1) Se A e B sono due matrici simili quadrate 4×4 e A ha rango 3 allora

■ B ha rango 3

□ B ha rango almeno 3

□ B ha rango al più 3

□ B ha rango 4

□ B è invertibile

Matrici simili hanno lo stesso rango, quindi B ha rango 3.

2) Se $f : R^5 \rightarrow R^3$ è un'applicazione lineare suriettiva allora

■ $\dim \ker f = 2$

□ f è anche iniettiva

□ f è biettiva

□ l'unico elemento del nucleo di f è il vettore nullo

□ $\dim \operatorname{Im} f = 1$

Dalla relazione fondamentale abbiamo $\dim \ker f = 2$ in quanto $\dim \operatorname{Im} f = 3$ essendo f suriettiva.

3) Per quali valori di h i due piani $x + hy + z = 0$ e $hx - 2y + z = 1$ di R^3 sono perpendicolari?

■ $h = 1$

□ $h = 0$

□ $h = -1$

□ $h = 2$

□ $h = -2$

Piani perpendicolari hanno le normali perpendicolari; cioè $(1, h, 1) \cdot (h, -2, 1) = 0$ da cui $h = 1$

4) Quali tra i seguenti sottoinsiemi di $T^3[x]$ non è un sottospazio vettoriale?

■ l'insieme dei polinomi di grado 3

□ l'insieme dei polinomi di grado al più 3

□ l'insieme dei polinomi di grado al più 2

□ l'insieme dei polinomi di grado al più 1

□ l'insieme formato dal solo polinomio nullo.

Non è detto che la somma di due polinomi di grado 3 *sia ancora un polinomio di grado* 3*. Quindi l'insieme dei polinomi di grado* 3 *non è un sottospazio vettoriale in quanto non è chiuso per la somma.*

5) Se β è una forma bilineare simmetrica semidefinitiva negativa su $\mathbb{R}^4$ quale delle seguenti può essere la segnatura di β?

■ $i_+ = 0 \quad i_0 = 3 \quad i_- = 1$

□ $i_+ = 4 \quad i_0 = 0 \quad i_- = 0$

□ $i_+ = 0 \quad i_0 = 2 \quad i_- = 3$

□ $i_+ = 0 \quad i_0 = 4 \quad i_- = 1$

□ $i_+ = 1 \quad i_0 = 0 \quad i_- = 3$

Essendo β *semidefinita negativa abbiamo* $i_+ = 0$*, inoltre* $i_+ + i_0 + i_- = 4$*. L'unica possibilita tra quelle proposte è quindi* $i_+ = 0 \quad i_0 = 3 \quad i_- = 1$

ESERCIZI

1) **Si considerino le rette di equazioni**

$$r: \begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 1 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x - hy = h \\ x - z = h \end{cases}$$

Studiare le reciproche posizioni al variare del parametro h **in** $\mathbb{R}$.

Consideriamo il sistema costituito dalle equazioni delle due rette la cui matrice associata è

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -h & 0 & h \\ 1 & 0 & -1 & h \end{array}\right)$$

Ora $rgA = 3$ per ogni valore di h in quanto esiste un minore di A di ordine 3 a determinante non nullo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

mentre $\det(A \mid B) = (h-1)^2$. Possiamo allora concludere che:

- se $h \neq 1$ si ha $rgA = 3$ e $rg(A \mid B) = 4$ da cui deduciamo che le rette sono sghembe
- se $h = 1$ si ha $rgA = 3 = rg(A \mid B)$ ossia le rette sono incidenti.

.

2) **Si consideri l'endomorfismo f_k di $\mathbb{R}^4$ definito da**

$$f_k(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_4, 2x_2, x_2 + kx_3, kx_4)$$

al variare di k in $\mathbb{R}$. Si determini, quando possibile, la forma diagonale di f. Per $k = 0$ trovare inoltre una base per l'autospazio relativo all'autovalore 2.

Sia A_k la matrice associata ad f_k

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

Consideriamo

$$\det(A_k - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(k - \lambda)^2$$

$$\det(A_k - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{1, 2, k\}$$

Poichè l'autovalore $\lambda = k$ ha molteplicità algebrica maggiore o uguale a 2 dobbiamo calcolare la sua molteplicità geometrica, ossia la dimensione dell'autospazio relativo

$$\dim V(k) = 4 - rg(A_k - kI) = 4 - rg \begin{pmatrix} 1-k & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2-k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \text{ per ogni valore di } k$$

Quindi:

- Per $k \neq 1, 2$ si hanno 3 autovalori distinti e per ciascuno di essi la molteplicità algebrica coincide con quella geometrica, da cui f è semplice e la matrice A_k risulta simile alla matrice diagonale

$$D_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Sia $k = 1$ oppure $k = 2$, in entrambi i casi si ha l'autovalore $\lambda = k$ con molteplicità algebrica uguale a 3 mentre molteplicità geometria uguale a 2 da cui f_1 e f_2 non sono semplici.

Sia ora $k = 0$, dobbiamo determinare una base per $V(2)$

$$\overrightarrow{x} \in V(2) \Leftrightarrow (A_0 - 2I)\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{x} \in V(2) \Leftrightarrow \overrightarrow{x} = (0, 2x_3, x_3, 0) = x_3(0, 2, 1, 0)$$

da cui $\{(0, 2, 1, 0)\}$ è una base per $V(2)$