta(x) \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left[f(x) \vartheta(x) \Big|_{-a}^{+a} - \int_{-a}^{+a} dx \vartheta(x) \frac{d}{dx} f(x) \right] \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left[f(a) - \int_0^a dx \frac{d}{dx} f(x) \right] \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} [f(a) - (f(a) - f(0))] = f(0) \end{aligned} \quad (\text{I13})$$

2) Derivata della δ ; formalmente si ha:

$$\frac{d\delta(x - x_0)}{dx} = -\delta(x - x_0) \frac{d}{dx} \quad (\text{I14})$$

Infatti, integrando per parti si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \frac{d}{dx} \delta(x - x_0) = - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x - x_0) \frac{df(x)}{dx} = - \frac{df}{dx}(x_0) \quad (\text{I15})$$

poiché $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \delta(x - x_0) = 0$. Generalizzando, si ha:

$$\frac{d^n \delta(x - x_0)}{dx^n} = (-1)^n \delta(x - x_0) \frac{d^n}{dx^n} \quad (\text{I16})$$

4) Valgono le seguenti proprietà le cui dimostrazioni sono lasciate per esercizio:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x - y) = 1 \quad (\text{I17})$$

$$\int_{-\infty}^0 dx \delta(x) = \int_0^{+\infty} dx \delta(x) = \frac{1}{2} \quad (\text{I18})$$

$$f(x) \delta(x - y) = f(y) \delta(x - y) \quad (\text{I19})$$

$$x^a \delta(x) = 0 \quad (a > 0) \quad (\text{I20})$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad (a \neq 0) \quad (\text{I21})$$

$$\delta(x) = \delta(-x) \quad (\text{I22})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy \delta(x - y) \delta(y - z) = \delta(z - x) \quad (\text{I23})$$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} [\delta(x - a) + \delta(x + a)] \quad (a \neq 0) \quad (\text{I24})$$

In particolare l'ultima proprietà è una conseguenza del seguente teorema più generale che diamo senza dimostrazione: sia $g(x) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua avente un certo numero di zeri, ovvero $g(z_i) = 0$ con $g'(z_i) \neq 0$; allora avremo:

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{1}{|g'(z_i)|} \delta(x - z_i) \quad (\text{I25})$$

5) Trasformata di Fourier della δ di Dirac; non essendo la δ una funzione di classe $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$ non sarebbe possibile, a rigore, definire la sua trasformata di Fourier. Cionondimeno, formalmente avremo:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x - x_0) e^{-ikx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx_0} \quad (\text{I26})$$

Invertendo questa equazione si ottiene una rappresentazione integrale della δ :

$$\delta(x - x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x-x_0)} \quad (\text{I27})$$

Questa rappresentazione è evidentemente solo simbolica, poiché l'integrando non è di classe $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$. Tuttavia essa è molto utile in calcoli formali. Per esempio essa può essere utilizzata per dimostrare il teorema di Parseval:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk \tilde{f}(k) \tilde{g}^*(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) e^{-ikx} \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{iky} g^*(y)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} dy g^*(y) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(y-x)} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} dy g^*(y) \delta(y-x) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) g^*(x)
\end{aligned}$$

Dalla proprietà di reciprocità della trasformata di Fourier otteniamo infine:

$$F[e^{iqx}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \delta(k-q) \quad (I28)$$

$$F[\cos qx] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} [\delta(k+q) + \delta(k-q)] \quad (I29)$$

$$F[\sin qx] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} i [\delta(k+q) - \delta(k-q)] \quad (I30)$$

6) Si supponga che $g(x)$ sia una funzione periodica di periodo $2\pi/q$. Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione $g(x)$. La funzione $g(x)$ può essere sviluppata in serie di Fourier

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{inqx} \quad (I31)$$

Il calcolo della trasformata di Fourier è allora elementare:

$$\tilde{g}(k) = \sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n \delta(k-nq) \quad (I32)$$

Si noti che una funzione periodica non è a rigore a quadrato sommabile e infatti la sua trasformata di Fourier ha solo una espressione formale in termini di delta di Dirac. Uno spettro descritto da una serie di delta è detto anche *pettine di Dirac* (Dirac comb). Si noti anche come questa funzione può essere visto come il limite della (H61) per $a \rightarrow 0$.