UNIVERSITA' DEL SALENTO

Corso Di Laurea In Matematica

GEOMETRIA I

Prova del 13/07/2018

1. **Siano dati i vettori $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ dello spazio vettoriale V_3. Determinare $\overrightarrow{w}$ in modo tale che: $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ siano linearmente dipendenti; $\overrightarrow{w}$ sia ortogonale a $\overrightarrow{v}$ e la proiezione di $\overrightarrow{w}$ su $\overrightarrow{u}$ abbia modulo uguale ad 1.**

Sia $\overrightarrow{w}(x, y, z)$ il vettore cercato. Se consideriamo le tre condizioni imposte otteniamo:

1) $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ linearmente dipendenti $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2x + y + z = 0$

2) $\overrightarrow{w}$ è ortogonale a $\overrightarrow{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \Leftrightarrow y - z = 0$

3) $w_{\overrightarrow{u}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u}}{\|u\|} = 1 \Leftrightarrow \frac{x+2y}{\sqrt{5}} = 1$

Da cui, risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \\ x + 2y = \sqrt{5} \end{cases}$$

si ottiene $\overrightarrow{w}(\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3})$.

2. **Discutere il seguente sistema al variare dei parametri $h, k \in R$**

$$\begin{cases} -x + y + z = 2 \\ x - y = -1 \\ hx - 2y - 2z = k \end{cases}$$

La matrice associata al sistema $AX = B$ è

$$(A, B) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ h & -2 & -2 & k \end{array} \right)$$

Applicando il metodo di eliminazione di Gauss alla matrice (A, B), nell'ipotesi sia $h \neq 0$, si ottiene

$$(A', B') = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & h-2 & h-2 & 2h+k \end{array} \right)$$

Discussione:

Se $h \neq 2$ allora $rg(A) = rg(A, B) = 3$, il sistema è compatibile ed esiste un'unica soluzione

Se $h = 2$ e $k \neq -4$ allora $rg(A) = 2$ mentre $rg(A, B) = 3$, in questo caso il sistema è incompatibile.

Se $h = 2$ e $k = -4$ allora $rg(A) = rg(A, B) = 2$, il sistema è compatibile ed esistono infinite soluzioni dipendenti da un parametro

3. **Siano dati i punti $A(-1,1,-1)$, $B(0,0,-2)$, $C(1,2,0)$ e le rette di equazioni**

$$r: \begin{cases} x = 2t-1 \\ y = t \\ z = t-3 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x+2y-z=0 \\ x+z-2=0 \end{cases}$$

a) verificare che A, B e C sono vertici di un triangolo rettangolo e trovare l'area di tale triangolo;
b) stabilire la mutua posizione tra le rette r ed s e trovare la minima distanza tra esse;

a) I punti A, B e C non sono allineati, infatti i vettori

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (1,-1,-1) \\ \overrightarrow{AC} &= (2,1,1) \\ \overrightarrow{BC} &= (1,2,2) \end{aligned}$$

non sono a due a due paralleli. Inoltre $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ quindi il triangolo è rettangolo in A. L'area $\mathcal{A}$ del triangolo è data da

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = 3\frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) Le equazioni parametriche della retta s sono date da

$$s: \begin{cases} x = -t'+2 \\ y = t'-1 \\ z = t' \end{cases}$$

Se consideriamo i vettori direttori $\overrightarrow{r}(2,1,1)$ ed $\overrightarrow{s}(-1,1,1)$ delle rette r ed s rispettivamente si ha che le rette non sono parallele ed inoltre si verifica facilmente che $r \cap s = \emptyset$. Quindi le rette sono sghembe.

Un piano π per la retta s ha equazione $x+2y-z+k(x+z-2)=0$ ossia

$$\pi : (1+k)x + 2y + (k-1)z - 2k = 0$$

Imponendo che π sia parallelo alla retta r si ha

$$2(1+k) + 2 + k - 1 = 0$$

da cui $k = -1$ e quindi $\pi : y - z + 1 = 0$. La minima distanza tra r ed s è la distanza d da un punto fissato a piacere su r, ad esempio $R(1,0,-3)$, dal piano π. Applicando la formula della distanza punto-piano si ottiene $d = 2\sqrt{2}$.

4. **Siano U e W sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ così definiti**

$$\begin{aligned} U &= L(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2) \text{ con } \overrightarrow{u}_1 = (1,0,1,0) \text{ e } \overrightarrow{u}_2 = (0,1,1,1) \\ W &= L(\overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2) \text{ con } \overrightarrow{w}_1 = (0,0,-1,10) \text{ e } \overrightarrow{w}_2 = (1,1,1,11)) \end{aligned}$$

Si determini una base per $U \cap W$ ed una per $U + W$ e si stabilisca se tale somma è diretta.

Poichè $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2$ sono linearmente indipendenti, essi costituiscono una base per U così come $\overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2$ costituiscono una base per W essendo anch'essi linearmente indipendenti.

Ora $\overrightarrow{u} \in U \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = a\ \overrightarrow{u}_1 + b\ \overrightarrow{u}_2 = (a, b, a+b, b)$ da cui

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = b \\ x_3 = a + b \\ x_4 = b \end{cases} \quad \text{sono le equazioni parametriche di } U \text{ e } \begin{cases} x_3 = x_1 + x_2 \\ x_4 = x_2 \end{cases} \quad \text{quelle cartesiane}$$

Analogamente $\overrightarrow{w} \in W \Leftrightarrow \overrightarrow{w} = a\ \overrightarrow{w}_1 + b\ \overrightarrow{w}_2 = (b, b, -a+b, 10a+11b)$ da cui

$$\begin{cases} x_1 = b \\ x_2 = b \\ x_3 = -a + b \\ x_4 = 10a + 11b \end{cases} \quad \text{sono le equazioni parametriche di } W$$

Determiniamo ora $U \cap W$:

$$\overrightarrow{x} \in W \Leftrightarrow \overrightarrow{x} = (b, b, -a+b, 10a+11b)$$

$$\overrightarrow{x} \in U \cap W \Leftrightarrow \overrightarrow{x} \in U \text{ e } \overrightarrow{x} \in W \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = b + b \\ b = 10a + 11b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ b = b \end{cases}$$

$$\overrightarrow{x} \in U \cap W \Leftrightarrow \overrightarrow{x} = (b, b, 2b, b)$$

ossia $U \cap W = L((1,1,2,1))$.

Dalla relazione di Grassmann segue che

$$\dim U + W = \dim U + \dim W - \dim U \cap W = 2 + 2 - 1 = 3$$

ed inoltre sappiamo che $U + W = L(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2)$, si tratta allora di estrarre una base costituita da 3 vettori dal sistema di generatori considerando la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

che ridotta a scala diventa

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poichè $rgA = rgA' = 3 = \dim U + W$ si ha che $\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{w}_1\}$ è una base di $U + W$.

Osserviamo infine che la somma non è diretta in quanto $U \cap W \neq \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

5. **Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$ sia assegnato l'endomorfismo f_k la cui matrice associata rispetto la base canonica è**

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ k^2-1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Riconoscere che A_0 non è diagonalizzabile;
b) determinare per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile.

a) Si ha

$$|A_0 - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

Si tratta allora di controllare la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda = 0$.

$$\overrightarrow{x}(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V(0) \Leftrightarrow f_0(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 - x_3 = 0 \\ -x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{x}(-x_3, 0, x_3, 0)$$

da cui $\dim V(0) = 1 \neq$ molt. alg. quindi A_0 non è diagonalizzabile.
b) Per un generico k si ha

$$|A_k - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 2 \\ k^2-1 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(-k + \lambda)(k + \lambda)$$

da cui $\lambda = \pm 1$ e $\lambda = \pm k$.

Se $k \in \mathbb{R} - \{0, \pm 1\}$ allora si hanno 4 autovalori distinti e la matrice A_k è diagonalizzabile essendo simile alla matrice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k \end{pmatrix}$$

Sia ora $k = 1$, in questo caso $\lambda = 1$ è un autovalore con molteplicità algebrica 2 come pure $\lambda = -1$

Controlliamo quindi la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda = 1$.

$$\overrightarrow{x}(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V(1) \Leftrightarrow f_1(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \\ -2x_3 = 0 \\ -2x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{x}(x_1, 0, 0, 0)$$

da cui $\dim V(1) = 1 \neq$ molt. alg. quindi A_1 non è diagonalizzabile.
Analogamente si procede per $k = -1$ ottenendo che A_1 non è diagonalizzabile.
In conclusione A_k è digonalizzabile solo per $k \in \mathbb{R} - \{0, \pm 1\}$