GEOMETRIA ED ALGEBRA
(Prof.ssa E. Francot)

Appunti del corso

1 Matrici, determinanti e sistemi lineari.

1.1 Premesse

Consideriamo l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi. In questo insieme è definita un'operazione indicata con il simbolo $+$, detta *somma*, che ad ogni coppia (a, b) di numeri interi associa il numero intero $a + b$. In simboli

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

$$(a, b) \mapsto a + b$$

L'operazione di somma definita in $\mathbb{Z}$ gode delle seguenti proprietà:

1. $a + (b + c) = (a + b) + c \qquad \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ (*prop. associativa*);
2. $\exists 0 \in \mathbb{Z}$ t.c. $a + 0 = 0 + a = a \qquad \forall a \in \mathbb{Z}$ (*esistenza dell'el. neutro*);
3. $\forall a \in \mathbb{Z} \quad \exists(-a) \in \mathbb{Z}$ t.c. $a+(-a) = (-a)+a = 0$ (*esistenza dell'opposto*);
4. $a + b = b + a \qquad \forall a, b \in \mathbb{Z}$ (*prop. commutativa*).

Consideriamo ora l'insieme $\mathbb{Q}^*$ dei numeri razionali non nulli. In questo insieme, oltre alla somma, è definita un'operazione indicata con il simbolo $\cdot$, detta *prodotto*, che ad ogni coppia (a, b) di numeri razionali non nulli associa il numero razionale $a \cdot b$ non nullo. In simboli

$$\cdot : \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^*$$

$$(a, b) \mapsto a \cdot b$$

L'operazione di prodotto definita in $\mathbb{Q}^*$ gode delle seguenti proprietà:

1. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \qquad \forall a, b, c \in \mathbb{Q}^*$ (*prop. associativa*);
2. $\exists 1 \in \mathbb{Q}^*$ t.c. $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \qquad \forall a \in \mathbb{Q}^*$ (*esistenza dell'el. neutro*);

3. $\forall a \in \mathbb{Q}^* \quad \exists a^{-1} \in \mathbb{Q}^* \quad$ t.c. $\quad a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1 \quad$ (*esistenza dell'inverso*);

4. $a \cdot b = b \cdot a \qquad \forall a, b \in \mathbb{Q}^*$ (*prop. commutativa*).

Proviamo ora a generalizzare quanto visto negli esempi precedenti.

Indichiamo con G un insieme qualsiasi, ad esempio G può essere $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$ oppure $\mathbb{R}$. Indichiamo poi con $*$ un'*operazione interna* definita in G che ad ogni coppia (a, b) di elementi di G associa un unico elemento di G indicato con $a * b$

$$* : G \times G \to G$$

$$(a, b) \mapsto a * b$$

Ad esempio $*$ può rappresentare la somma $+$ oppure il prodotto $\cdot$ se G è un insieme numerico.

La coppia $(G, *)$ si dice *Struttura Algebrica*.

$(\mathbb{Z}, +)$ e $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ sono esempi di strutture algebriche.

Sia $(G, *)$ una struttura algebrica in cui $*$ gode delle seguenti proprietà:

1. $a * (b * c) = (a * b) * c \qquad \forall a, b, c \in G$ (*prop. associativa*);

2. $\exists e \in G \quad$ t.c. $\quad a * e = e * a = a \qquad \forall a \in G$ (*esistenza dell'el. neutro*);

3. $\forall a \in G \quad \exists a' \in G \quad$ t.c. $\quad a * a' = a' * a = e \quad$ (*esistenza dell'el. simmetrico*);

in questo caso la struttura $(G, *)$ è detta *Gruppo*.

Se oltre alle proprietà 1, 2 e 3 vale anche la proprietà

4. $a * b = b * a \qquad \forall a, b \in G$ (*prop. commutativa*)

allora $(G, *)$ è detta *Gruppo abeliano* (o *Gruppo commutativo*).

Sia $(G, *)$ un gruppo e $H \subset G$. Si dice che $(H, *)$ è un sottogruppo di $(G, *)$ se H è un gruppo rispetto alla stessa operazione definita in G.

Esempi.

i) $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$ e $(\mathbb{R}, +)$ sono gruppi. Si osservi che $(\mathbb{Z}, +)$ è un sottogruppo di $(\mathbb{Q}, +)$ che è a sua volta un sottogruppo di $(\mathbb{R}, +)$.

ii) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ non è un gruppo in quanto in genere un elemento non possiede il simmetrico (inverso)

iii) $(\mathbb{Q}, \cdot)$ non è un gruppo in quanto lo zero non ammette inverso.

iv) $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ è un gruppo.

Consideriamo ora un insieme in cui sono definite due operazioni, ossia una struttura algebrica del tipo $(G, *, \circ)$. Se:

1. $(G, *)$ è un gruppo abeliano;

2. $a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c)$ e $(b * c) \circ a = (b \circ a) * (c \circ a)$ $\forall a, b, c \in G$ (*prop. distributiva*);

3. $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ $\forall a, b, c \in G$ (*prop. associativa*);

allora la struttura $(G, *, \circ)$ è detta *Anello*.
Se inoltre vale:

4. $a \circ b = b \circ a$ $\forall a, b \in G$ (*prop. commutativa*)

la struttura $(G, *, \circ)$ è detta *Anello commutativo*.
Se ancora

5. $\exists e' \in G$ t.c. $a \circ e' = e' \circ a = a$ $\forall a \in G$ (*esistenza dell'el. neutro risp.* $\circ$)

allora la struttura $(G, *, \circ)$ è detta *Anello commutativo unitario*.
Arricchiamo ulteriormente la struttura algebrica $(G, *, \circ)$ con la seguente proprietà:

6. G^* è un gruppo (commutativo)

allora la struttura $(G, *, \circ)$ è detta *Campo*.
$(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sono esempi di campo. Nel seguito indicheremo con la lettera $\mathbb{K}$ un generico campo e chiameremo *scalari* i suoi elementi.

1.2 Matrici.

Sia $\mathbb{K}$ un campo. Se m ed n sono numeri naturali, si chiama *matrice ad m righe ed n colonne*, o *matrice di tipo $m \times n$* ad elementi in $\mathbb{K}$, un insieme di mn scalari $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $(i = 1, ..., m;\ j = 1, ..., n)$, rappresentato da una tabella del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Lo scalare a_{ij} è l'elemento di A che si trova nella i^{sima} riga e j^{sima} colonna. Con questa notazione possiamo rappresentare in modo compatto la matrice A con $A = (a_{ij})$ con $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

- Se $m \neq n$ la matrice A è detta *rettangolare*;

- se $m = n$ la matrice A è detta *quadrata di ordine n*;

- se $m = 1$ la matrice $A = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n})$ è detta anche *matrice riga* (o *vettore riga*);

- se $n = 1$ la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ . \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ è detta anche *matrice colonna* (o *vettore colonna*).

Indichiamo con $\mathbb{K}^{m,n}$ l'insieme delle matrici ad m righe ed n colonne ad elementi in $\mathbb{K}$.

Definizione 1 *Siano A,$B \in \mathbb{K}^{m,n}$ con $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ allora*

$$A = B \Longleftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \qquad (i = 1, ..., m;\ j = 1, ..., n)$$

Definizione 2 *Si definisce* matrice trasposta *di A, $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, la matrice indicata con A^t, $A^t \in \mathbb{K}^{n,m}$ ottenuta da A scambiando ordinatamente le righe con le colonne, ossia la matrice il cui elemento di posto ij è l'elemento a_{ji} .*

Si noti che $(A^t)^t = A$.

Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, definiamo ora alcune matrici particolari:

- se $a_{ij} = 0\ \forall i, j$ allora $A = O$ si dice *matrice nulla*;
- la matrice $-A := (-a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,n}$ si dice *matrice opposta* di A;

Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$, vediamo alcuni casi particolari di matrici quadrate:

- A si dice *simmetrica* se $A = A^t$, ossia se $a_{ij} = a_{ji}\ \forall i, j$;
- A si dice *antisimmetrica* se $A = -A^t$, ossia se $a_{ij} = -a_{ji}\ \forall i, j$;
- A si dice *triangolare superiore* se $a_{ij} = 0\ \forall i > j$;
- A si dice *triangolare inferiore* se $a_{ij} = 0\ \forall i < j$;
- A si dice *diagonale* se $a_{ij} = 0\ \forall i \neq j$, cioè quando è contemporaneamente triangolare superiore ed inferiore.

In generale gli elementi $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ di una matrice quadrata di ordine n costituiscono la *diagonale principale* di A, più semplicemente detta *diagonale* di A.

Tra tutte le matrici diagonali di ordine n, vi è la matrice

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

in forma compatta $I_n = (e_{ij})$ con $e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases}$. La matrice I_n è detta *matrice unità* di ordine n.

1.2.1 Somma tra matrici.

$$+ : \mathbb{K}^{m,n} \times \mathbb{K}^{m,n} \to \mathbb{K}^{m,n}$$

Siano A,$B \in \mathbb{K}^{m,n}$ con $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, si definisce *matrice somma* di A e B la matrice $S = A + B$ con $S = (s_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,n}$ tale che

$$s_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i, j$$

E' immediato verificare le seguenti proprietà:

1. $A + B = B + A \quad \forall A, B \in \mathbb{K}^{m,n}$;
2. $A + (B + C) = (A + B) + C \quad \forall A, B, C \in \mathbb{K}^{m,n}$;
3. $\exists O \in \mathbb{K}^{m,n}$ t.c. $\quad A + O = O + A = A \quad \forall A \in \mathbb{K}^{m,n}$;
4. $\forall A \in \mathbb{K}^{m,n} \quad \exists(-A) \in \mathbb{K}^{m,n}$ t.c. $\quad A + (-A) = O = (-A) + A$

da cui segue che $(\mathbb{K}^{m,n}, +)$ è un gruppo abeliano.

1.2.2 Prodotto per uno scalare.

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^{m,n} \to \mathbb{K}^{m,n}$$

$$(\lambda, A) \longmapsto \lambda \cdot A$$

(nel seguito indicheremo $\lambda \cdot A$ semplicemente con λA).

Se $A = (a_{ij})$, la matrice ottenuta dalla moltiplicazione di A con lo scalare λ è definita da

$$\lambda A := (\lambda a_{ij})$$

E' immediato verificare le seguenti proprietà:

5. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B \quad \forall A, B \in \mathbb{K}^{m,n}$ e $\forall \lambda \in \mathbb{K}$;
6. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A \quad \forall A \in \mathbb{K}^{m,n}$e $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$;
7. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A) \quad \forall A \in \mathbb{K}^{m,n}$e $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$;
8. $1A = A \; \forall A \in \mathbb{K}^{m,n}$.

Sull'insieme $\mathbb{K}^{m,n}$ abbiamo così definito le operazioni di somma e di prodotto per uno scalare. Le proprietà dalla 1. alla 8., ci dicono che la struttura $(\mathbb{K}^{m,n}, +, \cdot)$ è uno *Spazio vettoriale* su $\mathbb{K}$.

Osserviamo che dalla proprietà 6 discende che la matrice $(-\lambda)A$ è l'opposto della matrice λA, ossia

$$(-\lambda)A = -\lambda A.$$

Basta osservare che

$$\lambda A + (-\lambda)A = (\lambda + (-\lambda))A = 0A = O$$

Altre proprietà delle matrici:

- $\forall A, B \in \mathbb{K}^{m,n} \quad (A+B)^t = A^t + B^t \quad$ e $\quad (\lambda A)^t = \lambda A^t$
- $\forall A \in \mathbb{K}^{m,n} \quad \lambda A = O \Leftrightarrow \lambda = 0$ oppure $A = O$. Infatti:

Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ con $A = (a_{ij})$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Per la definizione di prodotto di una matrice per uno scalare, si ha $\lambda A = (\lambda a_{ij})$, da cui

$$\lambda A = O \Leftrightarrow \lambda a_{ij} = 0 \quad \forall i, j$$

Se $a_{ij} = 0 \ \forall i, j$ allora $A = O$ e la tesi è provata.

Supponiamo quindi che esista almeno un elemento $\widetilde{a}_{ij} \neq 0$ e $\lambda \widetilde{a}_{ij} = 0$. Se $\lambda \neq 0$ allora $\mathbb{K}^*$ non è chiuso rispetto al prodotto poichè esistono due elementi λ, $\widetilde{a}_{ij}$ entrambi non nulli il cui prodotto è zero contro l'ipotesi che $\mathbb{K}^*$ è un campo.

- $\forall A \in \mathbb{K}^{n,n} \quad A + A^t$ è simmetrica. Infatti:

$$(A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t$$

- $\forall A \in \mathbb{K}^{n,n} \quad A - A^t$ è antisimmetrica. Infatti:

$$(A - A^t)^t = A^t - (A^t)^t = A^t - A = -(A - A^t)$$

- Ogni matrice quadrata A si può scrivere come somma di una matrice simmetrica A_s e di una matrice antisimmetrica A_a con $A_s = \frac{A+A^t}{2}$ e $A_a = \frac{A-A^t}{2}$.

1.2.3 Prodotto tra matrici.

Date due matrici A e B, si definisce il prodotto (righe per colonne) $A \cdot B$ solo quando il numero delle colonne di A coincide con il numero delle righe di B ossia quando A è di tipo $m \times r$ e B è di tipo $r \times n$.

Se $A \in \mathbb{K}^{m,r}$con $A = (a_{ij})$ e $B \in \mathbb{K}^{r,n}$ con $B = (b_{ij})$, il prodotto $A \cdot B$ è la matrice $C \in \mathbb{K}^{m,n}$ con $C = (c_{ij})$ dove

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ir}b_{rj} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj}$$

c_{ij} è dunque la somma degli r prodotti degli elementi della i-esima riga di A con gli elementi corrispondenti della j-esima colonna di B. Come già detto questo prodotto è detto *prodotto righe per colonne.*

Nel seguito indicheremo $A \cdot B$ semplicemente con AB.

E' evidente che il prodotto BA è definito solo se $m = n$. Se A e B sono matrici quadrate dello stesso ordine in generale si può avere $AB \neq BA$.

Esempio:

Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

mentre

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Se $AB = BA$ allora diremo che le matrici A e B sono *permutabili*.

In $\mathbb{K}^{n,n}$ la matrice I_n permuta con ogni altra matrice, ossia:

$$\forall A \in \mathbb{K}^{n,n} \quad I_n A = A I_n = A.$$

E' immediato verificare le seguenti proprietà:

1. $A(BC) = (AB)C \quad \forall A, B, C \in \mathbb{K}^{n,n}$;
2. $A(B + C) = AB + AC \quad \forall A, B, C \in \mathbb{K}^{n,n}$;
3. $(B + C)A = BA + CA \quad \forall A, B, C \in \mathbb{K}^{n,n}$;

da cui segue che $(\mathbb{K}^{n,n}, +, \cdot)$ è un anello.

Altre proprietà del prodotto tra matrici:

- $A(\lambda B) = \lambda(AB) = (\lambda A)B$
- $AO = O$

Si osservi che si può avere $AB = O$ senza che A o B siano matrici nulle. In tal caso A e B si dicono *divisori dello zero*.

Esempio.

Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $(AB)^t = B^t A^t$. Infatti:

Siano $A \in \mathbb{K}^{m,r}$ e $B \in \mathbb{K}^{r,n}$ allora $A^t \in \mathbb{K}^{r,m}$ e $B^t \in \mathbb{K}^{n,r}$ per cui è possibile calcolare sia AB che $B^t A^t$.

Poniamo $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = AB = (c_{ij})$ e $A^t = (a^t_{ij})$, $B^t = (b^t_{ij})$ e $C^t = (c^t_{ij})$. Sia $D = B^t A^t = (d_{ij})$.

Vogliamo provare che $C^t = D$, ossia che $c^t_{ij} = d_{ij}$ $\forall i, j$

$$c^t_{ij} = c_{ji} = \sum_{k=1}^{r} a_{jk}b_{ki} = \sum_{k=1}^{r} a^t_{kj}b^t_{ik} = \sum_{k=1}^{r} b^t_{ik}a^t_{kj} = d_{ij}$$

- Se $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ allora $A^h = A^{h-1}A$. Infatti: $A^2 = AA$, $A^3 = A^2A$...

- Se $AB = BA$ allora $(AB)^h = A^hB^h$. Proviamolo per induzione su h.

Per $h = 2$ si ha $(AB)^2 = ABAB = AABB = A^2B^2$
Supponiamo sia $(AB)^{h-1} = A^{h-1}B^{h-1}$ e consideriamo $(AB)^h = (AB)^{h-1}AB$. Per l'ipotesi induttiva

$$(AB)^{h-1}AB = A^{h-1}B^{h-1}AB$$

ma da $AB = BA$ segue

$$A^{h-1}B^{h-1}AB = (A^{h-1}A)(B^{h-1}B) = A^hB^h$$

Consideriamo l'insieme $\mathbb{K}^{n,n}$, abbiamo visto che esiste l'elemento neutro, la matrice I, rispetto all'operazione di prodotto tra matrici e che tale operazione è associativa ma non commutativa. Vogliamo ora dare una risposta alla seguente domanda:
Data una matrice quadrata A, esiste una matrice A' che funga da inverso rispetto al prodotto? Cioè tale che $AA' = A'A = I$?

Definizione 3 *Una matrice quadrata A si dice invertibile se esiste una matrice dello stesso ordine, che indichiamo con A^{-1}, tale che*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

A^{-1}, se esiste, è univocamente determinata dalle precedenti relazioni. Infatti: supponiamo per assurdo che esista una matrice B tale che $AB = BA = I$.

$$AB = I \Rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}I \Rightarrow (A^{-1}A)B = A^{-1} \Rightarrow IB = B = A^{-1}$$

Valgono le seguenti proprietà:

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Infatti si ha:

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

e analogamente

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

da cui segue che $B^{-1}A^{-1}$ è l'inversa di AB.

- $(A^{-1})^{-1} = A$.

Banalmente da $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ segue che A è l'inversa di A^{-1} e quindi $(A^{-1})^{-1} = A$.

- Se A è invertibile allora

$$AB = 0 \Rightarrow B = 0 \qquad \text{e} \qquad AB = AC \Rightarrow B = C$$

Per stabilire quando una matrice è invertibile e per calcolare poi la sua inversa useremo uno strumento particolarmente utile: il *determinante*.

1.3 Determinante.

Definizione 4 *Sia S un insieme, si chiama* permutazione *di S ogni corrispondenza biunivoca di S in sè.*

$$\sigma : S \longrightarrow S$$

Se la cardinalità di S è uguale ad n, in simboli $card(S) = n$, possiamo pensare di "numerare" gli elementi di S da 1 ad n e considerare σ come permutazione dell'insieme numerico $\{1, 2, ..., n\}$.

Ad esempio se $S = \{1, 2, 3\}$ e σ è tale che

$$\sigma(1) = 3 \quad \sigma(2) = 2 \quad \sigma(3) = 1$$

allora indichiamo la permutazione σ con la seguente notazione $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, o più semplicemente con $(3, 2, 1)$, essendo la prima riga costituita sempre da $(1, 2, 3)$.

Le possibili permutazioni su n oggetti sono $n(n-1)(n-2)...1 = n!$ La permutazione identica $(1, 2, ..., n)$ è detta *fondamentale*. Ogni permutazione si può ottenere dalla fondamentale tramite *scambi*, ovvero permutazioni di due soli elementi.

Se consideriamo $\sigma = (3, 2, 1)$, per ottenere la permutazione fondamentale possiamo seguire due percorsi diversi

$$(3, 2, 1) \rightarrow (3, 1, 2) \rightarrow (1, 3, 2) \rightarrow (1, 2, 3)$$

$$(3, 2, 1) \rightarrow (1, 2, 3)$$

osserviamo che, in entrambi i casi, il numero di scambi effettuato è diverso ma sempre dispari. Questo vale in generale, ossia il numero di scambi può essere diverso ma sempre un numero con la stessa parità.

Una permutazione σ è detta di classe pari (dispari) se occorrono un numero pari (dispari) di scambi per ottenere la permutazione fondamentale. Fissata una permutazione σ, col simbolo $\epsilon(\sigma)$ si indica il numero 1, oppure -1, a seconda che σ risulti di classe pari o dispari.

Definizione 5 *Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ con $A = (a_{ij})$, chiamiamo* determinante *di A il numero*

$$\det A = \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... a_{n\sigma(n)}$$

dove la sommatoria è estesa a tutte le $n!$ permutazioni dell'insieme $\{1, 2, ..., n\}$.

- se $n = 1$ allora $\det A = a_{11}$
- se $n = 2$ le permutazioni possibili su 2 oggetti sono $(1, 2)$ e $(2, 1)$ da cui

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- se $n = 3$ le permutazioni possibili su 3 oggetti sono

$$(1, 2, 3),\ (1, 3, 2),\ (3, 1, 2),\ (3, 2, 1),\ (2, 3, 1),\ (2, 1, 3)$$

  da cui

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

All'aumentare dell'ordine n della matrice A, il calcolo del determinante di A diventa sempre più complicato. Viene in aiuto una regola di calcolo dovuta a Laplace che andiamo ad introdurre.

Fissato un elemento a_{ij} di A, si chiama *minore complementare* di a_{ij} la sottomatrice di A di ordine $n - 1$, ottenuta cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna.

Si chiama *complemento algebrico* di a_{ij} o *cofattore* di a_{ij}

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\text{minore complementare di } a_{ij})$$

Teorema 6 *(I Teorema di Laplace) Sia A una matrice quadrata di ordine n. Allora*

$$\det A = a_{r1}A_{r1} + ... + a_{rn}A_{rn}$$

dove r è una fissata riga (scelta arbitrariamente), oppure

$$\det A = a_{1c}A_{1c} + ... + a_{nc}A_{nc}$$

dove c è una fissata colonna (scelta arbitrariamente).

Con questo teorema si può dare una definizione ricorsiva di determinante:

$$|A| = \det A = \begin{cases} a_{11} & \text{se } n = 1 \\ \sum_i a_{ij}A_{ij} = \sum_j a_{ij}A_{ij} & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Quindi

$$det : \mathbb{K}^{n,n} \to \mathbb{K}.$$

Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$. Una prima conseguenza del teorema di Laplace è:

1. $\det A = \det A^t$;

2. se gli elementi di una riga (o colonna) di A vengono moltiplicati per uno stesso numero reale k, allora il determinante della matrice così ottenuta è dato da $k \det A$;

3. il determinante di una matrice triangolare è uguale al prodotto degli elementi della diagonale principale. In particolare $\det I_n = 1$

Nel calcolo pratico dei determinanti solitamente si utilizzano delle particolari proprietà che consentono di giungere al risultato senza ricorrere alla definizione generale di determinante.

Procedendo per induzione, dopo averlo verificato direttamente per $n = 2$, si hanno le seguenti *proprietà per il calcolo dei determinanti***:**

1. se due matrici A e B differiscono soltanto per uno scambio di righe (o colonne), allora $\det B = -\det A$;

ne segue che:

2. se A ha due righe (o colonne) uguali, allora $\det A = 0$;

3. se A ha due righe (o colonne) proporzionali, allora $\det A = 0$.

Inoltre

4. se B si ottiene da A aggiungendo ad una certa riga (o colonna) di A un'altra riga (o colonna) di A moltiplicata per un fattore di proporzionalità, allora $\det A = \det B$.

Proposizione 7 *(II Teorema di Laplace) La somma dei prodotti degli elementi di una riga (o colonna) di una matrice quadrata per i complementi algebrici dei corrispondenti elementi di un'altra riga (o colonna) è zero. Cioè*

$$\begin{array}{rcll} a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} & = & 0 & \quad \forall i \neq j \\ a_{1k}A_{1h} + a_{2k}A_{2h} + \ldots + a_{nk}A_{nh} & = & 0 & \quad \forall h \neq k \end{array}$$

Teorema 8 *(Regola di Binet) Se $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ si ha*

$$\det(AB) = (\det A)(\det B)$$

Quindi in generale $AB \neq BA$ ma $\det(AB) = \det(BA)$.

Proposizione 9 *Sia A una matrice quadrata. La matrice A è invertibile se e solo se* $\det A \neq 0$*. Se A è invertibile allora* $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

Dim. Sia A invertibile, allora $AA^{-1} = I \Rightarrow \det(AA^{-1}) = \det I$. Per la Regola di Binet si ha $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$ da cui segue $\det A \neq 0$ e $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

La dimostrazione del viceversa è omessa. ■

Una matrice quadrata A per cui $\det A \neq 0$ è detta *non singolare*. Se A è una matrice non singolare allora è invertibile e si prova che

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} Ad_j(A)$$

dove $Ad_j(A)$, detta *aggiunta classica* di A, è la matrice che ha al posto (i, j) il cofattore A_{ji} di a_{ji}.

1.3.1 Il Gruppo Lineare $GL(n, K)$ ed il gruppo Ortogonale $O(n, R)$.

Siano A e B due matrici non singolari. Da $\det A \neq 0$ e $\det B \neq 0$ segue $\det(AB) = \det A \det B \neq 0$ e quindi anche la matrice AB risulta essere non singolare. Inoltre esiste A^{-1} e $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \neq 0$, ossia l'inversa di una matrice non singolare è ancora non singolare.

Ovviamente la matrice identica I è non singolare in quanto $\det I = 1$.

Indichiamo con $GL(n, \mathbb{K})$ l'insieme di tutte le matrici quadrate di ordine n, ad elementi in $\mathbb{K}$, non singolari

$$GL(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathbb{K}^{n,n} \,|\det A \neq 0\}$$

Valgono le seguenti proprietà:

1. $A, B \in GL(n, \mathbb{K}) \Rightarrow AB \in GL(n, \mathbb{K})$ (ossia $GL(n, \mathbb{K})$ è chiuso rispetto al prodotto tra matrici);
2. $(AB)C = A(BC) \qquad \forall A, B, C \in GL(n, \mathbb{K})$ (proprietà associativa del prodotto tra matrici);
3. $\exists I \in GL(n, \mathbb{K})$ t.c. $\quad AI = IA = A \quad \forall A \in GL(n, \mathbb{K})$ (esistenza dell'elemento neutro);
4. $\forall A \in GL(n, \mathbb{K}) \quad \exists A^{-1} \in GL(n, \mathbb{K})$ t.c. $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ (esistenza dell'inverso).

Possiamo quindi dire che $(GL(n, \mathbb{K}), \cdot)$ è un gruppo detto *Gruppo Lineare* (delle matrici invertibili).

Definiamo ora un particolare sottoinsieme di $GL(n, \mathbb{R})$

Definizione 10 *Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, A si dice ortogonale se $AA^t = A^tA = I_n$.*

Osserviamo che se A è ortogonale allora $\det A = \pm 1$. Infatti:

$$A \text{ ortogonale } \Rightarrow A^tA = I_n$$

da cui
$$\det(A^t A) = \det I_n$$
e per la regola di Binet
$$\det(A^t A) = \det A^t \det A = 1$$
e quindi
$$\det A^t = \det A \ \Rightarrow (\det A)^2 = 1$$
e quindi $\det A = \pm 1$.

Naturalmente non vale il viceversa.

Se ad esempio consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ si ha che $\det A = 1$ ma
$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq I.$$

Siano A, B due matrici ortogonali, allora $A^t = A^{-1}$ e $B^t = B^{-1}$. Consideriamo
$$(AB)^t = B^t A^t = B^{-1} A^{-1} = (AB)^{-1}$$
da cui segue che AB è ortogonale.

Inoltre
$$(A^{-1})^t A^{-1} = (A^t)^t A^{-1} = AA^{-1} = I$$

analogamente
$$A^{-1}(A^{-1})^t = A^{-1}(A^t)^t = A^{-1}A = I$$
da cui segue che $(A^{-1})^t$ è l'inversa di A^{-1}, ossia A^{-1} è ortogonale.

Ovviamente la matrice identica I è ortogonale in quanto $I^t = I^{-1} = I$.

Indichiamo con $\mathcal{O}(n, \mathbb{R})$ l'insieme di tutte le matrici ortogonali di ordine n. Ovviamente $\mathcal{O}(n, \mathbb{R}) \subset GL(n, \mathbb{R})$.

Valgono le seguenti proprietà:

1. $A, B \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R}) \Rightarrow AB \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R})$ (ossia $\mathcal{O}(n, \mathbb{R})$ è chiuso rispetto al prodotto tra matrici).

2. $(AB)C = A(BC) \qquad \forall A, B, C \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R})$ (proprietà associativa del prodotto tra matrici).

3. $\exists I \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R}) \quad$ t.c. $\quad AI = IA = A \quad \forall A \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R})$ (esistenza dell'elemento neutro).

4. $\forall A \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R}) \quad \exists A^{-1} \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R})$ t.c. $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ (esistenza dell'inverso).

Possiamo quindi dire che $(\mathcal{O}(n, \mathbb{R}), \cdot)$ è un gruppo detto *Gruppo Ortogonale* ed è un sottogruppo di $GL(n, \mathbb{R})$.

1.3.2 Rango di una matrice.

Sia $A \in \mathbb{K}^{n,m}$. Da A possiamo estrarre sottomatrici quadrate di ordine r, con $1 \leq r \leq min\{n,m\}$. Di queste sottomatrici quadrate, dette *minori*, si può calcolare il determinante e verificare se è o meno nullo.

Definizione 11 *Il rango di una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,m}$, indicato con $rg(A)$, è dato dal massimo ordine dei suoi minori con determinante non nullo.*

Se ad esempio il $rg(A) = p$ allora

1. esiste almeno un minore B di A che ha ordine p e tale che $\det B \neq 0$
2. tutti gli eventuali minori di ordine maggiore di p hanno determinante nullo.

Osserviamo che

- $rg(A) = 0 \Rightarrow A = O$ matrice nulla;
- $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ e $rg(A) = n \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ invertibile;
- B sottomatrice di $A \Rightarrow rg(B) \leq rg(A)$.

1.4 Combinazione lineare di colonne (o righe).

Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Se indichiamo con $\mathbf{c}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ . \\ . \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m,1}$ la j-esima colonna di A, possiamo rappresentare la matrice A in modo più compatto come

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & & | \\ | & | & & & | \\ \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & . & . & \mathbf{c}_n \\ | & | & & & | \\ | & | & & & | \end{pmatrix}.$$

Siano poi $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m,1}$ e $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n,1}$

Definizione 12 *La matrice colonna* $\mathbf{b}$ *si dice* combinazione lineare *delle colonne di A con coefficenti $x_1, x_2, ..., x_n$ se*

$$\mathbf{b} = x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + ... + x_n\mathbf{c}_n$$

quindi $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ . \\ . \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ . \\ . \\ a_{m2} \end{pmatrix} + ... + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ . \\ . \\ a_{mn} \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} x_1a_{11} \\ . \\ . \\ x_1a_{m1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2a_{12} \\ . \\ . \\ x_2a_{m2} \end{pmatrix} + ... + \begin{pmatrix} x_na_{1n} \\ . \\ . \\ x_na_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1a_{11} + x_2a_{12} + ... + x_na_{1n} \\ . \\ . \\ x_1a_{m1} + x_2a_{m2} + ... + x_na_{mn} \end{pmatrix}$
ossia $\mathbf{b} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = AX.$

Analogamente, se indichiamo con $\mathbf{r}_i = (\ a_{i1}, ..., a_{in}) \in \mathbb{K}^{1,n}$ la i-esima riga di A, possiamo rappresentare la matrice A per righe

$$A = \begin{pmatrix} - & - & \mathbf{r}_1 & - & - \\ - & - & \mathbf{r}_2 & - & - \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ - & - & \mathbf{r}_m & - & - \end{pmatrix}.$$

Siano poi $\widetilde{\mathbf{b}} = (\widetilde{b}_1, ..., \widetilde{b}_n) \in \mathbb{K}^{1,n}$ e $Y = (y_1, ..., y_m) \in \mathbb{K}^{1,m}$

Definizione 13 *La matrice riga* $\widetilde{\mathbf{b}}$ *si dice* combinazione lineare *delle righe di A con coefficenti $y_1, y_2, ..., y_m$ se*

$$\widetilde{\mathbf{b}} = y_1\mathbf{r}_1 + y_2\mathbf{r}_2 + ... + y_m\mathbf{r}_m$$

In questo caso sarà $\widetilde{\mathbf{b}} = YA$.

Osserviamo che data una matrice $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ può accadere che una colonna (o riga) sia combinazione lineare delle rimanenti colonne (o righe).

1.5 Sistemi Lineari.

Un *sistema lineare* di m equazioni in n incognite $x_1, x_2, ..., x_n$ è un sistema del tipo

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

o in forma compatta

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad i = 1, 2, ..., m$$

dove a_{ij} sono detti *coefficenti* e $b_i \in \mathbb{K}$ *termini noti.* Se $b_i = 0$ $\forall i$ il sistema si dice *omogeneo.*

In forma matriciale il sistema $(*)$ si rappresenta con

$$AX = B$$

dove $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,n}$ è la *matrice dei coefficenti*, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ è la colonna delle incognite e $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$ quella dei termini noti.

Dire che $\widetilde{X}$ è *soluzione del sistema* $(*)$ vuol dire che la n-pla $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, ..., \widetilde{x}_n)$ soddisfa simultaneamente tutte le equazioni di $(*)$. Equivalentemente possiamo dire che $\widetilde{X}$ è soluzione del sistema $(*)$ se la colonna B è combinazione lineare delle colonne di A con coefficenti $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, ..., \widetilde{x}_n$.

Un sistema si dice *compatibile* se ammette almeno una soluzione.

I problemi che ci porremmo nel seguito sono i seguenti:

"Dato un sistema $AX = B$, stabilire se è compatibile. In caso affermativo determinare il numero delle soluzioni e calcolarle esplicitamente".

I primi due problemi sono risolti completamente dal teorema di Rouchè-Capelli, che afferma:

$$\text{il sistema } (*)\text{è compatibile } \Leftrightarrow rg(A) = rg(A|B)$$

dove $A|B$ è la *matrice completa* del sistema ottenuta aggiungendo ad A la colonna B dei termini noti. In generale è $rg(A) \leq rg(A|B)$. Inoltre

se $rg(A) = rg(A|B) = p$ si hanno i seguenti casi: $\begin{cases} p = n & \text{una sola soluzione} \\ p < n & \infty^{n-p} \text{ soluzioni} \end{cases}$

dove con "∞^{n-p} soluzioni" si intende infinite soluzioni dipendenti da $n - p$ parametri indipendenti.

Osservazione 14 *La risoluzione di un sistema compatibile di rango p si riconduce sempre a quella di un sistema di p equazioni in p incognite (con matrice dei coefficienti non singolare). Basta considerare come parametri le $n-p$ incognite, i cui coefficienti non concorrono a formare il minore A' di rango uguale a p.*

Si tratterà allora di risolvere un sistema di p equazioni in p incognite con $\det A' \neq 0$.

$$A'X = B' \Leftrightarrow X = A'^{-1}B'$$

l'espressione esplicita delle soluzioni è fornita dal seguente teorema

Teorema 15 *(di Cramer) Sia* $AX = B$ *un sistema di* p *equazioni in* p *incognite e sia* $\det A \neq 0$. *Allora il sistema ammette un'unica soluzione* $(x_1, x_2, ..., x_p)$ *le cui componenti sono date da*

$$x_k = \frac{\left|A^{(k)}\right|}{|A|}$$

dove $A^{(k)}$ *è la matrice ottenuta da* A *sostituendo alla* k*-esima colonna di* A *la colonna dei termini noti.*

Osservazione 16 *I sistemi omogenei, ossia del tipo* $AX = O$ *ammetteno sempre almeno la soluzione nulla* $X = O$ *(che è unica se* $\det A \neq 0$*). Se invece* $rg(A) = p < n$ *allora il sistema omogeno ammette* ∞^{n-p} *soluzioni dette* autosoluzioni.

1.5.1 Matrici a scala e sistemi lineari a scala.

Definizione 17 *Una matrice si dice* ***a scala*** *se soddisfa entrambe le seguenti proprietà:*

1) Se una riga è nulla, allora tutte le righe ad essa sottostanti sono nulle.

2) Sotto il primo elemento non nullo di ciascuna riga, e sotto tutti gli zeri che lo precedono, ci sono elementi nulli.

Esempi.

Le seguenti matrici sono a scala:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

mentre

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

non è a scala, per esserlo, sotto l'elemento $a_{23} = 3$, ci dovrà essere uno zero.

Osserviamo che la matrice C, essendo una matrice quadrata a scala priva di righe nulle, è in particolare una matrice triangolare superiore.

Definizione 18 *Il primo elemento non nullo di ciascuna riga di una matrice a scala è detto* ***pivot***.

Definizione 19 *Un sistema lineare si dice a scala se la sua matrice completa è una matrice a scala.*

Il teorea di Rouchè-Capelli riletto per i sistemi a scala diventa:

Se $SX = B$ è un sistema lineare a scala di m equazioni in n incognite, con matrice completa $S|B$ allora il sistema è compatibile se e solo se l'ultimo pivot di $S|B$ non appartiene alla colonna dei termini noti, inoltre se il sistema è compatibile e se p è il numero dei pivot si hanno i seguenti casi:

$$\begin{cases} p = n & \text{una sola soluzione} \\ p < n & \infty^{n-p} \text{ soluzioni} \end{cases}$$

I sistemi a scala sono facilmente risolubili in quanto si può procedere partendo dall'ultima equazione sostituendo, ordinatamente, il valore trovato nelle equazioni che lo precedono.

Osservazione. Se il sistema a scala dato è compatibile, allora il numero dei pivot della sua matrice completa coincide con il numero di righe non nulle, cioè con il numero delle equazioni significative del sistema.

L'algoritmo di Gauss che andiamo a descrivere nel seguito è un procedimento che, applicato ad un dato sistema $AX = B$, permette di costruire un sistema a scala $SX = B'$ avente lo stesso insieme delle soluzioni del sistema di partenza. Risolvendo il sistema a scala abbiamo così risolto anche il sistema di partenza.

Definizione 20 *Due sistemi lineari si dicono equivalenti se hanno lo stesso insieme di soluzioni.*

Consideriamo ora le seguenti operazioni su un sistema lineare, dette *operazioni elementari*:

1. Scambiare due equazioni del sistema.
2. Moltiplicare un'equazione per uno scalare non nullo.
3. Sommare a una data equazione un multiplo di un'altra equazione del sistema.

E facile vedere che, se applichiamo una qualunque di tali operazioni ad un sistema, otteniamo un sistema avente le stesse soluzioni di quello di partenza: cioè, le operazioni elementari non alterano l'insieme delle soluzioni, e producono via via sistemi equivalenti al sistema di partenza.

Sappiamo che un sistema lineare è univocamente determinato dalla sua matrice completa. Le equazioni corrispondono alle righe, dunque le operazioni elementari sui sistemi corrispondono alle seguenti operazioni, dette *operazioni elementari sulle righe*:

1. Scambiare due righe della matrice.
2. Moltiplicare una riga per un numero non nullo.
3. Sommare a una data riga un multiplo di un'altra riga della matrice.

La notazione simbolica che useremo per le operazioni elementari è la seguente. Indichiamo con $r_1, ..., r_m$ le righe della matrice. Allora:

1. $r_i \leftrightarrow r_j$ scambia la i-esima riga con la j-esima riga.
2. $r_i \to kr_i$ moltiplica la i-esima riga per k.
3. $r_i \to r_i + kr_j$ sostituisce la i-esima riga con la somma della i-esima riga e la j-esima riga moltiplicata per k.

Definizione 21 *La matrice A' si dice equivalente per righe alla matrice A se A' si ottiene da A mediante una successione di operazioni elementari sulle righe. In particolare, matrici equivalenti per righe rappresentano sistemi lineari equivalenti.*

L'algoritmo di Gauss si può usare per dimostrare la seguente proposizione.

Proposizione 22 *Con un opportuno uso delle operazioni elementari sulle righe, è sempre possibile ridurre una qualunque matrice A a una matrice a scala A' ad essa equivalente per righe. In particolare, ogni matrice è equivalente per righe a una matrice a scala.*

Corollario 23 *Ogni sistema lineare è equivalente a un sistema lineare a scala.*

Algoritmo di Gauss.

L'algoritmo prevede in ingresso una data matrice A, $m \times n$, ed in uscita una matrice S a scala per righe, equivalente per righe ad A.

Passo 1.

1.1 Se la matrice è formata da una sola riga, l'algoritmo termina; altrimenti:

1.2 individuare la colonna non nulla con indice più basso, ed il suo pivot, cioè la sua prima componente non nulla; se non esistono colonne non nulle, la matrice è nulla, quindi è già a scala e in questo caso l'algoritmo termina qui.

1.3 Se il pivot è nella riga di posto i, scambiare la prima riga con quella di posto i.

1.4 Rendere nulle tutte le altre componenti della colonna che contiene il pivot della prima riga, sommando alle varie righe opportuni multipli della prima.

Passo 2.

Ripetere il passo 1 sulla matrice ottenuta dal passo precedente, schermandone però la prima riga.

Passo 3.

Ripetere il passo 2 sulla matrice schermata, fino ad esaurimento delle righe.

Osservazione. Considerata una matrice quadrata A invertibile, con l'algoritmo di Gauss è possibile ottenere una matrice A' triangolare superiore equivalente per righe ad A.

2 I vettori geometrici.

Sia S_3 l'insieme dei punti dello spazio geometrico ordinario (spazio euclideo). Siano $A, B \in S_3$, indichiamo con AB il segmento orientato di primo estremo A e di secondo estremo B (o come spesso diremo di origine A ed estremo B).

Nell'insieme dei segmenti orientati di S_3 definiamo la seguente relazione detta *relazione di equipollenza*:

il segmento orientato AB è equipollente al segmento CD, in simboli $AB \sim CD$, se i punti medi di AD e BC coincidono.

Si verifica che questa relazione è riflessiva, simmetrica e transitiva, quindi è una relazione di equivalenza. Si noti che due segmenti AD e BC equipollenti giacciono su rette parallele, hanno la stessa lunghezza ed hanno "orientamento concorde".

Le classi di equivalenza rispetto a questa relazione si dicono *vettori liberi* dello spazio S_3.

Indicheremo i vettori liberi con $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, ...$ e l'insieme di questi vettori con $\mathbb{V}_3$. Per indicare che il segmento orientato AB è un rappresentante del vettore libero $\overrightarrow{u}$ useremo la notazione

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$$

Si osservi che fissato un vettore libero $\overrightarrow{u}$ ed un punto A esiste uno ed un solo rappresentante del vettore $\overrightarrow{u}$ con primo estremo A.

La classe di equipollenza costituita da tutti i segmenti orientati in cui l'origine coincide con l'estremo si dice *vettore nullo* e si indica con $\overrightarrow{0}$.

Se $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{0}$, cioè $A \neq B$, al vettore $\overrightarrow{AB}$ si associano:

1. un numero strettamente positivo uguale alla lunghezza del segmento AB, rispetto ad una fissata unità di misura, che si chiama *norma* o *modulo* del vettore e si denota con $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$;
2. una direzione: quella della retta passante per A e B;
3. un verso: quello che da A porta a B.

Il vettore nullo ha norma nulla, direzione e verso indeterminati.

2.1 Somma in $\mathbb{V}_3$

Se O è un punto fisso di S_3 l'applicazione

$$S_3 \to \mathbb{V}_3$$

$$P \mapsto \overrightarrow{OP}$$

è biiettiva.

Siano $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ vettori di $\mathbb{V}_3$. Scelti come rappresentanti di $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ i segmenti orientati AB e BC rispettivamente, chiameremo somma di $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ il vettore libero $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ rappresentato dal segmento orientato AC.

Si verificano facilmente le seguenti proprietà:

1. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \quad \forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{V}_3$;
2. $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) \ \ \forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{V}_3$;

   infatti siano $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{CD}$

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

3. $\exists\, \overrightarrow{0} \in \mathbb{V}_3$ t.c. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} \quad \forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{V}_3$;

   infatti se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ basterà considerare come rappresentante di $\overrightarrow{0}$ il segmento orientato $\overrightarrow{AA}$ oppure $\overrightarrow{BB}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u} \\ \overrightarrow{0} + \overrightarrow{u} &= \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}\end{aligned}$$

4. $\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{V}_3 \quad \exists (-\overrightarrow{u}) \in \mathbb{V}_3$ t.c. $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = (-\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$;

   se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ allora $(-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{BA}$. Infatti

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0} \\ (-\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{u} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{0}\end{aligned}$$

Segue allora che $(\mathbb{V}_3, +)$ è un Gruppo abeliano.

Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ sono due vettori liberi di cui vogliamo calcolare la somma, possiamo procedere anche nel seguente modo:

poniamo $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$, in questo modo $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ sarà uguale al vettore $\overrightarrow{OC}$ dove C è il quarto vertice del parallelogramma costruito sui lati OA e OB. La regola appena illustrata è detta *regola del parallelogramma.*

Definizione 24 *Si definisce* angolo di due vettori *non nulli* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$ *l'angolo convesso* $A\widehat{O}B$ *di due loro rappresentanti* $\overrightarrow{OA}$ *e* $\overrightarrow{OB}$*.*

La misura $\widehat{\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}}$ di tale angolo è pertanto soggetta alle limitazioni

$$0 \leq \widehat{\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}} \leq \pi$$

2.2 Prodotto di un vettore per uno scalare.

Sia λ un numero reale, il prodotto di un vettore $\overrightarrow{v}$ di $\mathbb{V}_3$ per λ è l'applicazione:

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{V}_3 \to \mathbb{V}_3$$
$$(\lambda, \overrightarrow{v}) \mapsto \lambda \overrightarrow{v}$$

definita nel seguente modo:

a) se $\lambda = 0$ oppure $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$

$$\lambda \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$$

b) se $\lambda \neq 0$ e $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$:

- la direzione di $\lambda \overrightarrow{v}$ coincide con quella di $\overrightarrow{v}$;

- il modulo di $\lambda \overrightarrow{v}$ è il prodotto del valore assoluto di λ per il modulo di $\overrightarrow{v}$

$$\|\lambda \overrightarrow{v}\| = |\lambda| \, \|\overrightarrow{v}\|$$

- il verso di $\lambda \overrightarrow{v}$ è concorde con quello di $\overrightarrow{v}$ se $\lambda > 0$, discorde se $\lambda < 0$.

L'operazione così definita gode delle le seguenti proprietà:

5. $\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda \overrightarrow{v} + \lambda \overrightarrow{u} \quad \forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{V}_3$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$;
6. $(\lambda + \mu)\overrightarrow{v} = \lambda \overrightarrow{v} + \mu \overrightarrow{v} \quad \forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{V}_3$ e $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$;
7. $(\lambda\mu)\overrightarrow{v} = \lambda(\mu \overrightarrow{v}) \; \forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{V}_3$ e $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$;
8. $1\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \quad \forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{V}_3$

che si possono verificare utilizzando la definizione e nozioni di geometria elementare.

Dalle proprietà 1,2,...,8 segue che $(\mathbb{V}_3, +, \cdot)$ è uno Spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Dalla proprietà 6 segue che il vettore $(-\lambda)\overrightarrow{u}$ è l'opposto del vettore $\lambda \overrightarrow{u}$, ossia

$$(-\lambda)\overrightarrow{u} = -\lambda \overrightarrow{u}.$$

Un vettore $\overrightarrow{v}$ si dice *versore* se il suo modulo è unitario, ossia $\|\overrightarrow{v}\| = 1$. Se $\overrightarrow{v} \neq 0$, il vettore $\frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\overrightarrow{v}$ si dice *versore associato* a $\overrightarrow{v}$ e si indica con $vers\overrightarrow{v}$.

2.3 Lineare dipendenza e lineare indipendenza.

Definizione 25 *Siano $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ n numeri reali e siano $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, ..., \overrightarrow{v}_n$ n vettori di $\mathbb{V}_3$; il vettore*

$$\lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{v}_2 + ... + \lambda_n \overrightarrow{v}_n$$

si dice combinazione lineare *dei vettori $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, ..., \overrightarrow{v}_n$ con coefficienti $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.*

Definizione 26 *I vettori $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, ..., \overrightarrow{v}_n$ si dicono* linearmente dipendenti *se e solo se esiste una n-pla $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \neq (0, 0, ..., 0)$ tale che*

$$\lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{v}_2 + ... + \lambda_n \overrightarrow{v}_n = \overrightarrow{0}$$

Si noti che se $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \neq (0, 0, ..., 0)$ allora esiste almeno un indice i tale che $\lambda_i \neq 0$. Possiamo quindi porre

$$\overrightarrow{v}_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} \overrightarrow{v}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_i} \overrightarrow{v}_2 - ... - \frac{\lambda_n}{\lambda_i} \overrightarrow{v}_n$$

ossia almeno uno tra gli n vettori linearmente dipendenti è esprimibile come combinazione lineare dei rimanenti.

Definizione 27 *I vettori $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, ..., \overrightarrow{v}_n$ si dicono* linearmente indipendenti *se e solo se non sono linearmente dipendenti, ossia*

$$\lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{v}_2 + ... + \lambda_n \overrightarrow{v}_n = \overrightarrow{0} \Rightarrow \lambda_i = 0 \ \forall i = 1, ..., n$$

Proposizione 28 *Siano $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, ..., \overrightarrow{v}_n$ n vettori di $\mathbb{V}_3$.*

1. *se l'insieme $\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, ..., \overrightarrow{v}_n\}$ contiene k vettori linearmente dipendenti con $k \leq n$, allora $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, ..., \overrightarrow{v}_n$ sono linearmente dipendenti;*

2. *se $\overrightarrow{v} = \lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{v}_2 + ... + \lambda_n \overrightarrow{v}_n$ allora $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, ..., \overrightarrow{v}_n$ sono linearmente dipendenti.*

Dim. 1. Se $k = n$ si ha banalmente la tesi. Supponiamo allora $k < n$ e riordiniamo l'insieme $\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, ..., \overrightarrow{v}_n\}$ in modo che i primi k vettori siano linearmente dipendenti. Esiste allora una k-pla $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k) \neq (0, 0, ..., 0)$ tale che

$$\lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{v}_2 + ... + \lambda_k \overrightarrow{v}_k = \overrightarrow{0}$$

Se consideriamo la n-pla $(\lambda_1, ..., \lambda_k, 0, ..., 0)$ questa risulta essere diversa dalla n-pla nulla ed è tale che

$$\lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{v}_2 + ... + \lambda_k \overrightarrow{v}_k + 0 \overrightarrow{v}_{k+1} + ... + 0 \overrightarrow{v}_n = \overrightarrow{0}$$

ossia $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, ..., \overrightarrow{v}_n$ sono linearmente dipendenti.

2. Se $\overrightarrow{v} = \lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{v}_2 + ... + \lambda_n \overrightarrow{v}_n$ allora esiste la $n+1$-pla $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, -1) \neq (0, 0, ..., 0)$ tale che

$$\lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{v}_2 + ... + \lambda_n \overrightarrow{v}_n - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$$

ossia $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, ..., \overrightarrow{v}_n$ sono linearmente dipendenti. ■

Osserviamo che se $\overrightarrow{0} \in \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, ..., \overrightarrow{v}_n\}$ allora $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, ..., \overrightarrow{v}_n$ sono linearmente dipendenti.

Diremo che un vettore $\overrightarrow{v}$ è parallelo ad un piano α se $\overrightarrow{v}$ ha un rappresentante che giace nel piano α.

Definizione 29 *Due o più vettori non nulli si dicono* paralleli *se hanno la stessa direzione.*

Definizione 30 *Tre o più vettori si dicono* complanari *se hanno direzioni parallele ad uno stesso piano.*

Il vettore nullo $\overrightarrow{0}$, per cui non è definita la direzione, si assume parallelo ad ogni vettore di $\mathbb{V}_3$; pertanto esso risulta anche complanare con ogni coppia di vettori.

Consideriamo i vettori $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3$, poniamo

$$\overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{OP}_1, \overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{OP}_2 \text{ e } \overrightarrow{v}_3 = \overrightarrow{OP}_3.$$

Allora

$$\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2 \text{ paralleli } \Leftrightarrow O, P_1, P_2 \text{ sono allineati}$$

$$\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3 \text{ complanari } \Leftrightarrow O, P_1, P_2, P_3 \text{ sono complanari}$$

Vediamo ora di tradurre geometricamente il concetto di lineare dipendenza, e quindi di lineare indipendenza, di n vettori al variare di n.

Osservazione.

$$\overrightarrow{v} \text{ linearmente dipendente } \Leftrightarrow \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$$

Proposizione 31 *Due vettori $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2$ sono linearmente dipendenti se e solo se sono paralleli.*

Dim. Se $\overrightarrow{v}_1$ o $\overrightarrow{v}_2$ è il vettore nullo allora la tesi segue banalmente. Supponiamo quindi che $\overrightarrow{v}_1$ e $\overrightarrow{v}_2$ siano entrambi non nulli e linearmente dipendenti, allora

$$\exists (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0) \text{ tale che } \lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{0}.$$

Supponiamo sia $\lambda_2 \neq 0$, si ha $\overrightarrow{v}_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \overrightarrow{v}_1$ da cui segue $\overrightarrow{v}_1 \parallel \overrightarrow{v}_2$ per la definizione di prodotto di un numero reale per un vettore.

Viceversa se $\overrightarrow{v}_1 \parallel \overrightarrow{v}_2$ allora si vede facilmente che

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tale che } \overrightarrow{v}_2 = \lambda \overrightarrow{v}_1$$

cioè $\overrightarrow{v}_2 - \lambda \overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{0}$ con $(1, -\lambda) \neq (0, 0)$. Abbiamo così provato che $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2$ sono linearmente dipendenti. ■

Proposizione 32 *Tre vettori $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3$ sono linearmente dipendenti se e solo se sono complanari.*

Dim. Se ogni coppia $(\overrightarrow{v}_i, \overrightarrow{v}_j)$ con $i, j \in \{1,2,3\}$ è costituita da vettori linearmente dipendenti allora $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3$ sono banalmente complanari. Supponiamo quindi che $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2$ siano linearmente indipendenti e $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3$ linearmente dipendenti. Allora esiste una terna $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0,0,0)$ tale che

$$\lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{v}_2 + \lambda_3 \overrightarrow{v}_3 = \overrightarrow{0}$$

Se fosse $\lambda_3 = 0$ avremmo

$$\lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{0} \text{ con } (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0)$$

contro l'ipotesi di lineare indipendenza di $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2$. Possiamo quindi affermare che $\lambda_3 \neq 0$ da cui segue

$$\overrightarrow{v}_3 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\overrightarrow{v}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_3}\overrightarrow{v}_2$$

$\overrightarrow{v}_3$ si può quindi rappresentare con un segmento orientato $\overrightarrow{OP}_3$ del piano individuato da $\overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{OP}_1$ e $\overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{OP}_2$, cioè $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3$ sono complanari.

Viceversa, siano $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3$ complanari.

Se $\overrightarrow{v}_1 \parallel \overrightarrow{v}_2$ allora $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2$ sono linearmente dipendenti e quindi anche $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3$ saranno linearmente dipendenti.

Supponiamo quindi che $\overrightarrow{v}_1$ e $\overrightarrow{v}_2$ non siano paralleli. Poniamo

$$\overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{OP}_1, \overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{OP}_2 \text{ e } \overrightarrow{v}_3 = \overrightarrow{OP}_3.$$

con O, P_1, P_2, P_3 complanari. Poichè $\overrightarrow{v}_1$ e $\overrightarrow{v}_2$ non sono paralleli, i punti O, P_1, P_2 non sono allineati. Siano Q_1 e Q_2 le intersezioni delle rette per P_3 parallele alle rette OP_1 e OP_2 rispettivamente. Allora applicando la regola del parallelogramma si ha

$$\overrightarrow{OP}_3 = \overrightarrow{OQ}_1 + \overrightarrow{OQ}_2$$

dove $\overrightarrow{OQ}_1 = \lambda_1 \overrightarrow{OP}_1$ e $\overrightarrow{OQ}_2 = \lambda_2 \overrightarrow{OP}_2$ con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Da ciò segue

$$\overrightarrow{v}_3 = \lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{v}_2$$

ed i vettori $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3$ risultano linearmente dipendenti. ■

Proposizione 33 *Quattro o più vettori di $\mathbb{V}_3$ sono sempre linearmente dipendenti.*

Dim. E' sufficiente provare che 4 vettori di $\mathbb{V}_3$ sono sempre linearmente dipendenti poichè ogni insieme di k vettori con $k \geq 4$ conterrà 4 vettori linearmente dipendenti e quindi per quanto visto prima i k vettori saranno linearmente dipendenti. Siano $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3, \overrightarrow{v}_4$ vettori di $\mathbb{V}_3$. Se $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3$ sono linearmente dipendenti allora anche $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3, \overrightarrow{v}_4$ sono linearmente dipendenti e la tesi è provata.

Supponiamo allora che $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3$ siano linearmente indipendenti, cioè non complanari. Poniamo

$$\overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{OP}_1, \overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{OP}_2, \ \ \overrightarrow{v}_3 = \overrightarrow{OP}_3 \text{ e } \overrightarrow{v}_4 = \overrightarrow{OP}$$

Sia P' l'intersezione della retta per P parallela alla retta OP_3 con il piano individuato da O, P_1 e P_2. Allora

$$\overrightarrow{v}_4 = \overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{P'P}$$

dove $\overrightarrow{OP'} = \lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{v}_2$, essendo $\overrightarrow{OP'}$ complanare con $\overrightarrow{v}_1$ e $\overrightarrow{v}_2$, e $\overrightarrow{P'P} = \lambda_3 \overrightarrow{v}_3$ essendo $\overrightarrow{P'P}$ parallelo a $\overrightarrow{v}_3$. Pertanto

$$\overrightarrow{v}_4 = \lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{v}_2 + \lambda_3 \overrightarrow{v}_3$$

cioè esiste una quartupla $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, -1) \neq (0,0,0,0)$ tale che

$$\lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{v}_2 + \lambda_3 \overrightarrow{v}_3 - \overrightarrow{v}_4 = \overrightarrow{0}$$

Abbiamo così provato che $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3, \overrightarrow{v}_4$ sono linearmente dipendenti. ■

2.3.1 Basi e componenti.

Definizione 34 *Si dice* base *di* $\mathbb{V}_3$ *ogni terna di vettori linearmente indipendenti.*

Indichiamo con $\mathbb{R}^3$ l'insieme delle terne ordinate di numeri reali

$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \,|x_i \in \mathbb{R}\}$$

Proposizione 35 *Sia* $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3\}$ *una base di* $\mathbb{V}_3$. *Allora per ogni* $\overrightarrow{v} \in \mathbb{V}_3$ *esiste un unica terna* (x_1, x_2, x_3) *di* $\mathbb{R}^3$ *tale che*

$$\overrightarrow{v} = x_1 \overrightarrow{e}_1 + x_2 \overrightarrow{e}_2 + x_3 \overrightarrow{e}_3.$$

Dim. Per provare l'esistenza della terna (x_1, x_2, x_3) si procede come nella proposizione precedente. Per provare l'unicità della terna (x_1, x_2, x_3) procediamo per assurdo. Supponiamo allora che

$$\overrightarrow{v} = x_1 \overrightarrow{e}_1 + x_2 \overrightarrow{e}_2 + x_3 \overrightarrow{e}_3$$

e contemporaneamente

$$\overrightarrow{v} = x_1' \overrightarrow{e}_1 + x_2' \overrightarrow{e}_2 + x_3' \overrightarrow{e}_3.$$

Allora, sottraendo membro a membro, si ha:

$$\overrightarrow{0} = (x_1 - x_1')\overrightarrow{e}_1 + (x_2 - x_2')\overrightarrow{e}_2 + (x_3 - x_3')\overrightarrow{e}_3.$$

Essendo $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3\}$ una base di $\mathbb{V}_3$, i vettori $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3$ sono linearmente indipendenti e quindi i coefficienti di una loro combinazione lineare nulla devono essere necessariamente tutti nulli, cioè

$$x_i - x_i' = 0 \quad \forall i = 1, 2, 3$$

da cui la l'asserto. ■

Gli scalari x_1, x_2, x_3 si dicono *componenti* del vettore $\overrightarrow{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3\}$.

Osservazione. Occorre sempre precisare la base rispetto alla quale si considerano le componenti di un vettore; infatti se si cambia base, cambiano anche le componenti di un fissato vettore. Soltanto il vettore nullo ha le stesse componenti, tutte nulle, rispetto ad una base qualsiasi.

Fissata una base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3\}$ di $\mathbb{V}_3$, la corrispondenza

$$\mathbb{V}_3 \to \mathbb{R}^3$$

$$\overrightarrow{v} \mapsto (x_1, x_2, x_3)$$

dove (x_1, x_2, x_3) sono le componenti di $\overrightarrow{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$, permette di identificare $\mathbb{V}_3$ con $\mathbb{R}^3$. Ciò si esprime scrivendo

$$\overrightarrow{v} = (x_1, x_2, x_3)$$

Si faccia attenzione al fatto che fissando un'altra base $\mathcal{B}'$ in $\mathbb{V}_3$, cambia la corrispondenza su introdotta.

In questo modo abbiamo la possibilità di tradurre le operazioni di tipo grafico sui vettori in operazioni di tipo numerico sulle loro componenti.

Considerati i vettori $\overrightarrow{v} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\overrightarrow{u} = (y_1, y_2, y_3)$ si ha che il vettore somma di $\overrightarrow{v}$ ed $\overrightarrow{u}$ è dato da

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} &= (x_1\overrightarrow{e}_1 + x_2\overrightarrow{e}_2 + x_3\overrightarrow{e}_3) + (y_1\overrightarrow{e}_1 + y_2\overrightarrow{e}_2 + y_3\overrightarrow{e}_3) = \\ &= x_1\overrightarrow{e}_1 + y_1\overrightarrow{e}_1 + x_2\overrightarrow{e}_2 + y_2\overrightarrow{e}_2 + x_3\overrightarrow{e}_3 + y_3\overrightarrow{e}_3 = \\ &= (x_1 + y_1)\overrightarrow{e}_1 + (x_2 + y_2)\overrightarrow{e}_2 + (x_3 + y_3)\overrightarrow{e}_3 \end{aligned}$$

cioè $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$ ha come componenti, rispetto alla base $\mathcal{B}$, la somma delle componenti omonime di $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}$.

Analogamente il prodotto di un numero reale λ per il vettore $\overrightarrow{v}$ è il vettore

$$\lambda\overrightarrow{v} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$$

con componenti i prodotti di λ per le componenti di $\overrightarrow{v}$.

Anche la lineare indipendenza o dipendenza dei vettori si può tradurre in condizioni sulle componenti dei vettori stessi:

Sia $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3\}$ una fissata base di $\mathbb{V}_3$ e siano $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ tre vettori di $\mathbb{V}_3$ con

$$\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3),\ \overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3) \text{ e } \overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$$

Valgono le seguenti condizioni:

a) $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ linearmente indipendenti $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0$

Dire che $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ sono linearmente indipendenti equivale a dire che

$$\lambda_1 \overrightarrow{u} + \lambda_2 \overrightarrow{v} + \lambda_3 \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

ossia

$$(1) \begin{cases} \lambda_1 u_1 + \lambda_2 v_1 + \lambda_3 w_1 = 0 \\ \lambda_1 u_2 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 w_2 = 0 \\ \lambda_1 u_3 + \lambda_2 v_3 + \lambda_3 w_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$$

cioè il sistema lineare omogeneo di 3 equazioni nelle 3 incognite $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ammette solo la soluzione banale $(0, 0, 0)$. Ciò equivale a dire, per il teorema di Rouchè Capelli, che $rg(A) = 3$ ossia $\det A \neq 0$ con

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

b) $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ linearmente dipendenti $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0$

c) $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ linearmente indipendenti $\Leftrightarrow rg \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} = 2$

Procedendo come nel caso a) si giunge ad un sistema di 3 equazioni in 2 incognite

$$(2) \begin{cases} \lambda_1 u_1 + \lambda_2 v_1 = 0 \\ \lambda_1 u_2 + \lambda_2 v_2 = 0 \\ \lambda_1 u_3 + \lambda_2 v_3 = 0 \end{cases}$$

Perchè tale sistema lineare omogeneo ammetta solo la soluzione banale $(0, 0)$ deve essere $rg(A) = 2$ con

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix}$$

d) $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ non entrambi nulli sono linearmente dipendenti $\Leftrightarrow rg \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} =$
1

2.4 Orientazione di retta, piano e spazio.

Indichiamo con $\mathbb{V}_2$ l'insieme di tutti i vettori liberi paralleli ad un fissato piano. Spesso, per comodità, lo riguarderemo come l'insieme dei rappresentanti di tali vettori con il primo estremo un punto del piano. Il massimo numero di vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{V}_2$ è 2.

Si dice base una coppia di vettori di $\mathbb{V}_2$ linearmente indipendenti.

Se $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2\}$ è una base di $\mathbb{V}_2$, allora

$$\forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{V}_2 \quad \exists!(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tale che } \overrightarrow{v} = v_1 \overrightarrow{e}_1 + v_2 \overrightarrow{e}_2$$

la corrispondenza

$$\mathbb{V}_2 \to \mathbb{R}^2$$

$$\overrightarrow{v} \mapsto (v_1, v_2)$$

dove (v_1, v_2) sono le componenti di $\overrightarrow{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$, permette di identificare $\mathbb{V}_2$ con $\mathbb{R}^2$.

Indichiamo con $\mathbb{V}_1$ l'insieme dei vettori di $\mathbb{V}_3$ paralleli ad una fissata retta. Il massimo numero di vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{V}_1$ è 1.

Si dice base di $\mathbb{V}_1$ l'insieme costituito da un vettore non nullo di $\mathbb{V}_1$.

Se $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e}_1\}$ è una base di $\mathbb{V}_1$, allora

$$\forall \overrightarrow{v} \in \mathbb{V}_1 \quad \exists! v_1 \in \mathbb{R} \text{ tale che } \overrightarrow{v} = v_1 \overrightarrow{e}_1$$

la corrispondenza

$$\mathbb{V}_1 \to \mathbb{R}$$

$$\overrightarrow{v} \mapsto v_1$$

dove v_1 è la componente di $\overrightarrow{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$, permette di identificare $\mathbb{V}_1$ con $\mathbb{R}$.

Vogliamo ora introdurre una orientazione su una retta, in un piano e nello spazio.

- Una **retta** r si dice *orientata* quando è assegnato un vettore $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ parallelo ad r, ossia una base per i vettori paralleli ad r. Il vettore $\overrightarrow{v}$ determina un verso di percorrenza sulla retta.

- Un **piano** α si dice *orientato* quando è assegnata una coppia ordinata $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ di vettori non paralleli del piano. Si noti una base ordinata $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ determina un verso di rotazione nel piano nel seguente modo: se poniamo

$$\overrightarrow{e}_1 = \overrightarrow{OP}_1 \text{ e } \overrightarrow{e}_2 = \overrightarrow{OP}_2$$

il verso di rotazione è quello che permette di sovrapporre OP_1 ad OP_2 descrivendo un angolo convesso.

$(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ si dice *positiva* se determina una rotazione antioraria.

- Lo **spazio** si dice *orientato* quando è assegnata una terna ordinata $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ di vettori linearmente indipendenti. Poniamo

$$\overrightarrow{e}_1 = \overrightarrow{OP}_1, \ \ \overrightarrow{e}_2 = \overrightarrow{OP}_2 \text{ e } \overrightarrow{e}_3 = \overrightarrow{OP}_3$$

La base ordinata $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ si dice *positiva* se un osservatore posto nel semispazio determinato da $\overrightarrow{OP}_3$ vede ruotare $\overrightarrow{OP}_1$ per sovrapporsi ad $\overrightarrow{OP}_2$, (descrivendo l'angolo convesso $(\widehat{\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2})$) in senso antiorario.

Se $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ è positiva, la base ordinata $(\overrightarrow{e}_{\sigma(1)}, \overrightarrow{e}_{\sigma(2)}, \overrightarrow{e}_{\sigma(3)})$ risulta essere positiva (o negativa) se σ è una permutazione pari (o dispari) di $\{1, 2, 3\}$.

Siano $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e}_i\}$ e $\mathcal{B}' = \left\{\overrightarrow{e'_i}\right\}$ due basi ordinate di $\mathbb{V}_3$. Ogni vettore $\overrightarrow{e'_i}$ di $\mathcal{B}'$, in quanto vettore di $\mathbb{V}_3$, si potrà scrivere in modo unico come combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e}_i\}$ ossia

$$\overrightarrow{e'_j} = \sum_i a_{ij} \overrightarrow{e}_i$$

La matrice $A = (a_{ij})$ è tale che $\det A \neq 0$ in quanto le sue colonne sono costituite dalle componenti dei vettori $\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}, \overrightarrow{e'_3}$ che sono linearmente indipendenti.

Indichiamo con $\boldsymbol{B}$ l'insieme di tutte le basi ordinate di $\mathbb{V}_3$ e definiamo su tale insieme la seguente relazione binaria:

$$\{\overrightarrow{e}_i\} \sim \left\{\overrightarrow{e'_i}\right\} \iff \det A > 0 \qquad (*)$$

$\{\overrightarrow{e}_i\} \sim \left\{\overrightarrow{e'_i}\right\}$ si legge $\{\overrightarrow{e}_i\}$ è *equiversa* ad $\left\{\overrightarrow{e'_i}\right\}$. La relazione $\sim$ conserva la positività della base.

Teorema 36 *La relazione binaria $\sim$ definita in $\boldsymbol{B}$ è una relazione di equivalenza.*

La relazione di equivalenza definita da $(*)$ ha solo due classi di equivalenza dette *orientazioni*.

2.5 Prodotto scalare.

Il *prodotto scalare* è l'applicazione:

$$\cdot : \mathbb{V}_3 \times \mathbb{V}_3 \to \mathbb{R}$$
$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \mapsto \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$$

che ad ogni coppia di vettori $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ di $\mathbb{V}_3$ associa un numero reale, che si indica con $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ (e si legge $\overrightarrow{u}$ scalare $\overrightarrow{v}$) così definito:

a) se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ o $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ si pone allora $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$

b) se $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ e $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ si pone $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \cos(\widehat{\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}})$

Come conseguenze immediate della definizione di prodotto scalare si ha:

- l'ortogonalità di due vettori è espressa dall'annullarsi del loro prodotto scalare, ossia
$$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0.$$
Infatti il prodotto scalare di due vettori è zero se $\widehat{\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}} = \frac{\pi}{2}$ oppure se uno almeno dei vettori è nullo. Poichè il vettore nullo, avendo direzione indeterminata, si può considerare ortogonale ad un qualsiasi altro vettore, si ha l'asserto.

- $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}}$. Infatti se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$ si ha $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$.

- $\cos(\widehat{\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}}) = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|}$.

Il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà:

i) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} \qquad \forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{V}_3$ (prop. commutativa);

infatti
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \cos(\widehat{\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}}) = \|\overrightarrow{v}\| \, \|\overrightarrow{u}\| \cos(\widehat{\overrightarrow{v}\,\overrightarrow{u}}) = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$$

ii) $(\lambda\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \lambda(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \cdot (\lambda\overrightarrow{v}) \qquad \forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{V}_3$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ (prop. di omogeneità).

Infatti: se $\lambda = 0$ l'asserto è verificato banalmente. Supponiamo allora $\lambda \neq 0$.
$$(\lambda\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \|\lambda\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \cos(\widehat{\lambda\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}}) = |\lambda| \, \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \cos(\widehat{\lambda\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}})$$

Se $\lambda > 0$ allora
$$(\lambda\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \|\lambda\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \cos(\widehat{\lambda\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}}) = \lambda \, \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \cos(\widehat{\lambda\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}}) = \lambda \, \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \cos(\widehat{\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}}) = \lambda(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$$

se $\lambda < 0$ allora
$$(\lambda\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \|\lambda\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \cos(\widehat{\lambda\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}}) = |\lambda| \, \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \cos(\pi - \widehat{\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}}) = -|\lambda| \, \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \cos(\widehat{\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}}) = \lambda(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$$

iii) $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} \qquad \forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{V}_3$ (prop. distributiva);

la dimostrazione di questa proprietà la vedremo nel seguito.

iv) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} \geq 0$ e $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = 0$

infatti: $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2 \geq 0$ ed è
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \Longleftrightarrow \|\overrightarrow{u}\| = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}.$$

2.5.1 Proiezione ortogonale di un vettore.

Sia r una retta e siano O ed U due punti fissati su r, il vettore $\overrightarrow{OU}$ fissa dunque un'orientazione sulla retta r. Siano A e B due punti della retta r.

Con $\overline{AB}$ indichiamo la misura assoluta del segmento AB rispetto al segmento OU, che definisce un'unità di misura su r.

Si definisce *misura algebrica* del segmento orientato $\overrightarrow{AB}$ il numero reale che indicheremo con AB dato da:

$$AB = \begin{cases} +\overline{AB} & \text{se } A \text{ precede } B \\ -\overline{AB} & \text{se } B \text{ precede } A \end{cases}$$

Sia $\overrightarrow{u}$ un vettore non nullo ed r una retta orientata parallela e concorde rispetto ad $\overrightarrow{u}$. Sia $\overrightarrow{v}$ un generico vettore di $\mathbb{V}_3$. Poniamo $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ e siano A', B' le proiezioni ortogonali di A, B su r, cioè le intersezioni di r con i piani ad essa perpendicolari e passanti per A e B.

$\overrightarrow{v}_u = \overrightarrow{A'B'}$ si dice *vettore proiezione ortogonale* di $\overrightarrow{v}$ su $\overrightarrow{u}$.

La misura algebrica di $\overrightarrow{A'B'}$ si dice *componente ortogonale* di $\overrightarrow{v}$ rispetto ad $\overrightarrow{u}$ e si indica con v_u. Possiamo quindi porre

$$\overrightarrow{v}_u = v_u vers \overrightarrow{u}$$

Poichè $v_u = \|\overrightarrow{v}\| \cos(\widehat{\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}})$, dalla definizione di prodotto scalare

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \cos(\widehat{\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}})$$

segue

$$v_u = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|} = \frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|} \cdot \overrightarrow{v} = vers \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$$

da cui

$$\overrightarrow{v}_u = (vers \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) vers \overrightarrow{u}$$

Osserviamo che:

- $v_u = 0$ se $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$;
- $v_u > 0$ se $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) < \frac{\pi}{2}$;
- $v_u < 0$ se $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) > \frac{\pi}{2}$;
- $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \Longrightarrow z_u = v_u + w_u$.

Possiamo ora provare la proprietà iii) del prodotto scalare che afferma:

$$\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} \qquad \forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{V}_3$$

Supponiamo innanzitutto $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, altrimenti l'asserto seguirebbe banalmente. Sia $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) &= \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{z} = \|\overrightarrow{u}\| \left(\frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{z}}{\|\overrightarrow{u}\|} \right) = \|\overrightarrow{u}\| \, z_u = \|\overrightarrow{u}\| \, (v_u + w_u) = \\ &= \|\overrightarrow{u}\| \, v_u + \|\overrightarrow{u}\| \, w_u = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}.\end{aligned}$$

Consideriamo ora un piano α ed un generico vettore $\overrightarrow{v}$ di $\mathbb{V}_3$ rappresentato da $\overrightarrow{AB}$. Siano A'', B'' le proiezioni ortogonali di A, B su α, cioè le intersezioni di α con le rette passanti per A e B perpendicolari ad α. Il vettore $\overrightarrow{v_\alpha}$ rappresentato dal segmento orientato $\overrightarrow{A''B''}$ si dice *vettore proiezione ortogonale di* $\overrightarrow{v}$ *su* α.

Tra i rappresentanti di $\overrightarrow{v}$ consideriamo il segmento orientato $\overrightarrow{OP}$ con $O \in \alpha$. Sia n una retta orientata perpendicolare ad α. Se $\overrightarrow{n}$ è un vettore parallelo alla retta n, allora la relazione

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_n} + \overrightarrow{v_\alpha}$$

fornisce una decomposizione di $\overrightarrow{v}$ secondo un vettore parallelo ed uno perpendicolare ad α.

Definizione 37 *Una base di* $\mathbb{V}_3$ *si dice* ortonormale *se è costituita da versori a due a due ortogonali.*

Nel seguito con $\left\{ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k} \right\}$ denoteremo sempre una base ortonormale positiva.

Siano $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u}$ due vettori di $\mathbb{V}_3$ le cui componenti rispetto la base ortonormale $\left\{ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k} \right\}$ sono $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$. allora

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = (v_1 \overrightarrow{i} + v_2 \overrightarrow{j} + v_3 \overrightarrow{k}) \cdot (u_1 \overrightarrow{i} + u_2 \overrightarrow{j} + u_3 \overrightarrow{k})$$

Applicando le proprietà ii) e iii) del prodotto scalare e considerando che

$$\left\{ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k} \right\} \text{ base ortonormale} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{k} = 1 \\ \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{k} = \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{i} = 0 \end{cases}$$

si ha:

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = (v_1 \overrightarrow{i} + v_2 \overrightarrow{j} + v_3 \overrightarrow{k}) \cdot (u_1 \overrightarrow{i} + u_2 \overrightarrow{j} + u_3 \overrightarrow{k}) = v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3$$

quindi

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = \sum_i v_i u_i$$

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}}) = \frac{v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

Se $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ si ha

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{v}}) = \frac{v_1}{\|\overrightarrow{v}\|},\ \cos(\widehat{\overrightarrow{j}\,\overrightarrow{v}}) = \frac{v_2}{\|\overrightarrow{v}\|} \text{ e } \cos(\widehat{\overrightarrow{k}\,\overrightarrow{v}}) = \frac{v_3}{\|\overrightarrow{v}\|}$$

tali numeri si dicono *coseni direttori* del vettore $\overrightarrow{v}$ e sono le componenti rispetto alla base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ del versore di $\overrightarrow{v}$.

2.6 Prodotto vettoriale.

Il *prodotto vettoriale* è l'applicazione:

$$\wedge : \mathbb{V}_3 \times \mathbb{V}_3 \to \mathbb{V}_3$$
$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \mapsto \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$$

che ad ogni coppia di vettori $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ di $\mathbb{V}_3$ associa un vettore, che si indica con $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ (e si legge $\overrightarrow{u}$ vettoriale $\overrightarrow{v}$) così definito:

a) se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ sono paralleli (e quindi in particolare se uno dei due è nullo):

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$$

b) se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ non sono paralleli, $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ è il vettore che ha:

- direzione ortogonale sia ad $\overrightarrow{u}$ che a $\overrightarrow{v}$;

- verso tale che la terna $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ sia positiva;

- modulo dato da $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\, sen(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$.

Come conseguenza immediata della definizione di prodotto vettoriale si ha che il modulo di $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ rappresenta l'area del parallelogramma che ha come lati consecutivi i rappresentanti di $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ aventi la stessa origine.

Il prodotto vettoriale gode delle seguenti proprietà:

i) $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u} \qquad \forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{V}_3$ (prop. anticommutativa);

ii) $(\lambda\overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{v} = \lambda(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \wedge (\lambda\overrightarrow{v}) \qquad \forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{V}_3$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ (prop. di omogeneità);

infatti: se $\lambda = 0$ l'asserto è verificato banalmente. Supponiamo allora $\lambda \neq 0$. I vettori $(\lambda\overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{v}$ e $\lambda(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ hanno:

- la stessa direzione,

- stesso modulo, infatti

$$\|(\lambda\overrightarrow{u})\wedge\overrightarrow{v}\| = \|\lambda\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\,sen(\widehat{\lambda\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}}) = |\lambda|\,\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\,sen(\widehat{\lambda\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}})$$

ora se $\lambda > 0$ si ha $sen(\widehat{\lambda\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}}) = sen(\widehat{\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}})$ e se $\lambda < 0$ si ha $sen(\widehat{\lambda\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}}) = sen(\pi - \widehat{\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}}) = sen(\widehat{\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}})$, quindi

$$sen(\widehat{\lambda\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}}) = sen(\widehat{\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}})$$

da cui segue

$$\|(\lambda\overrightarrow{u})\wedge\overrightarrow{v}\| = |\lambda|\,\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\,sen(\widehat{\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}}) = |\lambda|\,\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\| = \|\lambda(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})\|$$

- stesso verso.

Se $\lambda > 0$ è ovvio. Se $\lambda < 0$ basta verificare che le terne $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, (\lambda\overrightarrow{u})\wedge\overrightarrow{v})$ e $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \lambda(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}))$ sono entrambe positive.

iii) $\overrightarrow{u}\wedge(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{w} \qquad \forall\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{V}_3$ (prop. distributiva).

Fissiamo in $\mathbb{V}_3$ la base ortonormale $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ e consideriamo i possibili prodotti vettoriali tra i vettori di tale base, si ha:

$$\overrightarrow{i}\wedge\overrightarrow{i} = \overrightarrow{j}\wedge\overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$$

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{i}\wedge\overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} & \overrightarrow{j}\wedge\overrightarrow{k} = \overrightarrow{i} & \overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{j}\wedge\overrightarrow{i} = -\overrightarrow{k} & \overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{j} = -\overrightarrow{i} & \overrightarrow{i}\wedge\overrightarrow{k} = -\overrightarrow{j} \end{array}$$

Si osservi che il prodotto vettoriale non è associativo, infatti:

$$(\overrightarrow{i}\wedge\overrightarrow{i})\wedge\overrightarrow{j} = \overrightarrow{0} \text{ mentre } \overrightarrow{i}\wedge(\overrightarrow{i}\wedge\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{i}\wedge\overrightarrow{k} = -\overrightarrow{j}$$

Siano $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u}$ due vettori di $\mathbb{V}_3$ le cui componenti rispetto ad una fissata base ortonormale $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ siano $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$. allora

$$\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v} = (u_1\overrightarrow{i} + u_2\overrightarrow{j} + u_3\overrightarrow{k})\wedge(v_1\overrightarrow{i} + v_2\overrightarrow{j} + v_3\overrightarrow{k})$$

Applicando le proprietà ii) e iii) del prodotto vettoriale si ha:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v} &= u_1v_2\overrightarrow{k} - u_1v_3\overrightarrow{j} - u_2v_1\overrightarrow{k} + u_2v_3\overrightarrow{i} + u_3v_1\overrightarrow{j} - u_3v_2\overrightarrow{i} = \\ &= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\overrightarrow{k} \end{aligned}$$

Quindi il prodotto vettoriale di $\overrightarrow{u}$ per $\overrightarrow{v}$ si può rappresentare, rispetto le componenti dei vettori, mediante il simbolo di determinante:

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

anche se non può essere considerato come determinante in quanto $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ e $\overrightarrow{k}$ non sono elementi del campo

2.7 Prodotto misto.

Il *prodotto misto* della terna ordinata di vettori $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ è il numero reale

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$$

Dalla definizione è evidente l'ordine con cui vanno eseguite le operazioni, non avrebbe alcun senso, infatti, l'operazione $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w})$.

Se $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$ rispetto ad una fissata base ortonormale positiva $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ allora

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} &= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \overrightarrow{k} \right) \cdot (w_1 \overrightarrow{i} + w_2 \overrightarrow{j} + w_3 \overrightarrow{k}) = \\ &= w_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - w_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + w_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

da cui

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \qquad (*)$$

Il prodotto misto gode delle seguenti proprietà:

i) $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \quad \forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{V}_3$;

tale proprietà segue dalla proprietà commutativa del prodotto scalare.

ii) $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} \quad \forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{V}_3$;

infatti

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u} = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} \qquad (**)$$

osserviamo che la matrice $(**)$ si ottiene da $(*)$ dopo aver effettuato 2 scambi sulle righe. Per le proprietà del determinante si ha quindi

$$\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

da cui $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}$.

Come conseguenza della definizione stessa di prodotto misto si ha:

a) $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ sono complanari;

infatti

$$\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \text{ complanari} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = 0$$

b) $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} > 0 \Longleftrightarrow \{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ è una base positiva;

infatti

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} > 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} > 0$$

quindi $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ è una base equiversa alla base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ che è positiva.

c) Se $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ sono linearmente indipendenti allora $|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}|$ è il volume del parallelepipedo costruito sui rappresentanti dei tre vettori aventi l'origine in comune.

Infatti:

$$|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}| = \|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| \, \|\overrightarrow{w}\| \, |\cos(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})|$$

dove

$$\text{l'angolo } (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \begin{cases} \theta & \text{se } \{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\} \text{ è una base positiva} \\ \pi - \theta & \text{se } \{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\} \text{ è una base negativa} \end{cases}$$

in ogni caso $|\cos(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})| = \cos\theta$ e quindi

$$|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}| = \|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| \, \|\overrightarrow{w}\| \cos\theta$$

dove $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|$ rappresenta l'area di base del parallelepipedo e $\|\overrightarrow{w}\| \cos\theta$ la sua altezza.

Geometria analitica dello spazio.

In questo capitolo intendiamo affrontare il problema della rappresentazione analitica di curve e superfici nello spazio, iniziando dagli esempi più semplici quali le rette ed i piani, per poi estendere i metodi di studio ad altri tipi di curve e superfici.

Fissiamo un punto O, che chiameremo *origine* del sistema di riferimento, ed una base ortonormale $\mathcal{B} = \left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ di $\mathbb{V}_3$, in questo modo avremo fissato un *Sistema di riferimento Ortonormale.*

Si noti che la base $\mathcal{B} = \left\{ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k} \right\}$ di fatto stabilisce una orientazione dello spazio che sarà positiva (o negativa) a seconda che la base $\mathcal{B}$ sia positiva (o negativa).

Le rette per O individuate da $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ e $\overrightarrow{k}$, si dicono rispettivamente *asse delle ascisse* o asse x, *asse delle ordinate* o asse y e *asse delle quote* o asse z. I piani individuati da due assi si dicono piani coordinati e si indicano con $[xy]$, $[xz]$ e $[yz]$.

Il riferimento così definito si indica con $\mathcal{R}(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ oppure con $\mathcal{R}(O, x, y, z)$.

Sia P_0 un punto dello spazio, il vettore $\overrightarrow{OP_0}$ si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{B} = \left\{ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k} \right\}$, cioè

$$\exists!(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 \text{ tale che } \overrightarrow{OP_0} = x_0 \overrightarrow{i} + y_0 \overrightarrow{j} + z_0 \overrightarrow{k}$$

(x_0, y_0, z_0) sono dette *coordinate cartesiane* ortogonali del punto P_0.

Sia $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{P_1P_2}$ con $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$, allora

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\overrightarrow{i} + (y_2 - y_1)\overrightarrow{j} + (z_2 - z_1)\overrightarrow{k}$$

2.8 Punto medio di un segmento. Distanza di due punti.

Siano $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ due punti distinti del piano e sia M il punto medio di P_1P_2 con $M(x_M, y_M, z_M)$.

Allora M è l'unico punto del piano tale che $\overrightarrow{P_1M} = \overrightarrow{MP_2}$ ossia

$$(x_M - x_1)\overrightarrow{i} + (y_M - y_1)\overrightarrow{j} + (z_M - z_1)\overrightarrow{k} = (x_2 - x_M)\overrightarrow{i} + (y_2 - y_M)\overrightarrow{j} + (z_2 - z_M)\overrightarrow{k}$$

Poichè $\left\{ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k} \right\}$ è una base di $\mathbb{V}_3$ si ha $\begin{cases} x_M - x_1 = x_2 - x_M \\ y_M - y_1 = y_2 - y_M \\ z_M - z_1 = z_2 - z_M \end{cases}$ da cui segue

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_2 + x_1}{2} \\ y_M = \frac{y_2 + y_1}{2} \\ z_M = \frac{z_2 + z_1}{2} \end{cases}$$

Se vogliamo calcolare la distanza dei punti $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$, basta osservare che tale distanza è il modulo del vettore $\overrightarrow{P_1P_2}$, ossia

$$\overline{P_1P_2} = \left\| \overrightarrow{P_1P_2} \right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

2.9 Area di un triangolo.

Considerati tre punti $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ e $P_3(x_3, y_3, z_3)$, si ha che l'area del triangolo da essi individuato è la metà del modulo di $\overrightarrow{P_1P_2} \wedge \overrightarrow{P_1P_3}$. Infatti:

sia T il triangolo di vertici P_1, P_2 e P_3 e sia h l'altezza relativa al lato P_1P_2

$$\left\|\overrightarrow{P_1P_2} \wedge \overrightarrow{P_1P_3}\right\| = \left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\| \left\|\overrightarrow{P_1P_3}\right\| sen(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}) = \left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\| h = 2A_T$$

allora

$$A_T = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{P_1P_2} \wedge \overrightarrow{P_1P_3}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}\right\|$$

Osservazione.

Un *riferimento affine* $\mathcal{R}(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ è costituito da un'origine O e da una qualsiasi terna di vettori linearmente indipendenti. Le coordinate affini (x, y, z) di un punto P rispetto ad $\mathcal{R}$ sono definite nello stesso modo delle coordinate cartesiane ortogonali, cioè si ha

$$\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}$$

Alcune formule, come quelle per le coordinate del punto medio, valgono anche in coordinate affini, mentre quelle in cui interviene il prodotto scalare, come quelle riguardanti distanze ed angoli, sono ben diverse se la base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ non è ortonormale.

Nel seguito considereremo sempre fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\mathcal{R}(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

2.10 Rappresentazione del piano.

Un piano π può essere individuato geometricamente in diversi modi:

Piano π per un punto P_0 e perpendicolare ad un vettore $\overrightarrow{n}$ non nullo.

Sia P_0 il punto di coordinate (x_0, y_0, z_0) ed $\overrightarrow{n}$ il vettore dato da $\overrightarrow{n} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}$ con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Un generico punto $P(x, y, z)$ dello spazio, appartiene al piano π se e solo se $\overrightarrow{P_0P} \perp \overrightarrow{n}$ con $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0)\overrightarrow{i} + (y - y_0)\overrightarrow{j} + (z - z_0)\overrightarrow{k}$

$$\overrightarrow{P_0P} \perp \overrightarrow{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

da cui si ricava l'*equazione cartesiana* del piano

$$\pi : ax + by + cz + d = 0 \qquad (1)$$

con $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$.

Osserviamo che, se moltiplichiamo la (1) per un fattore di proporzionalità ρ non nullo arbitrario, otteniamo una nuova equazione

$$\pi : \rho ax + \rho by + \rho cz + \rho d = 0$$

che rappresenta lo stesso piano π. In altre parole la stringa definita dai coefficienti e dall termine noto dell'equazione di un piano è definita a meno di un fattore di proporzionalità non nullo.

Osserviamo, inoltre, che al variare di a, b, c l'equazione

$$\mathcal{F}(P_0) = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \qquad (2)$$

rappresenta la totalità dei piani passanti per P_0, detta anche *stella di piani di centro* P_0.

Se nell'equazione (1) uno o più coefficienti sono nulli, allora il piano in questione è in una posizione particolare rispetto al sistema di riferimento.

Ad esempio:

- $d = 0 \Longrightarrow \pi$ passa per l'origine O;
- $c = 0 \Longrightarrow \pi : ax + by + d = 0$. In questo caso π è un piano perpendicolare al vettore $\overrightarrow{n} = a\,\overrightarrow{i} + b\,\overrightarrow{j}$ e quindi parallelo all'asse z. Se inoltre anche d è nullo allora π passa per l'asse z;
- analogamente le equazioni $by + cz + d = 0$ e $ax + cz + d = 0$ rappresentano piani rispettivamente paralleli all'asse x ed all'asse y;
- se sono nulli due dei coefficienti dell'equazione (1), essa si può scrivere in una delle forme:
    - · $a = b = 0 \Rightarrow \pi : z = k$. In questo caso π è un piano parallelo al piano coordinato $[xy]$ di equazione $z = 0$;
    - · $b = c = 0 \Rightarrow \pi : x = k$. In questo caso π è un piano parallelo al piano coordinato $[yz]$ di equazione $x = 0$;
    - · $a = c = 0 \Rightarrow \pi : y = k$. In questo caso π è un piano parallelo al piano coordinato $[xz]$ di equazione $y = 0$.

Piano π per un punto P_0 parallelo a due vettori indipendenti.

Sia P_0 il punto di coordinate (x_0, y_0, z_0) e siano $\overrightarrow{u}(l, m, n)$ e $\overrightarrow{v}(l', m', n')$ due vettori linearmente indipendenti.

Un generico punto $P(x, y, z)$ dello spazio appartiene al piano π passante per P_0 e parallelo a $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ se e solo se $\overrightarrow{P_0P}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ sono complanari, ossia

$$\overrightarrow{P_0P}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \text{ complanari} \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \perp (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \cdot (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) = 0$$

da cui, essendo $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0)\overrightarrow{i} + (y - y_0)\overrightarrow{j} + (z - z_0)\overrightarrow{k}$, si ricava

$$\pi : \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0$$

che è un'equazione della forma (2).

La complanarità dei vettori $\overrightarrow{P_0P}$, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ può essere espressa anche nel seguente modo:

$$\overrightarrow{P_0P}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \text{ complanari} \Leftrightarrow \exists t, t' \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \overrightarrow{P_0P} = t\overrightarrow{u} + t'\overrightarrow{v}$$

da cui, passando alle componenti, si ottengono le *equazioni parametriche* del piano:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt + l't' \\ y = y_0 + mt + m't' \\ z = z_0 + nt + n't' \end{cases} \qquad (3)$$

che forniscono le coordinate di tutti i punti del piano al variare dei due parametri t, t'.

Piano π per tre punti non allineati .

Siano $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ tre punti non allineati. In questo caso si può considerare $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{P_0P_1}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{P_0P_2}$ e quindi

$$\pi : \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

Osserviamo che si può passare da una rappresentazione del piano π ad un'altra. Ad esempio si può passare dalle (3) alla (1) ricavando t, t' attraverso due delle (3) e sostituendo nella terza delle (3), procedendo cioè con l'*eliminazione dei parametri*. Viceversa si può passare dalla (1) alle (3) assumendo come parametri due delle incognite e calcolando la terza mediante la (1).

2.10.1 Parallelismo e ortogonalità tra piani.

Dati i piani $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ e $\alpha' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$, siano $\overrightarrow{n}(a, b, c)$ ed $\overrightarrow{n'}(a', b', c')$ i vettori perpendicolari ad α e α' rispettivamente, con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ e $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$. Allora

$$\alpha \parallel \alpha' \Leftrightarrow \overrightarrow{n} \parallel \overrightarrow{n'} \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Ne segue che l'equazione

$$ax + by + cz + k = 0$$

rappresenta, al variare di k in $\mathbb{R}$, un fascio di piani paralleli ad α.

Se poi
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}$$
allora i due piani α e α' coincidono.

I piani α e α' si dicono ortogonali se i vettori $\overrightarrow{n}$ e $\overrightarrow{n'}$ sono tra loro ortogonali, da cui
$$\alpha \perp \alpha' \Leftrightarrow \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{n'} \Leftrightarrow aa' + bb' + cc' = 0$$

2.10.2 Retta intersezione di due piani.

Siano α ed α' due piani non paralleli, allora $rg \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$ ed il sistema
$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$
ammette ∞^1 soluzioni, ossia $\alpha \cap \alpha' = r$. Le coordinate dei punti di r sono le soluzioni del sistema.

Una retta nello spazio può quindi essere rappresentata dal sistema
$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \quad \text{con } rg \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$$
Tali equazioni si dicono *equazioni cartesiane della retta r.*

2.10.3 Fasci di piani.

Definizione 38 *La totalità dei piani paralleli ad uno stesso piano si dice* fascio improprio *di piani. La totalità dei piani passanti per una retta r si dice* fascio proprio *di asse r.*

Sia $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Abbiamo già visto che con l'equazione
$$\mathcal{F}(\alpha) : ax + by + cz + k = 0 \qquad (k \in \mathbb{R})$$
si rappresenta il fascio improprio di piani paralleli ad α.

Sia
$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \quad \text{con } rg \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$$
una retta, la totalità dei piani passanti per r è rappresentata dall'equazione
$$\mathcal{F}(r) : \lambda(ax + by + cz + k) + \mu(a'x + b'y + c'z + d') = 0 \qquad (*)$$

con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$. Infatti ogni punto di r ha coordinate che soddisfano la $(*)$ e per ogni punto dello spazio, che non appartenga ad r, passa uno ed un solo piano di equazione $(*)$.

Al variare di λ e μ si ottengono tutti i piani per r. In particolare per $(\lambda, \mu) = (1,0)$ si ottiene il piano α mentre per $(\lambda, \mu) = (0,1)$ si ottiene il piano α'.

Diremo che la $(*)$ rappresenta il fascio proprio di asse r.

2.11 Rappresentazione della retta.

Una retta r può essere individuata geometricamente in diversi modi:

Retta come intersezione di piani.

Abbiamo già visto che una retta r può essere individuata come intersezione di due piani α ed α' non paralleli ed è quindi rappresentabile mediante il sistema formato dalle loro equazioni:

$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \quad \text{con } rg \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$$

Poichè per r passano tutti i piani del fascio di asse r, possiamo allora scegliere due qualsiasi piani del fascio per rappresentare r.

La totalità delle rette parallele ad r, detta *stella impropria di rette* di direzione individuata da r, si può rappresentare con il sistema

$$\begin{cases} ax + by + cz + h = 0 \\ a'x + b'y + c'z + k = 0 \end{cases}$$

al variare di h, k in $\mathbb{R}$.

Equazioni parametriche di una retta.

Sia r una retta passante per il punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e parallela al vettore non nullo $\overrightarrow{v}(l, m, n)$. Un generico punto $P(x, y, z)$ dello spazio appartiene alla retta r se e solo se $\overrightarrow{P_0P}$ e $\overrightarrow{v}$ sono paralleli, ossia

$$\overrightarrow{P_0P} \parallel \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \overrightarrow{P_0P} = t\overrightarrow{v}$$

da cui, passando alle componenti, si ottengono le *equazioni parametriche* della retta:

$$r : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

oppure

$$\overrightarrow{P_0P} \parallel \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

da cui si ottengono le *equazioni della retta sotto forma di rapporti uguali*

$$r : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

con la convenzione che se uno dei denominatori è nullo allora deve essere posto uguale a zero il numeratore corrispondente.

I numeri (l, m, n) si dicono *parametri direttori* della retta e sono definiti a meno di un fattore di proporzionalità. Il vettore $\overrightarrow{v}(l, m, n)$ è detto *vettore direttore* della retta r.

Se r è la retta per due punti distinti $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e $P_1(x_1, y_1, z_1)$, allora si può considerare $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{P_0P_1}$ e quindi

$$r : \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

Osserviamo che è possibile ottenere le equazioni cartesiane di una retta r a partire da quelle parametriche semplicemente eliminando il parametro t da quest'ultime.

Se invece si hanno le equazioni di r sotto forma di rapporti uguali allora si ottengono le equazioni cartesiane ponendo:

$$r : \begin{cases} \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} \\ \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \end{cases}$$

Supponiamo infine di avere le equazioni cartesiane di r e di voler ricavare quelle parametriche. Sia

$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

e siano $\overrightarrow{n}(a, b, c)$ ed $\overrightarrow{n'}(a', b', c')$ i vettori perpendicolari ad α e α' rispettivamente. Se indichiamo con $\overrightarrow{v}(l, m, n)$ il vettore direttore di r, allora si ha

$$\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{n} \text{ e } \overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{n'}$$

ossia

$$\overrightarrow{v} \parallel \overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{n'}$$

dove

$$\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{n'} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \overrightarrow{k}$$

quindi

$$\overrightarrow{v} \parallel \overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{n'} \Leftrightarrow (l, m, n) \sim \left(\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \right).$$

Noto il vettore $\overrightarrow{v}(l, m, n)$ è possibile scrivere le equazioni parametriche della retta r scegliendo un punto (x_0, y_0, z_0) su r..

2.11.1 Posizioni di due rette.

Due rette distinte r ed s possono essere *sghembe*, cioè non contenute in uno stesso piano, oppure *complanari*.

Due rette distinte che siano complanari possono essere *parallele* oppure *incidenti*, cioè con un punto in comune.

Siano r ed s due rette distinte i cui vettori direttori siano, rispettivamente, $\overrightarrow{r}(l,m,n)$ ed $\overrightarrow{s}(l',m',n')$. Siano inoltre $R(x_0,y_0,z_0)$ e $S(x_1,y_1,z_1)$ due punti scelti arbitrariamente su r ed s rispettivamente. Allora

$$r,s \text{ sono complanari } \Leftrightarrow \overrightarrow{r},\overrightarrow{s},\overrightarrow{RS} \text{ sono complanari} \Leftrightarrow \overrightarrow{RS}\cdot(\overrightarrow{r}\wedge\overrightarrow{s})=0$$

da cui

$$r,s \text{ sono complanari } \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0$$

naturalmente se il determinante è non nullo allora r ed s sono sghembe.

Se r ed s sono due rette complanari allora esse sono:

1. parallele se $\frac{l}{l'}=\frac{m}{m'}=\frac{n}{n'}$;
2. incidenti altrimenti.

2.11.2 Posizioni retta-piano.

Una retta r si può trovare, rispetto ad un piano α, in una delle seguenti posizioni:

- r è incidente α in un punto P, ossia $r\cap\alpha=\{P\}$;
- r è parallela ad α, ossia $r\cap\alpha=r$ oppure $r\cap\alpha=\varnothing$.

Supponiamo sia

$$r:\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases} \quad \text{con } rg\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}=2$$

e sia $\alpha: a''x+b''y+c''z+d''=0$ con $(a'',b'',c'')\neq(0,0,0)$.

Per studiare la posizione di r rispetto al piano α consideriamo il sistema

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ a''x+b''y+c''z+d''=0 \end{cases}$$

che in forma compatta diventa $AX=D$ con

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D=\begin{pmatrix} -d \\ -d' \\ -d'' \end{pmatrix}$$

Applicando il Teorema di Rouche-Capelli a tale sistema possiamo dire che:

◀ se $rg(A) = 3$ allora il sistema ammette un'unica soluzione, ossia $r \cap \alpha = \{P\}$;

◀ se $rg(A) = 2 = rg(A \mid D)$ allora il sistema ammette ∞^1 soluzioni, ossia $r \cap \alpha = r$;

◀ se $rg(A) = 2$ mentre $rg(A \mid D) = 3$ allora il sistema è incompatibile e quindi $r \cap \alpha = \varnothing$.

Possiamo allora concludere che

$$r \parallel \alpha \Leftrightarrow rg \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = 2$$

Se invece la retta r è espressa con le equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

allora i possibili punti in comune tra $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ ed r si ottengono imponendo:

$$a(x_0 + lt) + b(y_0 + mt) + c(z_0 + nt) + d = 0$$

che è equivalente a

$$(al + bm + cn)t + ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \qquad (**)$$

Si possono presentare i seguenti casi:

◀ $al + bm + cn \neq 0$ e quindi si ottiene una sola intersezione di r con α;

◀ $al + bm + cn = 0$ e $ax_0 + by_0 + cz_0 + d \neq 0$, la $(**)$ è incompatibile e quindi $r \cap \alpha = \varnothing$;

◀ $al + bm + cn = 0$ e $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$, la $(**)$ è una identità e quindi ogni punto di r appartiene ad α.

La condizione di parallelismo retta-piano può quindi essere espressa anche nel seguente modo:

$$r \parallel \alpha \Leftrightarrow al + bm + cn = 0$$

che esprime anche l'ortogonalità tra un vettore parallelo ad r ed un vettore ortogonale ad α.

2.11.3 Angoli di due rette.

Siano r ed s due rette qualsiasi, eventualmente sghembe, siano $\overrightarrow{r}(l,m,n)$ ed $\overrightarrow{s}(l',m',n')$ due vettori non nulli paralleli ad esse.

Si definiscono *angoli di r ed s* e si indicano con $\widehat{rs}$ gli angoli tra $\overrightarrow{r}$ ed $\overrightarrow{s}$, ossia

$$\widehat{rs} = \begin{cases} \widehat{\overrightarrow{r}\,\overrightarrow{s}} \\ \pi - \widehat{\overrightarrow{r}\,\overrightarrow{s}} \end{cases}$$

da cui

$$\cos\widehat{rs} = \pm\cos\widehat{\overrightarrow{r}\,\overrightarrow{s}}$$

e quindi

$$\cos\widehat{rs} = \pm\frac{ll'+mm'+nn'}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{l'^2+m'^2+n'^2}},$$

in particolare

$$r \perp s \Leftrightarrow ll'+mm'+nn' = 0$$

Supponiamo che la retta r sia orientata come il vettore $\overrightarrow{r}(l,m,n)$. I suoi coseni direttori sono i coseni degli angoli che r forma con gli assi coordinati e si ha:

$$\cos\widehat{xr} = \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},\ \cos\widehat{yr} = \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}\ \text{ e }\ \cos\widehat{zr} = \frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

con

$$\cos^2\widehat{xr} + \cos^2\widehat{yr} + \cos^2\widehat{zr} = 1.$$

Si noti infatti che da

$$\cos\widehat{xr} = \frac{l}{\|\overrightarrow{r}\|},\ \cos\widehat{yr} = \frac{m}{\|\overrightarrow{r}\|}\ \text{ e }\ \cos\widehat{zr} = \frac{n}{\|\overrightarrow{r}\|}$$

segue

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r} &= l\,\overrightarrow{i} + m\,\overrightarrow{j} + n\,\overrightarrow{k} = \|\overrightarrow{r}\|\cos\widehat{xr}\,\overrightarrow{i} + \|\overrightarrow{r}\|\cos\widehat{yr}\,\overrightarrow{j} + \|\overrightarrow{r}\|\cos\widehat{zr}\,\overrightarrow{k} = \\ &= \|\overrightarrow{r}\|(\cos\widehat{xr}\,\overrightarrow{i} + \cos\widehat{yr}\,\overrightarrow{j} + \cos\widehat{zr}\,\overrightarrow{k}) \end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{\overrightarrow{r}}{\|\overrightarrow{r}\|} = \cos\widehat{xr}\,\overrightarrow{i} + \cos\widehat{yr}\,\overrightarrow{j} + \cos\widehat{zr}\,\overrightarrow{k}$$

ossia

$$\left\|\frac{\overrightarrow{r}}{\|\overrightarrow{r}\|}\right\| = \cos^2\widehat{xr} + \cos^2\widehat{yr} + \cos^2\widehat{zr} = 1$$

2.12 Angoli di due piani.

Gli angoli di due piani α e β sono gli angoli delle rette r, s intersezione di α e β con un piano γ perpendicolare alla retta $t = \alpha \cap \beta$.

Siano $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ e $\beta : a'x + b'y + c'z + d' = 0$ e siano n_α, n_β due rette perpendicolari rispettivamente ad α e β di vettori direttori $\overrightarrow{n}_\alpha(a, b, c)$ e $\overrightarrow{n}_\beta(a', b', c')$.

Gli angoli di r ed s, e quindi gli angoli di α e β, coincidono con gli angoli tra le rette n_α, n_β. Si ha quindi

$$\widehat{rs} = \widehat{\overrightarrow{n}_\alpha \overrightarrow{n}_\beta}$$

da cui segue

$$\cos \widehat{\alpha\beta} = \pm \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}},$$

da cui, in particolare, la condizione di ortogonalità tra piani è data da

$$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow aa' + bb' + cc' = 0$$

2.13 Angolo tra una retta ed un piano.

Sia r una retta di vettore direttore $\overrightarrow{r}(l, m, n)$ e sia α un piano di equazione cartesiana $ax + by + cz + d = 0$.

La retta r è perpendicolare al piano α se e solo se r è parallela al vettore $\overrightarrow{n}_\alpha(a, b, c)$, ossia

$$r \perp \alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{r} \parallel \overrightarrow{n}_\alpha \Leftrightarrow \frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c}$$

Supponiamo ora r non perpendicolare ad α e sia α' il piano per r perpendicolare ad α. Sia inoltre $r' = \alpha \cap \alpha'$, r' si dice *proiezione ortogonale* di r su α.

Si definisce come angolo tra r ed α, $\widehat{r\alpha}$, il più piccolo degli angoli tra r ed r'. Quindi $\widehat{r\alpha}$ è il complementare dell'angolo acuto φ formato da r ed n_α. Tenuto conto che n_α ha parametri direttori (a, b, c) e che $\cos\varphi > 0$ si ha:

$$\sin \widehat{r\alpha} = \cos\varphi = \frac{|al + bm + cn|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

2.14 Distanza di un punto da un piano.

Come nel caso del piano, si definisce distanza di due insieme di punti $\mathcal{F}_1$ ed $\mathcal{F}_2$ dello spazio il numero che si indica con $d(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ dato da:

$$d(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = \inf \left\{ \overline{P_1P}_2 \,|P_1 \in \mathcal{F}_1 \text{ e } P_2 \in \mathcal{F}_2 \right\}$$

Vedremo ora alcuni procedimenti che permettono di risolvere il problema delle distanze nei casi più semplici.

Consideriamo un piano π di equazione $ax + by + cz + d = 0$ ed un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

Sia H il punto di intersezione di π con la retta n per P_0 perpendicolare ad π, allora

$$d(P_0, \pi) = \overline{P_0H}$$

La retta n ha equazioni parametriche date da

$$\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases}$$

Sia $H = \pi \cap n$:

$$\begin{aligned} a\,(at + x_0) + b\,(bt + y_0) + c(ct + z_0) + d &= 0 \Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2)t + ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \\ &\Rightarrow \quad t_H = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2} \end{aligned}$$

da cui segue $H(\ at_H + x_0, bt_H + y_0, ct_H + z_0)$ e quindi

$$\begin{aligned} d(P_0, \pi) &= \overline{P_0H} = \sqrt{(x_H - x_0)^2 + (y_H - y_0)^2 + (z_H - z_0)^2} = \\ &= \sqrt{a^2t_H^2 + b^2t_H^2 + c^2t_H^2} = |t_H|\,\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \end{aligned}$$

in definitiva

$$d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Osserviamo che la precedente formula è utilizzata anche per determinare la distanza da π di un piano α o di una retta r paralleli a π: basta assumere P_0 appartenente rispettivamente ad α o ad r.

2.15 Distanza di un punto da una retta.

Sia r una retta di parametri direttori (l, m, n) e $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto dello spazio. Sia α il piano per P_0 perpendicolare ad r di equazione

$$\alpha : l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) = 0$$

Sia $H = r \cap \alpha$, allora

$$d(P_0, r) = \overline{P_0H}$$

2.16 Distanza tra due rette.

Siano r, s due rette distinte di vettori direttori $\overrightarrow{r}(l, m, n)$ ed $\overrightarrow{s}(l', m', n')$, si possono presentare i seguenti casi:

1. r ed s sono incidenti, da cui segue $d(r, s) = 0$;

2. r ed s sono parallele. In questo caso fissiamo un punto R su r e quindi $d(r, s) = d(R, s)$, oppure fissiamo un punto S su s e quindi $d(r, s) = d(S, r)$;

3. r ed s sono sghembe. In questo caso i vettori $\overrightarrow{r}$ ed $\overrightarrow{s}$ non sono paralleli ossia
$$rg\begin{pmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix} = 2.$$
Sia $\overrightarrow{v}(\alpha, \beta, \gamma)$ un generico vettore dello spazio ortogonale contemporaneamente ad $\overrightarrow{r}$ e ad $\overrightarrow{s}$, ossia tale che $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{r} = 0$ e $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{s} = 0$.

Osserviamo che un siffatto vettore esiste sempre in quanto il sistema omogeneo
$$\begin{cases} l\alpha + m\beta + n\gamma = 0 \\ l'\alpha + m'\beta + n'\gamma = 0 \end{cases},$$
avendo la matrice dei coefficenti di rango 2, ammette ∞^1 soluzioni proporzionali che corrispondono alla direzione individuata dal vettore $\overrightarrow{v}(\alpha, \beta, \gamma)$.

In particolare se consideriamo un generico punto R su r ed un generico punto S su s, possiamo determinare i punti R ed S in modo tale che il vettore $\overrightarrow{RS}$ sia ortogonale ad $\overrightarrow{r}$ e ad $\overrightarrow{s}$. Allora
$$d(r, s) = \overline{RS}$$
è detta *minima distanza* tra r ed s e la retta per i punti R ed S è detta *retta di minima distanza.*

Osservazione. Se ci interessa solo la distanza tra r ed s e non la retta di minima distanza, allora possiamo procedere anche nel seguente modo: consideriamo un piano α per s parallelo ad r e fissiamo un punto R_0 su r. Allora
$$d(r, s) = d(R_0, \alpha)$$

2.17 Equazione della sfera.

La sfera Σ di centro C e raggio R è la totalità dei punti P dello spazio che hanno distanza costante R, detta *raggio*, dal punto C, detto *centro* della sfera, ossia
$$\overline{CP} = R \text{ o anche } \overline{CP}^2 = R^2$$
Se $C(\alpha, \beta, \gamma)$ e $P(x, y, z)$ è un generico punto dello spazio, allora
$$P \in \Sigma \Leftrightarrow (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2$$

da cui si ottiene

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0$$

con $\delta = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - R^2$, ossia $R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta}$.

In generale quindi un'equazione del tipo

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

rappresenta l'equazione di una sfera di centro $C(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{b}{2})$ purchè $a^2 + b^2 + c^2 - 4d > 0$.

2.17.1 Piano tangente ad una sfera.

Sia π un piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$ e sia Σ una sfera di equazione

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0$$

Sia $C(\alpha, \beta, \gamma)$ il centro di Σ ed R il suo raggio. Per valutare la posizione del piano π rispetto a Σ, bisogna considerare la distanza di C da π. Si hanno i seguenti casi:

1. $d(C, \pi) > R$: il piano è esterno a Σ;
2. $d(C, \pi) = R$: il piano ha in comune con Σ un sol punto e si dice tangente a Σ;
3. $d(C, \pi) < R$: il piano interseca Σ secondo una circonferenza $\mathcal{C}$. Il centro C' di $\mathcal{C}$ è l'intersezione di π con la retta ad esso perpendicolare passante per C; il raggio r di $\mathcal{C}$ è dato da

   $$r = \sqrt{R^2 - \overline{CC'}^2}$$

   per il teorema di Pitagora.

Nello spazio, quindi, una circonferenza si può rappresentare con un sistema del tipo

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0 \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$$

ossia come intersezione di una sfera con un piano.

Si tenga presente che $\mathcal{C}$ può anche essere rappresentata come intersezione di due sfere Σ e Σ_1 di centri C, C_1 e raggi R, R_1 tali che

$$|R - R_1| < \overline{CC}_1 < R + R_1$$

Sia ora $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto della sfera Σ di equazione

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0.$$

Supponiamo di voler determinare l'equazione di un piano π tangente Σ nel punto P_0. Tale piano è il piano passante per P_0 e perpendicolare al vettore $\overrightarrow{CP_0}$ con C centro della sfera Σ. Allora si ha

$$\overrightarrow{CP_0} = (x_0 - \alpha, y_0 - \beta, z_0 - \gamma)$$

da cui

$$\pi : (x_0 - \alpha)(x - x_0) + (y_0 - \beta)(y - y_0) + (z_0 - \gamma)(z - z_0) = 0$$

2.18 Coordinate cilindriche e coordinate polari.

Per rappresentare i punti dello spazio mediante terne ordinate di numeri reali si possono utilizzare, oltre alle coordinate cartesiane, altri tipi di coordinate che potrebbero adattarsi meglio al problema di volta in volta considerato:

2.18.1 Coordinate cilindriche.

Un sistema di coordinate cilindriche è definito quando si fissa:

- una retta orientata detta *asse delle quote* o asse z;
- su un piano α perpendicolare all'asse un sistema di riferimento polare, ossia: un punto O detto *polo* ($O = \alpha \cap asse$), una semiretta p di α uscente da O ed un *verso* di rotazione su α che risulti antiorario rispetto al semispazio individuato dal verso positivo dell'asse z;
- un'*unità di misura* per i segmenti;

Sia P un punto dello spazio. Indichiamo con P' la proiezione ortogonale di P su α. A P sono associati univocamente i numeri reali (ρ, φ, z), detti *coordinate cilindriche* di P, dove (ρ, φ) sono le coordinate polari di P' (sul piano α) e z è la misura algebrica del segmento orientato $P'P$.

Ogni punto dello spazio ha coordinate cilindriche (ρ, φ, z) che soddisfano le seguenti condizioni:

$$\rho \geq 0 \quad \text{e} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \text{ e } z \in \mathbb{R}$$

La corrispondenza

$$P \leftrightarrow (\rho, \varphi, z)$$

è biunivoca ad eccezione dei punti dell'asse z per i quali φ è indeterminato.

L'equazione $\rho = \rho_0 > 0$ rappresenta un cilindro rotondo.

L'equazione $\varphi = \varphi_0$ rappresenta un semipiano.

L'equazione $z = z_0$ rappresenta un piano.

Talvolta si associa ad un riferimento cilindrico un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ in modo che gli assi z coincidano ed il semiasse positivo delle x

coincida con l'asse polare del piano α. Tra i due tipi di coordinate sussistono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

Se poniamo $\rho = r$ costante otteniamo le equazioni cartesiane parametriche del cilindro rotondo

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

Eliminando i parametri φ e z

$$\begin{cases} x^2 = r^2\cos^2\varphi \\ y^2 = r^2\sin^2\varphi \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$$

si ottiene l'equazione cartesiana del cilindro rotondo di raggio r ed asse z: $x^2 + y^2 = r^2$.

2.18.2 Coordinate polari.

Un sistema di riferimento polare dello spazio è definito quando si fissa:

- un punto O detto *polo*;
- una retta r orientata per O detta *asse polare*;
- un semipiano α di origine r detto *semipiano polare*;
- un'*unità di misura* per i segmenti;
- un *verso positivo di rotazione* intorno all'asse polare.

Ad ogni punto P dello spazio che non appartenga all'asse polare sono associati univocamente i numeri reali (ρ, θ, φ) dove:

◄ $\rho = \overline{OP}$ si dice *raggio vettore*;

◄ θ è la misura dell'angolo convesso tra la semiretta OP ed il semiasse polare positivo. θ si dice *colatitudine*;

◄ φ è la misura della minima rotazione positiva che sovrappone il semipiano polare al semipiano di origine r contenente P. φ si dice *anomalia* o *longitudine*.

Ogni punto dello spazio ha *coordinate polari* (ρ, θ, φ) che soddisfano le seguenti condizioni:

$$\rho \geq 0 \qquad 0 \leq \theta \leq \pi \quad \text{e} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

L'equazione $\rho = \rho_0$ rappresenta una sfera di centro O e raggio ρ_0.

L'equazione $\theta = \theta_0$ rappresenta un semicono, in quanto costituito da semirette.

L'equazione $\varphi = \varphi_0$ rappresenta un semipiano.

Al riferimento polare dello spazio $\mathcal{R}(O', \rho, \theta, \varphi)$ possiamo associare un riferimento cartesiano $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ nel seguente modo:

- L'origine O che coincide con il polo;
- l'asse z coincide con l'asse polare;
- il semiasse positivo delle x appartiene al semipiano polare;
- coincidono le unità di misura dei segmenti.

Tra i due tipi di coordinate sussistono le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi \\ z = \rho \cos\theta \end{cases}$$

in quanto, se P' è la proiezione ortogonale di P sul piano $[xy]$, risulta $\overline{OP}' = \rho \sin\theta$.

Se poniamo $\rho = R$ costante si hanno le equazioni parametriche della sfera di centro O e raggio R :

$$\begin{cases} x = R \sin\theta \cos\varphi \\ y = R \sin\theta \sin\varphi \\ z = R \cos\theta \end{cases} \qquad \theta, \varphi \in \mathbb{R}$$

2.19 Cambiamenti di riferimento.

Analogamente a quanto avviene nel piano, una opportuna scelta del sistema di riferimento permette di semplificare la rappresentazione di curve e superfici nello spazio.

Siano $\mathcal{R}(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ e $\mathcal{R}'(O', \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}, \overrightarrow{k'})$ due riferimenti ortonormali dello spazio e supponiamo che $\mathcal{R}$ sia positivo.

Sia P un punto dello spazio avente coordinate (x, y, z) in $\mathcal{R}(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ e (x', y', z') in $\mathcal{R}'(O', \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}, \overrightarrow{k'})$. Nota la posizione di $\mathcal{R}'$ rispetto ad $\mathcal{R}$ vogliamo determinare la relazione esistente tra le coordinate (x, y, z) e (x', y', z'). La posizione di $\mathcal{R}'$ rispetto ad $\mathcal{R}$ è data dalle coordinate di O' in $\mathcal{R}$ e dalle componenti di $\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}, \overrightarrow{k'}$ rispetto alla base $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$.

Supponiamo sia $O'(x_0, y_0, z_0)$ in $\mathcal{R}$ e

$$\begin{cases} \overrightarrow{i'} = a_{11}\overrightarrow{i} + a_{21}\overrightarrow{j} + a_{31}\overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{j'} = a_{12}\overrightarrow{i} + a_{22}\overrightarrow{j} + a_{32}\overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{k'} = a_{13}\overrightarrow{i} + a_{23}\overrightarrow{j} + a_{33}\overrightarrow{k} \end{cases} \qquad (*)$$

Consideriamo il vettore $\overrightarrow{O'P}$ ed esprimiamolo rispetto le due basi:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O'P} &= x'\overrightarrow{i'} + y'\overrightarrow{j'} + z'\overrightarrow{k'} && \text{in } \mathcal{R}' \\ \overrightarrow{O'P} &= (x - x_0)\overrightarrow{i} + (y - y_0)\overrightarrow{j} + (z - z_0)\overrightarrow{k} && \text{in } \mathcal{R} \end{aligned}$$

utilizzando le relazioni $(*)$ si ha

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O'P} &= x'\overrightarrow{i'} + y'\overrightarrow{j'} + z'\overrightarrow{k'} = \\ &= x'\left(a_{11}\overrightarrow{i} + a_{21}\overrightarrow{j} + a_{31}\overrightarrow{k}\right) + y'(a_{12}\overrightarrow{i} + a_{22}\overrightarrow{j} + a_{32}\overrightarrow{k}) + z'(a_{13}\overrightarrow{i} + a_{23}\overrightarrow{j} + a_{33}\overrightarrow{k}) = \\ &= (a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z')\overrightarrow{i} + (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z')\overrightarrow{j} + (a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z')\overrightarrow{k} \end{aligned}$$

poichè un vettore si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori di una base, da

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O'P} &= (x - x_0)\overrightarrow{i} + (y - y_0)\overrightarrow{j} + (z - z_0)\overrightarrow{k} = \\ &= (a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z')\overrightarrow{i} + (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z')\overrightarrow{j} + (a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z')\overrightarrow{k} \end{aligned}$$

segue

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + x_0 \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + y_0 \\ z = a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + z_0 \end{cases}$$

Se indichiamo con A la matrice ortogonale del cambiamento di base da $\left\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right\}$ a $\left\{\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}, \overrightarrow{k'}\right\}$, cioè

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

e poniamo $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, $X_{O'} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ allora le relazioni esistenti tra le coordinate (x, y, z) e (x', y', z') si possono rappresentare nella forma matriciale

$$X = AX' + X_{O'} \qquad (i)$$

Poichè le colonne di A sono le componenti dei vettori di una base ortonormale, si ha $AA^t = I$ ossia $A^t = A^{-1}$, cioè A è una matrice ortogonale del terzo ordine.

Inoltre

$$\det A = \overrightarrow{i'} \wedge \overrightarrow{j'} \cdot \overrightarrow{k'} = \pm 1$$

a seconda che $\left\{ \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}, \overrightarrow{k'} \right\}$ sia positiva o negativa.

Consideriamo la relazione (i) per $X = X_O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ossia

$$X_O = AX'_O + X_{O'}$$

da cui, moltiplicando a sinistra per la trasposta di A si ha

$$A^t X_O = A^t A X'_O + A^t X_{O'} \Rightarrow O = X'_O + A^t X_{O'}$$

essendo $A^t X_O = A^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = O$ e $A^t A = I$. da cui segue

$$X'_O = -A^t X_{O'}.$$

In generale da

$$X = AX' + X_{O'}$$

segue

$$A^t X = A^t A X' + A^t X_{O'}$$

Ed essendo $AA^t = I$ e $X'_O = -A^t X_{O'}$ si ha

$$X' = A^t X + X'_O \qquad (ii)$$

dove le (ii) sono le formule inverse di (i).

Osserviamo che se consideriamo un cambiamento da un sistema di riferimento affine ad un altro, le equazioni che lo esprimono sono sempre della forma

$$X = AX' + X_{O'}$$

solo che in questo caso la matrice A non è ortogonale ma è semplicemente una matrice invertibile in quanto rappresenta il passaggio da una generica base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ ad un'altra $\left\{\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}, \overrightarrow{e'_3}\right\}$. In questo caso le formule inverse sono espresse da

$$X' = A^{-1} X + X'_O$$

2.20 Superfici e curve.

2.20.1 Rappresentazione di una superficie.

Abbiamo visto con alcuni esempi (piano e sfera), che in un sistema di coordinate cartesiane, una superficie può essere rappresentata in uno dei seguenti modi:

a) mediante un'equazione nelle incognite (x, y, z)

$$f(x, y, z) = 0 \qquad (1)$$

che si dice *equazione cartesiana* della superficie;

b) mediante *equazioni parametriche* del tipo:

$$x = x(t, t') \quad y = y(t, t') \quad z = z(t, t') \qquad (2)$$

che esprimono le coordinate cartesiane del punto di una superficie in funzione di due parametri (t, t') variabili in una certa regione di $\mathbb{R}^2$.

Il passaggio tra le rappresentazioni (1) e (2) è in generale piuttosto delicato, ma, almeno su porzioni ristrette di una superficie, sotto opportune ipotesi si può dimostrare l'equivalenza tra le due rappresentazioni. Se si trattano come parametri due delle variabili della (1) e si risolve l'equazione rispetto alla terza variabile si ottengono equazioni parametriche del tipo (2). Viceversa, se dalle (2) si eliminano i parametri t, t', cioè si ricavano ad esempio t, t' in funzione di x, y e si sostituisce nella terza, si giunge ad un'equazione del tipo (1).

Supponiamo che la superficie Σ sia rappresentata nella forma $f(x, y, z) = 0$. Se f è un polinomio di grado n nelle variabili x, y, z, la superficie si dice una *superficie algebrica di ordine* n, altrimenti si dice una superficie *trascendente*.

Ad esempio il piano e la sfera sono superfici algebriche rispettivamente del 1° e del 2° ordine.

2.20.2 Rappresentazione di una curva.

Fissato un sistema di coordinate, una curva $\mathcal{C}$ dello spazio si può rappresentare nelle seguenti forme:

a) come intersezione di due superfici, ossia mediante un sistema del tipo

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \qquad (i)$$

b) come luogo descritto da un punto $P = P(t)$ le cui coordinate cartesiane dipendono da un parametro t, cioè mediante *equazioni parametriche* del tipo:

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t) \qquad (ii).$$

Si può dimostrare che in generale, almeno su piccoli tratti, le rappresentazioni (i) e (ii) sono equivalenti.

Si osservi che, date due superfici $\Sigma_1 : f_1(x, y, z) = 0$ e $\Sigma_2 : f_2(x, y, z) = 0$, allora

$$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 : \begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \qquad \Sigma_1 \cup \Sigma_2 : f_1(x, y, z) f_2(x, y, z) = 0$$

Evidentemente, $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ è una curva, mentre $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ è una superficie. L'intersezione di una curva $\mathcal{C}$ e di una superficie Σ è, generalmente, un insieme finito di punti, eventualmente vuoto. Naturalmente, in casi particolari, può succedere che $\mathcal{C} \subset \Sigma$.

Definizione 39 *Una curva $\mathcal{C}$ dello spazio si dice* piana *se esiste un piano che la contiene.*

Naturalmente l'intersezione di una superficie con un piano da una curva piana. Se una curva non è piana, allora si dice *sghemba*.

Esempio. Data la curva $\mathcal{C} : \begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^2 + 1 \\ z = 2t \end{cases}$, verificare che è piana.

Si tratta di verificare se esiste un piano $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ tale che $\mathcal{C} \subset \alpha$, ossia tale che

$$ax(t) + by(t) + cz(t) + d = 0 \text{ per ogni } t$$

nel nostro caso:

$$a(t^2 - 1) + b(t^2 + 1) + c(2t) + d = 0 \quad \forall t \Leftrightarrow (a + b)t^2 + 2ct - a + b + d = 0 \quad \forall t$$

per il principio di identità dei polinomi

$$(a + b)t^2 + 2ct - a + b + d = 0 \quad \forall t \Longleftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ 2c = 0 \\ -a + b + d = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ c = 0 \\ d = -2b \end{cases}$$

Abbiamo così verificato che esiste il piano $\alpha : x - y + 2 = 0$ che contiene la curva $\mathcal{C}$.

2.20.3 Retta tangente ad una curva.

Uno degli elementi più importanti nello studio delle curve è il concetto di retta tangente in un punto.

Definizione 40 *Sia $\mathcal{C}$ una curva dello spazio e P_0 un fissato punto di $\mathcal{C}$. Si chiama* retta tangente in P_0 a $\mathcal{C}$ *la retta r, se esiste, posizione limite della secante congiungente i punti P_0 e P di $\mathcal{C}$, al tendere di P a P_0.*

Sia $\mathcal{C} : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ una curva e $P_0(x(t_0), y(t_0), x(t_0))$ un punto fissato di $\mathcal{C}$.

La secante congiungente un generico punto P di $\mathcal{C}$ con P_0 ha equazione

$$\frac{x - x(t_0)}{x(t) - x(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y(t) - y(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z(t) - z(t_0)}$$

ed il suo vettore direttore

$$(x(t) - x(t_0), y(t) - y(t_0), z(t) - z(t_0))$$

è parallelo al vettore

$$\left(\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}, \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}, \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0}\right).$$

Far tendere il punto P al punto P_0, equivale a far tendere t a t_0. Se le funzioni $x(t), y(t)$ e $z(t)$ sono derivabili allora

$$\lim_{t \to t_0} \frac{x - x(t_0)}{x(t) - x(t_0)} = x'(t_0), \quad \lim_{t \to t_0} \frac{y - y(t_0)}{y(t) - y(t_0)} = y'(t_0) \quad \lim_{t \to t_0} \frac{z - z(t_0)}{z(t) - z(t_0)} = z'(t_0)$$

Se $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) \neq (0, 0, 0)$ la tangente in P_0 a $\mathcal{C}$ è dunque data dall'equazione

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}$$

tangente indeterminata se $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) = (0, 0, 0)$

2.21 Esempi di superfici rigate: coni e cilindri.

Per *superficie rigata* si intende una superficie costituita da un'infinità di rette. In generale una superficie rigata Σ si individua mediante una curva $\mathcal{C}$ che le appartenga (curva *direttrice*) ed associando, mediante un'opportuna legge, ad ogni punto P di $\mathcal{C}$ una retta di Σ passante per P.

I coni ed i cilindri sono esempi particolari di superfici rigate.

2.21.1 Coni.

Sia $\mathcal{C} : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ una curva e $V(x_0, y_0, z_0)$ un punto fissato dello spazio.

Definizione 41 *La superficie luogo delle rette passanti per V ed incidenti $\mathcal{C}$ si dice* cono *di vertice V e direttrice $\mathcal{C}$. Le rette che costituiscono il cono si dicono* generatrici.

Se indichiamo con $P(t)$ il generico punto di $\mathcal{C}$, una generatrice $g(t)$ è la retta per V e $P(t)$ di equazioni parametriche

$$g(t) : \begin{cases} x = x_0 + (x(t) - x_0)t' \\ y = y_0 + (y(t) - y_0)t' \\ z = z_0 + (z(t) - z_0)t' \end{cases} \qquad (*)$$

al variare di t si ottengono le infinite rette che costituiscono il cono.

Se $t = t_0$ costante allora le $(*)$ descrivono una retta generatrice;

se $t' = t'_0$ costante allora le $(*)$ descrivono una curva direttrice ad eccezione di $t' = 0$ per cui si ottengono le coordinate del vertice V.

Proposizione 42 *Sia Σ una superficie dello spazio. Se Σ è rappresentata da un'equazione cartesiana del tipo $f(x, y, z) = 0$, con f funzione omogenea, allora Σ è un cono di vertice $V \equiv O$.*

Dim. Ricordiamo che:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

si dice *omogenea di grado k* se

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^k f(x, y, z) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Supponiamo allora che la superficie Σ abbia equazione cartesiana

$$f(x, y, z) = 0$$

con f funzione omogenea di grado k.

Da $f(0, 0, 0) = f(\lambda 0, \lambda 0, \lambda 0) = \lambda^k f(0, 0, 0)$ segue che $f(0, 0, 0) = 0$ cioè $O \in \Sigma$.

Sia $\mathcal{C}$ una curva di Σ ottenuta come intersezione di Σ con il piano π di equazione $z = z_0$ con $z_0 \neq 0$, da cui $O \notin \pi$.

Proviamo che per ogni $P_1(x_1, y_1, z_1) \in \mathcal{C}$ la retta $OP_1 \subset \Sigma$:

sia $P(x, y, z) \in OP_1$, allora

$$x = tx_1 \quad y = ty_1 \quad z = tz_1$$

da cui

$$f(x, y, z) = f(tx_1, ty_1, tz_1) = t^k f(x_1, y_1, z_1)$$

Poichè $P_1 \in \mathcal{C}$ e $\mathcal{C} \subset \Sigma$ si ha che $P_1 \in \Sigma$ e dunque $f(x_1, y_1, z_1) = 0$.

Abbiamo così provato che per ogni $P(x, y, z) \in OP_1$ si ha $f(x, y, z) = 0$, cioè $P \in \Sigma$.

Facendo variare P_1 lungo la curva $\mathcal{C}$ si ha che la superficie Σ è costituita dalle infinite rette OP_1 e quindi Σ è un cono di vertice O e direttrice $\mathcal{C}$. ■

Osserviamo che se f è una funzione omogenea nelle variabili

$$(x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0)$$

allora la superficie $\Sigma : f(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$ è un cono di vertice $V(x_0, y_0, z_0)$.

2.21.2 Cilindri.

Sia $\mathcal{C}: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ una curva e $\overrightarrow{v}(l, m, n)$ un vettore fissato.

Definizione 43 *La superficie luogo delle rette incidenti $\mathcal{C}$ e parallele al vettore $\overrightarrow{v}$ si dice* cilindro *di direttrice $\mathcal{C}$ e generatrici parallele a $\overrightarrow{v}$.*

Se indichiamo con $P(t)$ il generico punto di $\mathcal{C}$, una generatrice $g(t)$ è la retta per $P(t)$ parallela al vettore $\overrightarrow{v}$ di equazioni parametriche

$$g(t): \begin{cases} x = x(t) + lt' \\ y = y(t) + mt' \\ z = z(t) + nt' \end{cases} \qquad (**)$$

al variare di t si ottengono le infinite rette che descrivono il cilindro.
Se $t = t_0$ costante allora le $(**)$ descrivono una retta genetrice;
se $t' = t'_0$ costante allora le $(**)$ descrivono una curva direttrice.

Osservazione. Supponiamo che l'equazione $f(x, y) = 0$ rappresenti nel piano $[xy]$ un curva $\mathcal{C}$; la stessa equazione nello spazio rappresenta un cilindro avente $\mathcal{C}$ come direttrice e generatrici parallele all'asse z. Infatti:
se $P_0(x_0, y_0, 0)$ è un punto di $\mathcal{C}$ allora

$$f(x_0, y_0) = 0$$

da cui segue che ogni punto $P(x_0, y_0, z)$, qualunque sia z, soddisfa l'equazione $f(x, y) = 0$ che rappresenta partanto un cilindro avente $\mathcal{C}$ come direttrice e generatrici parallele all'asse z. Discorso analogo si può fare se nell'equazione $f(x, y, z) = 0$ non compare la variabile x oppure y.

2.21.3 Curva proiezione.

Siano $\mathcal{C}$ una curva, π un piano, V un punto e $\overrightarrow{v}$ un vettore.

Definizione 44 *Si dice* curva proiezione di $\mathcal{C}$ dal punto V sul piano π*, la curva $\mathcal{C}' = \Sigma' \cap \pi$, dove Σ' è il cono di vertice V e direttrice $\mathcal{C}$.*

Definizione 45 *Si dice* curva proiezione di $\mathcal{C}$ sul piano π secondo la direzione del vettore $\overrightarrow{v}$*, la curva $\mathcal{C}'' = \Sigma'' \cap \pi$, dove Σ'' è il cilindro con generatrici parallele al vettore $\overrightarrow{v}$ e direttrice $\mathcal{C}$. Se $\overrightarrow{v} \perp \pi$, $\mathcal{C}''$ si dice curva proiezione ortogonale di $\mathcal{C}$ su π.*

2.22 Superfici di rotazione.

Sia $\mathcal{C}: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ una curva e a una retta.

Definizione 46 *La superficie Σ descritta dalla curva $\mathcal{C}$ che ruoti intorno alla retta a si dice* superficie di rotazione *di asse a generata da $\mathcal{C}$. $\mathcal{C}$ si dice* curva generatrice *di Σ.*

Ogni punto di $\mathcal{C}$ descrive una circonferenza, detta *parallelo*, di Σ appartenente ad un piano perpendicolare all'asse e con centro sull'asse stesso; l'intersezione di Σ con un piano perpendicolare all'asse, se non è vuota, è costituita da una o più circonferenze.

I semipiani passanti per l'asse intersecano Σ secondo curve, tutte fra loro uguali, dette *meridiani*; meridiani che si trovino su semipiani opposti si dicono meridiano ed antimeridiano e costituiscono un *meridiano completo.*

Rappresentazione di una superficie di rotazione.

Sia a una retta per il punto $A(x_0, y_0, z_0)$ e parallela al vettore $\overrightarrow{v}(l, m, n)$ e sia $\mathcal{C}: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ una generica curva.

Vogliamo determinare l'equazione cartesiana della superficie Σ ottenuta ruotando $\mathcal{C}$ intorno all'asse a.

Sia P un generico punto di $\mathcal{C}$ di coordinate $(x(t), y(t), z(t))$ e sia C_P il parallelo di Σ passante per P.

Indichiamo con π_P il piano per P perpendicolare ad a, si ha

$$\pi_P : l(x - x(t)) + m(y - y(t)) + n(z - z(t)) = 0 \qquad (i)$$

e con S_P la sfera di centro A e raggio $\overline{AP}$ di equazione

$$S_P : (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = (x(t)-x_0)^2+(y(t)-y_0)^2+(z(t)-z_0)^2 \qquad (ii)$$

allora

$$C_P = \pi_P \cap S_P$$

Dal sistema

$$\begin{cases} l(x - x(t)) + m(y - y(t)) + n(z - z(t)) = 0 \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = (x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 + (z(t) - z_0)^2 \end{cases} \qquad (1)$$

si ricava dunque l'equazione cartesiana di Σ.

Il problema della rappresentazione analitica di una superficie di rotazione è notevolmente semplificato se si conosce una sua curva generatrice $\mathcal{C}$ contenuta in un piano β passante per l'asse di rotazione. Supponiamo di aver scelto il sistema di riferimento in modo tale che l'asse z coincida con a ed il piano $[xz]$ coincida con il piano β. In questo caso

$$\mathcal{C}: \begin{cases} f(x,z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

per cui un generico punto di $\mathcal{C}$ ha coordinate $P(\alpha, 0, \gamma)$ con $f(\alpha, \gamma) = 0$ ed il vettore direttore dell'asse a è $\overrightarrow{v}(0,0,1)$. Se consideriamo come punto A fissato sull'asse l'origine del sistema di riferimento, le (1) diventano

$$\begin{cases} z - \gamma = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2 + \gamma^2 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} \gamma = z \\ x^2 + y^2 = \alpha^2 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} \gamma = z \\ \alpha = \pm\sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

che sostituite in $f(\alpha, \gamma) = 0$ danno

$$\Sigma : f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$$

Quindi l'equazione di Σ si ottiene dall'equazione $f(x,z) = 0$, che rappresenta $\mathcal{C}$ sul piano $[xz]$, tenendo fissa la variabile z e sostituendo la x con $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$.

Risultato analogo si ottiene per una qualunque superficie ottenuta per rotazione intorno ad un asse coordinato qualsiasi di una curva appartenente ad un piano coordinato contenente tale asse.

Vogliamo ora determinare le equazioni parametriche di una superficie Σ ottenuta facendo ruotare una curva $\mathcal{C}: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ attorno all'asse z.

Sia C_P il generico parallelo di Σ e sia Q un punto di C_P. Se Q' è la proiezione ortogonale di Q sul piano $[xy]$ allora le coordinate di Q sono date da

$$\begin{cases} x = OQ' \cos\theta \\ y = OQ' \sin\theta \\ z = z(t) \end{cases}$$

Indichiamo con A il centro del parallelo C_P e con $P'(x(t), y(t), 0)$ la proiezione ortogonale di P sul piano $[xy]$.

Durante la rotazione di $\mathcal{C}$ attorno all'asse z, il raggio $AP = AQ$ di C_P resta costante ed è uguale al segmento OP', da cui $OQ' = OP' = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$ e le equazioni parametriche della superficie Σ sono date da

$$\Sigma : \begin{cases} x = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \cos\theta \\ y = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \sin\theta \\ z = z(t) \end{cases} \qquad (2)$$

con t, θ parametri.

In particolare se $\mathcal{C} \subset [xz]$, ossia $\mathcal{C} : \begin{cases} x = x(t) \\ y = 0 \\ z = z(t) \end{cases}$ le (2) diventano

$$\Sigma : \begin{cases} x = x(t) \cos\theta \\ y = x(t) \sin\theta \\ z = z(t) \end{cases} \qquad t \in I \text{ e } \theta \in]0, 2\pi]$$

Supponiamo ora di far ruotare una conica non degenere $\mathcal{C}$ intorno ad un suo asse di simmetria. Le superfici così ottenute si chiamano *quadriche di rotazione* di cui $\mathcal{C}$ costituisce un loro meridiano completo. Supponiamo inoltre che l'asse di rotazione coincida con un asse coordinato ed il piano di $\mathcal{C}$ con un piano coordinato in modo da poter utilizzare l'equazione

$$\Sigma : f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$$

ed analoghe.

1. Sia $\mathcal{C}$ l'ellisse di equazione

   $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad y = 0.$$

   Per rotazione intorno all'asse z si ottiene la superficie n.1 (all. A) detta *ellissoide di rotazione* di equazione

   $$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

2. Sia $\mathcal{C}$ l'iperbole di equazione

   $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad y = 0.$$

   Per rotazione intorno all'asse z si ottiene la superficie n.2 (all. A) detta *iperboloide di rotazione ad una falda* di equazione

   $$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

   Mentre per rotazione intorno all'asse x si ottiene la superficie n.3 (all. A) detta *iperboloide di rotazione a due falde* di equazione

   $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1$$

3. Sia, infine, $\mathcal{C}$ la parabola di equazione

   $$\frac{x^2}{a^2} = 2z, \quad y = 0.$$

   Per rotazione intorno al suo asse (asse z) si ottiene la superficie n.4 (all. A) detta *paraboloide di rotazione* di equazione

   $$\frac{x^2 + y^2}{a^2} = 2z.$$

3 Algebra lineare.

In questo capitolo intendiamo introdurre la nozione astratta di *Spazio Vettoriale* di cui abbiamo già visto un esempio nel primo capitolo quando abbiamo introdotto l'insieme delle matrici e le operazioni di somma tra matrici e di prodotto di una matrice per uno scalare.

Sviluppare una teoria astratta degli spazi vettoriali ci consente di ottenere risultati che siano validi indipendentemente dal particolare contesto in cui sono stati inizialmente scoperti e che quindi siano applicabili, più in generale, ad ogni altra situazione in cui le operazioni rilevanti sono la somma ed il prodotto per uno scalare.

Definizione 47 *Siano V un insieme non vuoto e $\mathbb{K}$ un campo. La terna $(V,+,\cdot)$ si definisce* ***spazio vettoriale*** *su $\mathbb{K}$ se le applicazioni*

$$+ : V \times V \to V \qquad \cdot : \mathbb{K} \times V \to V$$

soddisfano le seguenti proprietà:

1. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \quad \forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V$ (*prop. commutativa*);
2. $\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} \quad \forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V$ (*prop. associativa*);
3. $\exists \overrightarrow{0} \in V$ t.c. $\quad \overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} \quad \forall \overrightarrow{u} \in V$ (*esistenza dell'elemento neutro*);
4. $\forall \overrightarrow{u} \in V \quad \exists (-\overrightarrow{u}) \in V$ t.c. $\quad \overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0} = (-\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{u}$ (*esistenza dell'opposto*)
5. $\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v} \quad \forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V$ e $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ (*prop. distributiva del prodotto rispetto la somma di vettori*);
6. $(\lambda + \mu)\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u} \quad \forall \overrightarrow{u} \in V$ e $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ (*prop. distributiva del prodotto rispetto la somma di scalari*);
7. $(\lambda\mu)\overrightarrow{u} = \lambda(\mu\overrightarrow{u}) \quad \forall \overrightarrow{u} \in V$ e $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ (*prop. associativa del prodotto per uno scalare*);
8. $1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} \quad \forall \overrightarrow{u} \in V$.

Osserviamo che dalle proprietà 1...4 segue che $(V,+)$ è un gruppo abeliano.

Gli elementi di V sono detti *vettori* e quelli di $\mathbb{K}$ *scalari*. Il vettore $\overrightarrow{0}$ è detto *vettore nullo*.

Si noti che

$$\lambda\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ oppure } \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$$

Infatti si ha

$$0 + 0 = 0 \Rightarrow (0+0)\overrightarrow{v} = 0\overrightarrow{v} \Rightarrow 0\overrightarrow{v} + 0\overrightarrow{v} = 0\overrightarrow{v} \Rightarrow 0\overrightarrow{v} = 0$$

e
$$\overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \lambda(\overrightarrow{0} + \overrightarrow{0}) = \lambda\overrightarrow{0} \Rightarrow \lambda\overrightarrow{0} + \lambda\overrightarrow{0} = \lambda\overrightarrow{0} \Rightarrow \lambda\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$$
Viceversa sia $\lambda\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ e supponiamo $\lambda \neq 0$. Si ha
$$\overrightarrow{v} = 1\overrightarrow{v} = \left(\lambda^{-1}\lambda\right)\overrightarrow{v} = \lambda^{-1}(\lambda\overrightarrow{v}) = \lambda^{-1}\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$$
Si noti inoltre che
$$-(\lambda\overrightarrow{v}) = (-\lambda)\overrightarrow{v} = \lambda(-\overrightarrow{v})$$
Infatti
$$\overrightarrow{0} = 0\overrightarrow{v} = (-\lambda + \lambda)\overrightarrow{v} = (-\lambda)\overrightarrow{v} + \lambda\overrightarrow{v}$$
e quindi
$$(-\lambda)\overrightarrow{v} = -(\lambda\overrightarrow{v})$$
Si ha anche
$$\overrightarrow{0} = \lambda\overrightarrow{0} = \lambda(-\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}) = \lambda(-\overrightarrow{v}) + \lambda(\overrightarrow{v})$$
e quindi
$$\lambda(-\overrightarrow{v}) = -(\lambda\overrightarrow{v})$$

Esempi di Spazi Vettoriali.

i) L'insieme $\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in \mathbb{K},\ i = 1, ..., n\}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ rispetto le operazioni di somma e di prodotto per uno scalare così definite:
$$\begin{array}{rcl} (x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) & : & = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) \\ \lambda \cdot (x_1, ..., x_n) & : & = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n) \end{array}$$

ii) Come casi particolari dell'esempio precedente si ha che $\mathbb{C}^n, \mathbb{R}^n$ e, in particolare $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ sono spazi vettoriali.

iii) L'insieme $\mathbb{K}^{m,n}$ delle matrici di tipo m, n a coefficienti in $\mathbb{K}$ è uno spazio vettoriale rispetto le operazioni di somma tra matrici e di prodotto di una matrice per uno scalare.

iv) L'insieme $\mathbb{K}[t] = \left\{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_n t^n + ... \mid a_i \in \mathbb{K}\right\}$ dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{K}$ è uno spazio vettoriale rispetto le operazioni di somma tra polinomi e di prodotto di un polinomio per uno scalare.

v) Sia X un insieme non vuoto e V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Consideriamo l'insieme
$$\mathcal{M}(X, V) := \{f : X \to V\}$$
su cui siano definite le seguenti operazioni
$$\begin{array}{ccc} \forall f, g \in \mathcal{M}(X, V) & (f + g)(x) := f(x) + g(x) & \forall x \in X \\ \forall f \in \mathcal{M}(X, V) \text{ e } \forall \lambda \in \mathbb{K} & (\lambda f)(x) := \lambda f(x) & \forall x \in X \end{array}$$
Si verifica facilmente che $(\mathcal{M}(X, V), +, \cdot)$ è uno Spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

vi) Un esempio notevole di spazio vettoriale è dato infine dall'insieme dei vettori geometrici $\mathbb{V}_3$ così definito:

Sia S_3 l'insieme dei punti dello spazio geometrico ordinario (spazio euclideo). Siano $A, B \in S_3$, indichiamo con AB il segmento orientato di primo estremo A e di secondo estremo B (o come spesso diremo di origine A ed estremo B).

Nell'insieme dei segmenti orientati di S_3 definiamo la seguente relazione detta *relazione di equipollenza*:

il segmento orientato AB è equipollente al segmento CD, in simboli $AB \sim CD$, se i punti medi di AD e BC coincidono.

Si verifica che questa relazione è riflessiva, simmetrica e transitiva, quindi è una relazione di equivalenza. Si noti che due segmenti AD e BC equipollenti giacciono su rette parallele, hanno la stessa lunghezza ed hanno "orientamento concorde".

Le classi di equivalenza rispetto a questa relazione si dicono *vettori liberi* dello spazio S_3.

Indicheremo i vettori liberi con $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, ...$ e l'insieme di questi vettori con $\mathbb{V}_3$. Per indicare che il segmento orientato AB è un rappresentante del vettore libero $\overrightarrow{u}$ useremo la notazione

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$$

Si osservi che fissato un vettore libero $\overrightarrow{u}$ ed un punto A esiste uno ed un solo rappresentante del vettore $\overrightarrow{u}$ con primo estremo A.

La classe di equipollenza costituita da tutti i segmenti orientati in cui l'origine coincide con l'estremo si dice *vettore nullo* e si indica con $\overrightarrow{0}$.

Se $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{0}$, cioè $A \neq B$, al vettore $\overrightarrow{AB}$ si associano:

a) un numero strettamente positivo uguale alla lunghezza del segmento AB, rispetto ad una fissata unità di misura, che si chiama *norma* o *modulo* del vettore e si denota con $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$;

b) una direzione: quella della retta passante per A e B;

c) un verso: quello che da A porta a B.

Il vettore nullo ha norma nulla, direzione e verso indeterminati.

Siano $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ vettori di $\mathbb{V}_3$. Scelti come rappresentanti di $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ i segmenti orientati AB e BC rispettivamente, chiameremo **somma** di $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ il vettore libero $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ rappresentato dal segmento orientato AC. Una semplice dimostrazione di geometria elementare mostra che se si scelgono altri due rappresentanti $A'B'$ e $B'C'$ rispettivamente di $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ allora il segmento orientato $A'C'$ appartiene alla stessa classe di equipollenza di AC e quindi la definizione di somma è indipendente dalla scelta dei rappresentanti.

Si verificano facilmente le seguenti proprietà:

1. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \quad \forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{V}_3$;

2. $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) \;\; \forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{V}_3$;

infatti siano $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{CD}$

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\,) + \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} \end{aligned}$$

3. $\exists\, \overrightarrow{0} \in \mathbb{V}_3$ t.c. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} \quad \forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{V}_3$;

infatti se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ basterà considerare come rappresentante di $\overrightarrow{0}$ il segmento orientato $\overrightarrow{AA}$ oppure $\overrightarrow{BB}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u} \\ \overrightarrow{0} + \overrightarrow{u} &= \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u} \end{aligned}$$

4. $\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{V}_3 \quad \exists(-\overrightarrow{u}) \in \mathbb{V}_3$ t.c. $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = (-\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$;

se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ allora $(-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{BA}$. Infatti

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0} \\ (-\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{u} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

Segue allora che $(\mathbb{V}_3, +)$ è un Gruppo abeliano.

Si osservi che se O è un punto fisso di S_3 l'applicazione

$$S_3 \to \mathbb{V}_3$$

$$P \mapsto \overrightarrow{OP}$$

è biiettiva.

Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ sono due vettori liberi di cui vogliamo calcolare la somma, possiamo procedere anche nel seguente modo:

poniamo $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$, in questo modo $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ sarà uguale al vettore $\overrightarrow{OC}$ dove C è il quarto vertice del parallelogramma costruito sui lati OA e OB. La regola appena illustrata è detta *regola del parallelogramma.*

Sia λ un numero reale, il prodotto di un vettore $\overrightarrow{v}$ di $\mathbb{V}_3$ per λ è l'applicazione:

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{V}_3 \to \mathbb{V}_3$$

$$(\lambda, \overrightarrow{v}) \mapsto \lambda \overrightarrow{v}$$

definita nel seguente modo:

a) se $\lambda = 0$ oppure $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$

$$\lambda \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$$

b) se $\lambda \neq 0$ e $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$:

- la direzione di $\lambda\overrightarrow{v}$ coincide con quella di $\overrightarrow{v}$;
- il modulo di $\lambda\overrightarrow{v}$ è il prodotto del valore assoluto di λ per il modulo di $\overrightarrow{v}$

$$\|\lambda\overrightarrow{v}\| = |\lambda|\,\|\overrightarrow{v}\|$$

- il verso di $\lambda\overrightarrow{v}$ è concorde con quello di $\overrightarrow{v}$ se $\lambda > 0$, discorde se $\lambda < 0$.

L'operazione così definita gode delle le seguenti proprietà:

5. $\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{v} + \lambda\overrightarrow{u} \quad \forall\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{V}_3$ e $\forall\lambda \in \mathbb{R}$;
6. $(\lambda + \mu)\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{v} \quad \forall\overrightarrow{v} \in \mathbb{V}_3$ e $\forall\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;
7. $(\lambda\mu)\overrightarrow{v} = \lambda(\mu\overrightarrow{v})\ \forall\overrightarrow{v} \in \mathbb{V}_3$ e $\forall\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;
8. $1\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \quad \forall\overrightarrow{v} \in \mathbb{V}_3$

che si possono verificare utilizzando nozioni di geometria elementare.

Dalle proprietà 1,2,...,8 segue che $(\mathbb{V}_3, +, \cdot)$ è uno Spazio Vettoriale su $\mathbb{R}$.

In modo analogo si può definire lo Spazio Vettoriale $\mathbb{V}_2$ dei vettori liberi a partire dal piano euclideo S_2.

Gli esempi di spazi vettoriali appena descritti ne generano molti altri con un semplice procedimento: dato uno spazio vettoriale V, si cercano quei sottoinsiemi W di V che, rispetto alle operazioni di somma e di prodotto per uno scalare definite in V, sono essi stessi degli spazi vettoriali. Vale infatti la seguente definizione

Definizione 48 *Sia $(V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale. Un sottoinsieme $W \subset V$ si dice **sottospazio vettoriale** di V se $(W, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni di V ristrette a W.*

Si prova che

Proposizione 49 *Sia $(V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale e $W \subset V$.*

W è un sottospazio vettoriale di $V \Leftrightarrow W \neq \varnothing$ e $\forall\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in W$ e $\forall\lambda \in \mathbb{K} \quad \overrightarrow{u}+\overrightarrow{v} \in W$ e $\lambda\overrightarrow{v} \in W$

Osserviamo che se W è un sottospazio vettoriale di V allora da $\overrightarrow{v} \in W$ segue che $-\overrightarrow{v} \in W$ e di conseguenza $\overrightarrow{v} + (-\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0} \in W$.

Dato un qualunque spazio vettoriale V, il sottoinsieme $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$ di V costituito dal solo vettore nullo è un sottospazio, detto *sottospazio nullo*. L'intero spazio V è anch'esso un sottospazio. Questi due sottospazi sono detti *sottospazi banali* di V. Gli altri sottospazi, se esistono, sono detti *sottospazi propri* e sono quelli più interessanti.

Esempi di Sottospazi Vettoriali.

i) Consideriamo nello spazio vettoriale $\mathbb{K}^{n,n}$ delle matrici quadrate di ordine n il sottoinsieme delle matrici simmetriche S.

Siano $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ due matrici di $\mathbb{K}^{n,n}$ tali che $a_{ij} = a_{ji}$ e $b_{ij} = b_{ji}$ e sia $\lambda \in \mathbb{K}$. Si ha

$$\begin{array}{rcc} A + B = (a_{ij} + b_{ij}) & \text{con } a_{ij} + b_{ij} = a_{ji} + b_{ji} & \text{da cui } A + B \in S \\ \lambda A = (\lambda a_{ij}) & \text{con } \lambda a_{ij} = \lambda a_{ji} & \text{da cui } \lambda A \in S \end{array}$$

Abbiamo così verificato che la somma di due matrici simmetriche è ancora una matrice simmetrica e che il prodotto per uno scalare di una matrice simmetrica da come risultato ancora una matrice simmetrica. Possiamo allora concludere che l'insieme delle matrici simmetriche d'ordine n è un sottospazio vettoriale proprio di $\mathbb{K}^{n,n}$.

ii) Consideriamo nello spazio $\mathbb{V}_3$ il sottoinsieme dei vettori liberi $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$... aventi un rappresentante giacente su un fissato piano di S_3. Tale sottoinsieme è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{V}_3$.

iii) Consideriamo un sistema $AX = B$ dove $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,n}$ è la matrice dei coefficenti, $X \in \mathbb{K}^n$ è la colonna delle incognite e $B \in \mathbb{K}^m$ quella dei termini noti. Indichiamo con Δ l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo $AX = O$ associato al sistema dato. Se consideriamo $\lambda \in \mathbb{K}$ e $X_0, \widetilde{X}_0 \in \Delta$ si ha $AX_0 = O$ e $A\widetilde{X}_0 = O$ da cui segue

$$A(X_0 + \widetilde{X}_0) = AX_0 + A\widetilde{X}_0 = O + O = O \text{ ossia } X_0 + \widetilde{X}_0 \in \Delta$$

analogamente

$$A(\lambda X_0) = \lambda(AX_0) = \lambda O = O \text{ ossia } \lambda X_0 \in \Delta$$

Possiamo allora concludere che Δ è un esempio di sottospazio vettoriale proprio di $\mathbb{K}^n$.

3.1 Intersezione e somma di sottospazi. Somma diretta.

In questo paragrafo denotiamo con H e K due sottospazi di uno spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{K}$. Possiamo considerare l'intersezione e l'unione di H e K. L'intersezione $H \cap K$ consiste di quei vettori di V che appartengono sia ad H sia a K, mentre l'unione $H \cup K$ consiste di quei vettori di V che appartengono ad almeno uno dei due sottospazi.

Vale

$$H, K \text{ sottospazi vettoriali} \Rightarrow H \cap K \text{ sottospazio vettoriale}$$

infatti:

siano $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in H \cap K$ e sia $\lambda \in \mathbb{K}$. Poichè H e K sono sottospazi vettoriali si ha

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} &\in H \text{ e } \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in H \text{ e } \lambda\overrightarrow{u} \in H \\ \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} &\in K \text{ e } \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in K \text{ e } \lambda\overrightarrow{u} \in K \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{array}{l} \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in H \text{ e } \lambda\overrightarrow{u} \in H \\ \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in K \text{ e } \lambda\overrightarrow{u} \in K \end{array} \Rightarrow \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in H \cap K \text{ e } \lambda\overrightarrow{u} \in H \cap K$$

Esempio

Consideriamo nello spazio vettoriale $\mathbb{K}^{n,n}$ delle matrici quadrate di ordine n il sottospazio delle matrici simmetriche S ed il sottospazio delle matrici triangolari superiori T (verificare per esercizio che T è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^{n,n}$). L'insieme delle matrici diagonali $D = S \cap T$ è dunque un ulteriore esempio di sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^{n,n}$.

Osserviamo che, in generale, l'unione di due sottospazi vettoriali, invece, non è un sottospazio vettoriale, infatti:

Se consideriamo in $V = \mathbb{R}^2$ i due sottospazi vettoriali H e K così definiti

$$H = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\right\} \qquad K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\right\}$$

e consideriamo i vettori $\overrightarrow{v}(0, -3) \in H$ e $\overrightarrow{u}(5, 0) \in K$, questi appartengono ad $H \cup K$ e $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} = (5, -3)$ da cui

$$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \notin H \text{ e } \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \notin K \ \Rightarrow \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \notin H \cup K$$

Introduciamo a questo punto il concetto di *sottospazio somma*

Definizione 50 *Sia $(V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale e siano H e K due suoi sottospazi. Si definisce* ***sottospazio somma*** *$H + K$ l'insieme costituito dai vettori di V che si possono scrivere come somma di un vettore di H e di un vettore di K.*

$$H + K = \left\{ \overrightarrow{v} \in V \,\middle|\, \exists \overrightarrow{h} \in H, \exists \overrightarrow{k} \in K \text{ tali che } \overrightarrow{v} = \overrightarrow{h} + \overrightarrow{k} \right\}$$

$H + K$ è un sottospazio vettoriale di V infatti:

siano $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in H + K$ e sia $\lambda \in \mathbb{K}$. Per definizione si ha

$$\begin{aligned} \exists \overrightarrow{h} &\in H, \exists \overrightarrow{k} \in K \text{ tali che } \overrightarrow{u} = \overrightarrow{h} + \overrightarrow{k} \\ \exists \overrightarrow{h'} &\in H, \exists \overrightarrow{k'} \in K \text{ tali che } \overrightarrow{v} = \overrightarrow{h'} + \overrightarrow{k'} \end{aligned}$$

e quindi

$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \left(\overrightarrow{h} + \overrightarrow{k}\right) + \left(\overrightarrow{h'} + \overrightarrow{k'}\right) = \left(\overrightarrow{h} + \overrightarrow{h'}\right) + \left(\overrightarrow{k} + \overrightarrow{k'}\right)$ con $\overrightarrow{h} + \overrightarrow{h'} \in H$ e $\overrightarrow{k} + \overrightarrow{k'} \in K$

$\lambda\overrightarrow{u} = \lambda\left(\overrightarrow{h} + \overrightarrow{k}\right) = (\lambda\overrightarrow{h}) + (\lambda\overrightarrow{k})$ con $\lambda\overrightarrow{h} \in H$ e $\lambda\overrightarrow{k} \in K$.
Pertanto

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in H + K \text{ e } \lambda\overrightarrow{u} \in H + K$$

Posto $S = H + K$, se in S la decomposizione di ogni vettore come somma di un vettore di H e di un vettore di K è univocamente determinata, allora S si dice *somma diretta* di H e K e si scrive $S = H \oplus K$.

Nel caso in cui $H \oplus K = V$ allora i due sottospazi H e K si dicono *supplementari.*

Ad esempio se consideriamo $V = \mathbb{R}^2$ $H = assex$ e $K = assey$ si ha

$$\mathbb{R}^2 = assex \oplus assey$$

Proposizione 51 *Sia* $(V, +, \cdot)$ *uno spazio vettoriale e siano* H *e* K *due suoi sottospazi. Posto* $S = H + K$ *si ha:*

$$S = H \oplus K \Leftrightarrow S = H + K \text{ e } H \cap K = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$$

Dim. Sia $S = H \oplus K$, da ciò segue banalmente $S = H + K$. Ci resta da provare che $H \cap K = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$. Consideriamo allora un vettore $\overrightarrow{x} \in H \cap K$. Si ha $\overrightarrow{x} \in H$ e $\overrightarrow{x} \in K$ da cui

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0_H} + \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{0_K}$$

Poichè la somma tra H e K è diretta, la decomposizione del vettore $\overrightarrow{x}$ come somma di un vettore di H e di un vettore K deve essere unica e quindi $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

Viceversa supponiamo che $S = H + K$ e $H \cap K = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ e che si abbia

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{h} + \overrightarrow{k} = \overrightarrow{h'} + \overrightarrow{k'} \text{ con } \overrightarrow{h}, \overrightarrow{h'} \in H \text{ e } \overrightarrow{k}, \overrightarrow{k'} \in K$$

ora

$$\overrightarrow{h} + \overrightarrow{k} = \overrightarrow{h'} + \overrightarrow{k'} \Rightarrow \overrightarrow{h} - \overrightarrow{h'} = \overrightarrow{k'} - \overrightarrow{k} \in H \cap K$$

da cui $\overrightarrow{h} - \overrightarrow{h'} = \overrightarrow{k'} - \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$ e quindi $\overrightarrow{h} = \overrightarrow{h'}$ e $\overrightarrow{k'} = \overrightarrow{k}$, ossia la decomposizione è unica. ■

Il concetto di somma e di somma diretta si estende al caso di più sottospazi nel seguente modo:

$$\begin{aligned} H_1 + ... + H_r \quad &: \quad = \left\{\overrightarrow{x} \in V \middle| \exists\overrightarrow{h_i} \in H_i \text{ tale che } \overrightarrow{x} = \overrightarrow{h_1} + ... + \overrightarrow{h_r}\right\} \\ H_1 \oplus ... \oplus H_r \quad &: \quad = \left\{\overrightarrow{x} \in V \middle| \exists!\overrightarrow{h_i} \in H_i \text{ tale che } \overrightarrow{x} = \overrightarrow{h_1} + ... + \overrightarrow{h_r}\right\} \end{aligned}$$

Osserviamo che da $S = H_1 \oplus ... \oplus H_r$ segue $H_i \cap H_j = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ per ogni $i \neq j$ ma non vale il viceversa. (vedremo in seguito un controesempio)

3.2 Lineare dipendenza e indipendenza di vettori.

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

Definizione 52 *Si dice che un vettore $\overrightarrow{v} \in V$ è* ***combinazione lineare*** *dei vettori $\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_r \in V$ se esistono $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{K}$ tali che*

$$\overrightarrow{v} = \lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + ... + \lambda_r \overrightarrow{v}_r$$

Gli scalari $\lambda_1, ..., \lambda_r$ si dicono ***coefficienti della combinazione lineare****.*

Si osservi che la combinazione lineare si ottiene combinando le due operazioni fondamentali dello spazio vettoriale: la somma e il prodotto per uno scalare.

Esempi.

i) In $\mathbb{R}^3$ il vettore $\overrightarrow{v}(-5, 2, 3)$ è combinazione lineare dei vettori $\overrightarrow{v_1}(-1, 1, 0)$ e $\overrightarrow{v_2}(-1, 0, 1)$, infatti:

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ii) In $\mathbb{K}_2[t]$, spazio vettoriale dei polinomi di grado 2 a coefficienti in $\mathbb{K}$, il polinomio $(-1+2x)^2$ è combinazione lineare dei polinomi $1, x$ e x^2. Infatti:

$$(-1 + 2x)^2 = 1 - 4x + 4x^2$$

iii) Una matrice simmetrica di ordine 2 ha la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi ogni matrice simmetrica di ordine 2 è combinazione lineare delle 3 matrici simmetriche

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposizione 53 *La totalità delle combinazioni lineari degli r vettori $\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_r$ di V è un sottospazio vettoriale di V che si dice* ***sottospazio generato*** *da $\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_r$ e si indica con $\mathcal{L}(\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_r)$.*

Dim. Siano $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathcal{L}(\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_r)$ e sia $\alpha \in \mathbb{K}$. Per definizione di sottospazio generato si ha

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} &= \lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + ... + \lambda_r \overrightarrow{v}_r \\ \overrightarrow{v} &= \mu_1 \overrightarrow{v}_1 + ... + \mu_r \overrightarrow{v}_r \end{aligned}$$

da cui

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v} &= (\lambda_1\overrightarrow{v}_1+...+\lambda_r\overrightarrow{v}_r)+(\mu_1\overrightarrow{v}_1+...+\mu_r\overrightarrow{v}_r)= \\
&= (\lambda_1+\mu_1)\,\overrightarrow{v}_1+...+(\lambda_r+\mu_r)\,\overrightarrow{v}_r\in\mathcal{L}(\overrightarrow{v}_1,...,\overrightarrow{v}_r) \\
\alpha\overrightarrow{u} &= \alpha\,(\lambda_1\overrightarrow{v}_1+...+\lambda_r\overrightarrow{v}_r)=\alpha\lambda_1\overrightarrow{v}_1+...+\alpha\lambda_r\overrightarrow{v}_r\in\mathcal{L}(\overrightarrow{v}_1,...,\overrightarrow{v}_r)
\end{aligned}
$$

■

Definizione 54 *Si dice che $\overrightarrow{v}_1,...,\overrightarrow{v}_r$ generano H, o che sono un **insieme di generatori** di H, se H è il sottospazio di V generato da $\overrightarrow{v}_1,...,\overrightarrow{v}_r$.*

$$H=\mathcal{L}(\overrightarrow{v}_1,...,\overrightarrow{v}_r)$$

In altre parole, $\overrightarrow{v}_1,...,\overrightarrow{v}_r$ generano H se appartengono ad H ed ogni vettore di H è combinazione lineare di $\overrightarrow{v}_1,...,\overrightarrow{v}_r$.

Esempio.

Le 3 matrici simmetriche

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

generano il sottospazio delle matrici simmetriche di ordine 2.

Corollario 55 *Un vettore $\overrightarrow{u}$ è combinazione lineare di $\overrightarrow{v}_1,...,\overrightarrow{v}_r$ se e solo se $\mathcal{L}(\overrightarrow{v}_1,...,\overrightarrow{v}_r)=\mathcal{L}(\overrightarrow{v}_1,...,\overrightarrow{v}_r,\overrightarrow{u})$*

Dim. Sia $\overrightarrow{u}$ combinazione lineare di $\overrightarrow{v}_1,...,\overrightarrow{v}_r$, ossia

$$\overrightarrow{u}=\lambda_1\overrightarrow{v}_1+...+\lambda_r\overrightarrow{v}_r$$

vogliamo provare che $\mathcal{L}(\overrightarrow{v}_1,...,\overrightarrow{v}_r)=\mathcal{L}(\overrightarrow{v}_1,...,\overrightarrow{v}_r,\overrightarrow{u})$.

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{x} &\in \mathcal{L}(\overrightarrow{v}_1,...,\overrightarrow{v}_r)\Rightarrow\overrightarrow{x}=\mu_1\overrightarrow{v}_1+...+\mu_r\overrightarrow{v}_r=\mu_1\overrightarrow{v}_1+...+\mu_r\overrightarrow{v}_r+0\overrightarrow{u}\Rightarrow \\
&\Rightarrow \overrightarrow{x}\in\mathcal{L}(\overrightarrow{v}_1,...,\overrightarrow{v}_r,\overrightarrow{u})
\end{aligned}
$$

viceversa

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{x} &\in \mathcal{L}(\overrightarrow{v}_1,...,\overrightarrow{v}_r,\overrightarrow{u})\Rightarrow\overrightarrow{x}=\mu_1\overrightarrow{v}_1+...+\mu_r\overrightarrow{v}_r+\mu\overrightarrow{u}= \\
&= (\mu_1\overrightarrow{v}_1+...+\mu_r\overrightarrow{v}_r)+\mu\,(\lambda_1\overrightarrow{v}_1+...+\lambda_r\overrightarrow{v}_r)= \\
&= (\mu_1\overrightarrow{v}_1+...+\mu_r\overrightarrow{v}_r)+(\mu\lambda_1\overrightarrow{v}_1+...+\mu\lambda_r\overrightarrow{v}_r)= \\
&= (\mu_1+\mu\lambda_1)\overrightarrow{v}_1+...+(\mu_r+\mu\lambda_r)\overrightarrow{v}_r\in\mathcal{L}(\overrightarrow{v}_1,...,\overrightarrow{v}_r)
\end{aligned}
$$

Sia ora $\mathcal{L}(\overrightarrow{v}_1,...,\overrightarrow{v}_r)=\mathcal{L}(\overrightarrow{v}_1,...,\overrightarrow{v}_r,\overrightarrow{u})$, vogliamo provare che $\overrightarrow{u}$ è combinazione lineare di $\overrightarrow{v}_1,...,\overrightarrow{v}_r$. Sia $\overrightarrow{u}\in\mathcal{L}(\overrightarrow{v}_1,...,\overrightarrow{v}_r,\overrightarrow{u})$ e quindi $\overrightarrow{u}\in\mathcal{L}(\overrightarrow{v}_1,...,\overrightarrow{v}_r)$. Dalla definizione di $\mathcal{L}(\overrightarrow{v}_1,...,\overrightarrow{v}_r)$ segue che $\overrightarrow{u}=\lambda_1\overrightarrow{v}_1+...+\lambda_r\overrightarrow{v}_r$ per opportuni $\lambda_1,...,\lambda_r\in\mathbb{K}$. ■

Supponiamo di conoscere un insieme di generatori $\overrightarrow{v}_1,...,\overrightarrow{v}_r$ di un sottospazio H di V. Possiamo allora esprimere ogni vettore di H come combinazione lineare dei vettori $\overrightarrow{v}_1,...,\overrightarrow{v}_r$. Può accadere però che uno stesso vettore

$\overrightarrow{v}$ si esprima come combinazione lineare dei vettori $\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_r$ in due modi distinti.

Ad esempio sia $V = \mathbb{R}^2$ e sia $H = \mathcal{L}(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)$ con $\overrightarrow{v}_1 = (-1, 3)$ e $\overrightarrow{v}_2 = (3, -9)$. Se $\overrightarrow{v} = (-5, 15)$ allora

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 15 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$$

ma anche

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 15 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Questo problema si pone perchè $\overrightarrow{v}_2 = -3\overrightarrow{v}_1$, ossia tra i due vettori intercorre la relazione lineare

$$\overrightarrow{v}_2 + 3\overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{0}$$

Poniamo allora la seguente definizione:

Definizione 56 *I vettori $\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_r$ si dicono **linearmente dipendenti** se esistono $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{K}$ non tutti nulli tali che $\lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + ... + \lambda_r \overrightarrow{v}_r = \overrightarrow{0}$. I vettori $\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_r$ si dicono **linearmente indipendenti** se non sono linearmente dipendenti.*

Si osservi che $\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_r$ sono linearmente indipendenti se e solo se

$$\lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + ... + \lambda_r \overrightarrow{v}_r = \overrightarrow{0} \Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_r = 0$$

Questo significa che tra i vettori $\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_r$ non c'è alcuna relazione lineare, tranne quella banale con $\lambda_1 = ... = \lambda_r = 0$.

I vettori $\overrightarrow{v}_1 = (-1, 3)$, $\overrightarrow{v}_2 = (3, -9)$ dell'esempio precedente, ad esempio, sono linearmente dipendenti perchè tra i due vettori intercorre la relazione lineare non banale

$$\overrightarrow{v}_2 + 3\overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{0}$$

I concetti introdotti in questo paragrafo possono essere generalizzati ad un insieme infinito di vettori nel seguente modo:

Sia I un insieme non vuoto, anche infinito, e $\{\overrightarrow{v}_i\}_{i \in I}$ un sottoinsieme di vettori di V.

Si dice che $\overrightarrow{v} \in V$ è combinazione lineare di $\{\overrightarrow{v}_i\}$ se esiste un sottoinsieme finito $J \subset I$ ed un insieme $\{\lambda_j\}_{j \in J}$ di scalari di $\mathbb{K}$ tali che

$$\overrightarrow{v} = \sum_{j \in J} \lambda_j \overrightarrow{v}_j$$

Definizione 57 *Sia I un insieme non vuoto, anche infinito, e $\{\overrightarrow{v}_i\}_{i \in I}$ un sottoinsieme di vettori di V. L'insieme $\{\overrightarrow{v}_i\}_{i \in I}$ si dice **indipendente** se per ogni sottoinsieme finito J di I vale*

$$\sum_{j \in J} \lambda_j \overrightarrow{v}_j = \overrightarrow{0} \Rightarrow \lambda_j = 0 \quad \forall j \in J$$

3.3 Basi e dimensione.

In questo paragrafo introduciamo il concetto fondamentale di *base* di uno spazio vettoriale: una base di uno spazio vettoriale svolge il ruolo del sistema di riferimento visto, ad esempio, nel piano euclideo. Fissata una base, infatti, è possibile identificare gli elementi di uno spazio vettoriale astratto mediante delle coordinate.

Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$.

Definizione 58 *V si dice **finitamente generato** se esiste un numero finito r di vettori $\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_r$ tali che $V = \mathcal{L}(\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_r)$.*

Definizione 59 *Si dice che una n-pla ordinata di vettori $\{\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_n\}$ di V costituisce una **base** di V se i vettori $\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_n$ verificano le seguenti condizioni:*

1. *generano V, ossia $V = \mathcal{L}(\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_n)$*
2. *sono linearmente indipendenti.*

Si ha quindi che, per stabilire se un insieme di n vettori costituisce una base di V, occorre verificare che siano soddisfatte la 1. e la 2.

Proposizione 60 *$\mathcal{B} = \{\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_n\}$ è una base di V se e solo se ogni vettore $\overrightarrow{x}$ di V si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori $\overrightarrow{v}_i$ di $\mathcal{B}$.*

Dim. Sia $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_n\}$ una base di V e $\overrightarrow{x}$ un generico vettore di V. Supponiamo per assurdo che sia

$$\begin{aligned} \overrightarrow{x} &= x_1 \overrightarrow{v}_1 + ... + x_n \overrightarrow{v}_n \\ \overrightarrow{x} &= x'_1 \overrightarrow{v}_1 + ... + x'_n \overrightarrow{v}_n \end{aligned}$$

per sottrazione si ottiene

$$\overrightarrow{0} = (x_1 - x'_1)\, \overrightarrow{v}_1 + ... + (x_n - x'_n)\, \overrightarrow{v}_n$$

I vettori $\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_n$, costituiscono una base di V e quindi sono linearmente indipendenti. Da ciò segue che

$$\overrightarrow{0} = (x_1 - x'_1)\, \overrightarrow{v}_1 + ... + (x_n - x'_n)\, \overrightarrow{v}_n \Rightarrow x_1 - x'_1 = ... = x_n - x'_n = 0$$

e quindi $x_1 = x'_1, ..., x_n = x'_n$.

Viceversa supponiamo che ogni vettore $\overrightarrow{x} \in V$ si scriva in modo unico come combinazione lineare dei vettori $\overrightarrow{v}_i \in \mathcal{B}$. Allora chiaramente si ha $\mathcal{L}(\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_n) = V$ inoltre $\lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + ... + \lambda_n \overrightarrow{v}_n = \overrightarrow{0}$ implica $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$ perchè altrimenti il vettore nullo sarebbe scritto in due modi diversi come combinazione lineare dei vettori $\overrightarrow{v}_i \in \mathcal{B}$. ■

Gli scalari $x_1, ..., x_n$ che esprimono il generico vettore $\overrightarrow{x}$ di V come combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{B}$, si dicono le *componenti* di $\overrightarrow{x}$ rispetto la base $\mathcal{B}$. Pertanto, fissata una base $\mathcal{B}$ di V, ad ogni elemento $\overrightarrow{x}$ di V resta associata una, ed una sola, n-pla ordinata di elementi appartenenti a $\mathbb{K}$, cioè un elemento $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ e viceversa ad ogni n-pla $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ resta associato uno, ed un solo, vettore $\overrightarrow{v}$ di V dato da $\overrightarrow{v} = \lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + ... + \lambda_n \overrightarrow{v}_n$.

Inoltre, siano $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in V$ con $\overrightarrow{x} = x_1 \overrightarrow{v}_1 + ... + x_n \overrightarrow{v}_n$ e $\overrightarrow{y} = y_1 \overrightarrow{v}_1 + ... + y_n \overrightarrow{v}_n$ se consideriamo il vettore somma $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$ ad esso resta associata in $\mathbb{K}^n$ l'n-pla $(x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$ infatti:

$$\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = (x_1 \overrightarrow{v}_1 + ... + x_n \overrightarrow{v}_n) + (y_1 \overrightarrow{v}_1 + ... + y_n \overrightarrow{v}_n) = (x_1 + y_1) \overrightarrow{v}_1 + ... + (x_n + y_n) \overrightarrow{v}_n$$

In modo analogo al vettore $\lambda \overrightarrow{x}$ resta associata l'n-pla $(\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$ di $\mathbb{K}^n$.

Fissata quindi una base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_n\}$ di V si può "identificare" V con $\mathbb{K}^n$.

$$\begin{array}{ccc} V & \to & \mathbb{K}^n \\ \overrightarrow{x} & \mapsto & (x_1, ..., x_n) \end{array}$$

con $\overrightarrow{x} = x_1 \overrightarrow{v}_1 + ... + x_n \overrightarrow{v}_n$.

Nel caso di uno spazio vettoriale che non sia finitamente generato la definizione di base si generalizza nel seguente modo:

Un sottoinsieme $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{v}_i\}_{i \in I}$ di V, che sia infinito, si dice base di V se è un insieme di generatori indipendente.

Se $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{v}_i\}_{i \in I}$ è base di V ed $\overrightarrow{x}$ è un generico vettore di V, allora esiste un sottoinsieme finito $J \subset I$ ed un insieme $\{\lambda_j\}_{j \in J}$ di scalari di $\mathbb{K}$ tali che

$$\overrightarrow{x} = \sum_{j \in J} \lambda_j \overrightarrow{v}_j$$

in modo unico.

Esempi.

i) In $\mathbb{K}^n$ i vettori

$$\overrightarrow{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, ... \overrightarrow{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \\ . \\ 1 \end{pmatrix}$$

formano una base di $\mathbb{K}^n$ detta *base canonica*. Il vettore $\overrightarrow{e}_i$ ha tutte le componenti nulle tranne la i-sima che è 1.

ii) Analogamente al caso di $\mathbb{K}^n$, anche lo spazio delle matrici $\mathbb{K}^{m,n}$ ha una base canonica, rispetto la quale le componenti di una matrice $A = (a_{ij})$ sono gli scalari a_{ij}. La base canonica di $\mathbb{K}^{m,n}$ è costituita dalle matrici E_{ij} che hanno l'elemento di posto (i, j) uguale ad uno e tutti gli altri elementi uguali a zero; in questo caso $\mathcal{B} = \{E_{ij}\}_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$ è composta da $m\times n$ matrici. Per esempio, la base canonica di $\mathbb{K}^{2,2}$ consiste delle 4 matrici

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \; E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \; E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

iii) Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{K}[t]$ dei polinomi nella variabile t a coefficienti in $\mathbb{K}$. L'insieme infinito $\mathcal{B} = \left\{1, t, t^2, ..., t^n, ...\right\}$ è una base di $\mathbb{K}[t]$, infatti:

sia $p(t) = a_{r_1}t^{r_1} + a_{r_2}t^{r_2} + ... + a_{r_s}t^{r_s}$ un generico polinomio di $\mathbb{K}[t]$. Allora esiste un sottoinsieme finito F di $\mathcal{B}$ con $F = \{t^{r_1}, t^{r_2}, ..., t^{r_s}\}$ tale che

$$p(t) = a_{r_1}t^{r_1} + a_{r_2}t^{r_2} + ... + a_{r_s}t^{r_s}$$

ossia $\mathcal{B}$ genera $\mathbb{K}[t]$. Per provare che $\mathcal{B}$ è indipendente consideriamo

$$a_{r_1}t^{r_1} + a_{r_2}t^{r_2} + ... + a_{r_s}t^{r_s} = 0 = 0t^{r_1} + 0t^{r_2} + ... + 0t^{r_s}$$

Per il principio di identità dei polinomi si ha

$$a_{r_1} = a_{r_2} = ... = a_{r_s} = 0$$

e quindi la tesi. La base $\mathcal{B} = \left\{1, t, t^2, ..., t^n, ...\right\}$ di $\mathbb{K}[t]$ è detta base canonica di $\mathbb{K}[t]$.

iv) L'insieme $\{A_1, A_2, A_3\}$ con

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è una base per il sottospazio delle matrici simmetrice di ordine 2 in quanto ogni matrice simmetrica S di ordine 2 si puo' scrivere in modo unico come combinazione lineare delle matrici A_i.

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ finitamente generato.

Teorema 61 *Se i vettori $\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p$ sono linearmente indipendenti ed appartengono al sottospazio $\mathcal{L}(\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_r)$ allora $p \le r$*

Dim. Poichè $\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_r$ generano $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_r)$, ogni vettore di $\mathcal{L}$ si scrive come combinazione di $\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_r$. In particolare si potrà scrivere

$$\overrightarrow{u}_1 = \lambda_1\overrightarrow{v}_1 + ... + \lambda_r\overrightarrow{v}_r$$

Almeno uno dei coefficienti $\lambda_1, ..., \lambda_r$ deve essere diverso da zero, altrimenti si avrebbe $\overrightarrow{u}_1 = \overrightarrow{0}$ (e di conseguenza $\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p$ sarebbero dipendenti). Siccome in un insieme di generatori l'ordine non conta, non è restrittivo supporre che sia $\lambda_1 \neq 0$. Allora segue che $\overrightarrow{v}_1$ è combinazione lineare di $\overrightarrow{u}_1$ e dei restanti

$\overrightarrow{v}_2, ..., \overrightarrow{v}_r$. In questo modo, per il corollario 32, abbiamo costruito un nuovo sistema di r generatori per $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{v}_2, ..., \overrightarrow{v}_r)$$

Ripetiamo il procedimento per $\overrightarrow{u}_2$. Poichè $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{v}_2, ..., \overrightarrow{v}_r$ generano $\mathcal{L}$, si potrà scrivere

$$\overrightarrow{u}_2 = \mu_1 \overrightarrow{u}_1 + \mu_2 \overrightarrow{v}_2 + \mu_3 \overrightarrow{v}_3 ... + \mu_r \overrightarrow{v}_r$$

Almeno uno dei coefficienti $\mu_2, ..., \mu_r$ deve essere diverso da zero, altrimenti si avrebbe $\overrightarrow{u}_2 = \mu_1 \overrightarrow{u}_1$ contro l'ipotesi di lineare indipendenza di $\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p$. Al solito non è restrittivo supporre $\mu_2 \neq 0$. Si ha allora che $\overrightarrow{v}_2$ è combinazione lineare di $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{v}_3, ..., \overrightarrow{v}_r$ e quindi abbiamo costruito un nuovo sistema di generatori di $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{v}_3, ..., \overrightarrow{v}_r)$$

Supponiamo ora, per assurdo, che sia $p > r$. Se seguiamo il procedimento descritto r volte, eliminiamo uno dopo l'altro tutti i $\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_r$ e troviamo alla fine un sistema di generatori per $\mathcal{L}$ costituito da $\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_r$:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, ..., \overrightarrow{u}_r)$$

Ma allora il vettore $\overrightarrow{u}_{r+1}$ è combinazione lineare di $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, ..., \overrightarrow{u}_r$ contro l'ipotesi di indipendenza lineare dei vettori $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, ..., \overrightarrow{u}_p$. ∎

Teorema 62 *Tutte le basi di V sono composte dallo stesso numero di vettori.*

Dim. Siano

$$\mathcal{B} = \{\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_n\} \text{ e } \mathcal{B}' = \{\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_m\}$$

due basi di V. Poichè $\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_m$ sono m vettori linearente indipendenti appartenenti a $V = \mathcal{L}(\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_n)$, per il teorema precedente, si ha $m \leq n$. Analogamente, $\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_n$ sono n vettori linearente indipendenti appartenenti a $V = \mathcal{L}(\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_m)$ da cui $n \leq m$ e quindi $n = m$. ∎

Definizione 63 *Se V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ finitamente generato, si definisce **dimensione** di V il numero n dei vettori che ne costituiscono una qualsiasi base.*

Si scrive $\dim V = n$ e si utilizza anche la notazione V_n per indicare uno spazio di dimensione n.

Si pone $\dim \left\{\overrightarrow{0}\right\} = 0$. Se lo spazio V non è finitamente generato si dice che V ha dimensione infinita.

Se $\dim V = n$ allora:

- n è il massimo numero di vettori linearmente indipendenti in V. (Segue dal Teorema 38).

- n è il minimo numero di generatori di V (Segue dal Teorema 38)

Sia H un sottospazio vettoriale di V, allora

$$\dim H \leq \dim V \text{ (Segue dal Teorema 38)}$$

Nel seguito considereremo per lo più spazi vettoriali di dimensione finita.

Teorema 64 ***della base incompleta***. *Se $\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p$ con $p < n$ sono vettori linearmente indipendenti di V_n, è possibile determinare altri $n - p$ vettori $\overrightarrow{v}_{p+1}, ..., \overrightarrow{v}_n$ di V_n tali che $\{\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p, \overrightarrow{v}_{p+1}, ..., \overrightarrow{v}_n\}$ sia una base di V_n.*

Dim. Sia $\{\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_n\}$ una base di V_n, da cui $V = \mathcal{L}(\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_n)$. Da $\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p \in V$ segue che $V = \mathcal{L}(\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p, \overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_n)$ per il Corollario 32. Applichiamo ora un metodo, detto degli *scarti successivi,* per scegliere gli $n - p$ vettori tra $\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_n$ da aggiungere a $\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p$. Consideriamo l'insieme $\{\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p, \overrightarrow{v}_1\}$

$$\text{se } \{\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p, \overrightarrow{v}_1\} \text{ è lin.dipendente allora scartiamo } \overrightarrow{v}_1$$

e ripartiamo da $\{\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p, \overrightarrow{v}_2, ..., \overrightarrow{v}_n\}$

$$\text{se } \{\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p, \overrightarrow{v}_1\} \text{ è lin.indipendente allora accettiamo } \overrightarrow{v}_1$$

e ripartiamo da $\{\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p, \overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_n\}$ esaminando la dipendenza lineare di $\overrightarrow{v}_2$ rispetto a $\{\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p, \overrightarrow{v}_1\}$. Un ripetuto uso del Corollario 32 conduce a

$$\mathcal{L}(\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p, \overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_n) = \mathcal{L}\left(\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p, \overrightarrow{v}_{i_1}, ..., \overrightarrow{v}_{i_{n-p}}\right)$$

con $1 \leq i_1, ..., i_{n-p} \leq n$. I vettori $\overrightarrow{v}_{i_1}, ..., \overrightarrow{v}_{i_{n-p}}$ sono i $\overrightarrow{v}_{p+1}, ..., \overrightarrow{v}_n$ vettori cercati.

Continuiamo con questo procedimento fino a quando avremo n vettori linearmente indipendenti. ■

Proposizione 65 ***Relazione di Grassmann***. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e siano H e K due suoi sottospazi. Allora*

$$\dim(H + K) = \dim H + \dim K - \dim H \cap K$$

Dim. Poichè $H \cap K$, H e K sono sottospazi vettoriali di uno spazio finitamente generato, essi avranno dimensione finita. Poniamo $\dim H \cap K = p$, $\dim H = h$ e $\dim K = k$. Sia $\{\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p\}$ una base di $H \cap K$ e quindi un insieme di vettori linearmente indipendenti sia di H che di K, a partire da questa base costruiamo, applicando il teorema della base incompleta, una base $\{\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p, \overrightarrow{v}_{p+1}, ..., \overrightarrow{v}_h\}$ di H ed una base $\{\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p, \overrightarrow{w}_{p+1}, ..., \overrightarrow{w}_k\}$ di K. Se proviamo che $\{\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p, \overrightarrow{v}_{p+1}, ..., \overrightarrow{v}_h, \overrightarrow{w}_{p+1}, ..., \overrightarrow{w}_k\}$ è una base di $H + K$ avremo come conseguenza che

$$\dim(H + K) = p + (h - p) + (k - p) = h + k - p = \dim H + \dim K - \dim H \cap K$$

e quindi la tesi.

Ora $\{\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p, \overrightarrow{v}_{p+1}, ..., \overrightarrow{v}_h, \overrightarrow{w}_{p+1}, ..., \overrightarrow{w}_k\}$ è una base di $H + K$ se e solo se

1) $\{\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p, \overrightarrow{v}_{p+1}, ..., \overrightarrow{v}_h, \overrightarrow{w}_{p+1}, ..., \overrightarrow{w}_k\}$ generano $H + K$

2) $\{\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p, \overrightarrow{v}_{p+1}, ..., \overrightarrow{v}_h, \overrightarrow{w}_{p+1}, ..., \overrightarrow{w}_k\}$ sono linearmente indipendenti.

Proviamo la 1). Sia $\overrightarrow{x} \in H + K$, allora esistono $\overrightarrow{v} \in H$ e $\overrightarrow{w} \in K$ tali che $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$. Se $\overrightarrow{v} \in H$ allora $\overrightarrow{v} = \alpha_1 \overrightarrow{u}_1 + ... + \alpha_p \overrightarrow{u}_p + \alpha_{p+1} \overrightarrow{v}_{p+1} + ... + \alpha_h \overrightarrow{v}_h$ e analogamente da $\overrightarrow{w} \in K$ segue $\overrightarrow{w} = \beta_1 \overrightarrow{u}_1 + ... + \beta_p \overrightarrow{u}_p + \beta_{p+1} \overrightarrow{w}_{p+1} + ... + \beta_k \overrightarrow{w}_k$ e

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = (\alpha_1 \overrightarrow{u}_1 + ... + \alpha_p \overrightarrow{u}_p + \alpha_{p+1} \overrightarrow{v}_{p+1} + ... + \alpha_h \overrightarrow{v}_h) +$$
$$+ \left(\beta_1 \overrightarrow{u}_1 + ... + \beta_p \overrightarrow{u}_p + \beta_{p+1} \overrightarrow{w}_{p+1} + ... + \beta_k \overrightarrow{w}_k\right) =$$
$$= (\alpha_1 + \beta_1) \overrightarrow{u}_1 + ... + (\alpha_p + \beta_p) \overrightarrow{u}_p + \alpha_{p+1} \overrightarrow{v}_{p+1} + ... + \alpha_h \overrightarrow{v}_h + \beta_{p+1} \overrightarrow{w}_{p+1} + ... + \beta_k \overrightarrow{w}_k$$

ossia $\overrightarrow{x} \in \mathcal{L}(\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p, \overrightarrow{v}_{p+1}, ..., \overrightarrow{v}_h, \overrightarrow{w}_{p+1}, ..., \overrightarrow{w}_k)$

Proviamo la 2). Consideriamo

$$\alpha_1 \overrightarrow{u}_1 + ... + \alpha_p \overrightarrow{u}_p + \alpha_{p+1} \overrightarrow{v}_{p+1} + ... + \alpha_h \overrightarrow{v}_h + \beta_{p+1} \overrightarrow{w}_{p+1} + ... + \beta_k \overrightarrow{w}_k = \overrightarrow{0}$$

Vogliamo provare che tutti i coefficienti della combinazione lineare sono nulli.

$$\alpha_1 \overrightarrow{u}_1 + ... + \alpha_p \overrightarrow{u}_p + \alpha_{p+1} \overrightarrow{v}_{p+1} + ... + \alpha_h \overrightarrow{v}_h + \beta_{p+1} \overrightarrow{w}_{p+1} + ... + \beta_k \overrightarrow{w}_k = \overrightarrow{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \overrightarrow{u}_1 + ... + \alpha_p \overrightarrow{u}_p + \alpha_{p+1} \overrightarrow{v}_{p+1} + ... + \alpha_h \overrightarrow{v}_h = -\beta_{p+1} \overrightarrow{w}_{p+1} - ... - \beta_k \overrightarrow{w}_k$$

Posto $-\beta_{p+1} \overrightarrow{w}_{p+1} - ... - \beta_k \overrightarrow{w}_k = \overrightarrow{w}$ si ottiene che $\overrightarrow{w}$ appartiene a K ed essendo uguale ad un vettore di H, appartiene anche ad H, allora $\overrightarrow{w} \in H \cap K$ da cui

$$\overrightarrow{w} = \beta_1 \overrightarrow{u}_1 + ... + \beta_p \overrightarrow{u}_p$$

e quindi

$$-\beta_{p+1} \overrightarrow{w}_{p+1} - ... - \beta_k \overrightarrow{w}_k = \beta_1 \overrightarrow{u}_1 + ... + \beta_p \overrightarrow{u}_p$$

ossia

$$\beta_1 \overrightarrow{u}_1 + ... + \beta_p \overrightarrow{u}_p + \beta_{p+1} \overrightarrow{w}_{p+1} + ... + \beta_k \overrightarrow{w}_k = \overrightarrow{0}$$

Poichè i vettori $\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p, \overrightarrow{w}_{p+1}, ..., \overrightarrow{w}_k$ costituiscono una base di K, essi sono linearmente indipendenti e quindi se una loro combinazione lineare è nulla segue che $\beta_1 = ... = \beta_k = 0$. Tornando alla combinazione lineare di partenza

$$\alpha_1 \overrightarrow{u}_1 + ... + \alpha_p \overrightarrow{u}_p + \alpha_{p+1} \overrightarrow{v}_{p+1} + ... + \alpha_h \overrightarrow{v}_h + \beta_{p+1} \overrightarrow{w}_{p+1} + ... + \beta_k \overrightarrow{w}_k = \overrightarrow{0}$$

si ha

$$\alpha_1 \overrightarrow{u}_1 + ... + \alpha_p \overrightarrow{u}_p + \alpha_{p+1} \overrightarrow{v}_{p+1} + ... + \alpha_h \overrightarrow{v}_h = \overrightarrow{0}$$

Analogamente i vettori $\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p, \overrightarrow{v}_{p+1}, ..., \overrightarrow{v}_h$ costituiscono una base di H e quindi sono linearmente indipendenti. Segue allora $\alpha_1 = ... = \alpha_h = 0$ e quindi la tesi. ■

3.3.1 Rango di una matrice.

Siano $\overrightarrow{r}_1 = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n})$, $\overrightarrow{r}_2 = (a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n})$, ..., $\overrightarrow{r}_m = (a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mn})$ m vettori di $\mathbb{K}^n$; essi individuano una matrice $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ di cui costituiscono le righe, ossia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$$

le cui colonne $\overrightarrow{c}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ . \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ . \\ . \\ a_{m2} \end{pmatrix}$, ..., $\overrightarrow{c}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ . \\ . \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ sono n vettori di $\mathbb{K}^m$.

Teorema 66 *Il massimo numero di vettori riga linearmente indipendenti di una matrice A coincide con il massimo numero di vettori colonna linearmente indipendenti.*

La dimostrazione del teorema consiste nel far vedere che il massimo numero p di vettori riga linearmente indipendenti di A non supera il massimo numero q di vettori colonna linearmente indipendenti e viceversa.

Poniamoci nel caso particolare $p = 2$ e $A \in \mathbb{K}^{3,4}$ e proviamo ad esempio che $q \leq p$. Consideriamo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

e supponiamo che $\overrightarrow{r}_1$ e $\overrightarrow{r}_2$ siano linearmente indipendenti mentre

$$\overrightarrow{r}_3 = \lambda \overrightarrow{r}_1 + \mu \overrightarrow{r}_2$$

ossia

$$a_{31} = \lambda a_{11} + \mu a_{21} \quad a_{32} = \lambda a_{12} + \mu a_{22} \quad a_{33} = \lambda a_{13} + \mu a_{23} \quad a_{34} = \lambda a_{14} + \mu a_{24}$$

da cui

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \lambda a_{11} + \mu a_{21} & \lambda a_{12} + \mu a_{22} & \lambda a_{13} + \mu a_{23} & \lambda a_{14} + \mu a_{24} \end{pmatrix}$$

ossia

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \mu \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = a_{12}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \mu \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = a_{13}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} + a_{23}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \mu \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix} = a_{14}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} + a_{24}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \mu \end{pmatrix}$$

cioè i quattro vettori colonna di A sono combinazione lineare dei due vettori colonna

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \mu \end{pmatrix}$$

e quindi il massimo numero q dei vettori colonna $\overrightarrow{c}_1, \overrightarrow{c}_2, \overrightarrow{c}_3, \overrightarrow{c}_4$ di A linearmente indipendenti non è superiore a 2.

Dato il Teorema precedente si può introdurre la seguente

Definizione 67 *Si definisce rango di una matrice A di tipo (m, n) e si indica con rgA, il massimo numero di vettori riga $\overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{r}_2, ..., \overrightarrow{r}_m$ o colonna $\overrightarrow{c}_1, \overrightarrow{c}_2, ..., \overrightarrow{c}_n$ della matrice A linearmente indipendenti.*

Possiamo quindi dire che

$$rg(A) = \dim \mathcal{L}\left(\overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{r}_2, ..., \overrightarrow{r}_m\right) = \dim \mathcal{L}\left(\overrightarrow{c}_1, \overrightarrow{c}_2, ..., \overrightarrow{c}_n\right)$$

Osservazione. Si può provare che la definizione precedente è equivalente a quella data nel Capitolo 1 in cui il rango di una matrice è stato introdotto come l'ordine massimo dei minori estraibili da A con determinante non nullo. In effetti, se nella matrice A il massimo numero di righe o colonne linearmente indipendenti è p, allora in ogni minore di ordine maggiore di p esistono righe o colonne che sono combinazioni lineari delle altre e quindi il minore ha determinante nullo. Invece, considerate p righe (o p colonne) linearmente indipendenti è possibile provare che almeno uno dei minori che intersecano le p righe (o le p colonne) ha determinante diverso da zero.

3.4 Funzioni tra spazi vettoriali.

In questo paragrafo andiamo a considerare un particolare tipo di funzioni tra due spazi vettoriali, le *Appicazioni Lineari*, ossia applicazioni che conservano le operazioni di somma e prodotto e dunque conservano la struttura di spazio vettoriale.

Siano V e W due spazi vettoriali sullo stesso campo $\mathbb{K}$ e sia $f : V \to W$ un'applicazione.

Se U è un sottoinsieme di V chiamiamo *immagine di U tramite f* l'insieme

$$f(U) := \{f(\overrightarrow{x}) \mid \overrightarrow{x} \in U\} = \{\overrightarrow{y} \in W \mid \exists \overrightarrow{x} \in U : f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{y}\}$$

Se Z è un sottoinsieme di W chiamiamo *immagine inversa di Z tramite f* l'insieme

$$f^{-1}(Z) := \{\overrightarrow{x} \in V \mid f(\overrightarrow{x}) \in Z\}$$

In particolare se $Z = \{\overrightarrow{y}\}$ allora $f^{-1}(\overrightarrow{y}) := \{\overrightarrow{x} \in V \mid f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{y}\}$ e l'immagine inversa di $\overrightarrow{y}$ non si riduce all'insieme vuoto se e solo se $\overrightarrow{y} \in f(V)$.

Definizione 68 *Siano V e W due spazi vettoriali sullo stesso campo $\mathbb{K}$ e sia $f : V \to W$ un'applicazione. Si dice che f è* ***lineare*** *o un* ***omomorfismo*** *se*

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{x'}) &= f(\overrightarrow{x}) + f(\overrightarrow{x'}) \qquad \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x'} \in V \\ f(\lambda \overrightarrow{x}) &= \lambda f(\overrightarrow{x}) \qquad \forall \overrightarrow{x} \in V \ \text{e} \ \forall \lambda \in \mathbb{K} \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$f(\lambda \overrightarrow{x} + \mu \overrightarrow{x'}) = \lambda f(\overrightarrow{x}) + \mu f(\overrightarrow{x'}) \qquad \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x'} \in V \quad \text{e} \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

Dalla definizione segue che $f(\overrightarrow{0}_V) = \overrightarrow{0}_W$ infatti:

$$\overrightarrow{0}_V = \overrightarrow{x} - \overrightarrow{x} \Rightarrow f(\overrightarrow{0}_V) = f(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x})$$

per la linearità di f si ha $f(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x}) - f(\overrightarrow{x})$ e quindi

$$f(\overrightarrow{0}_V) = f(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x}) - f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}_W$$

Se $V = W$ allora l'applicazione lineare $f : V \to V$ è detta *endomorfismo*. Un endomorfismo notevole è l'applicazione identità o identica.

$$I : V \to V$$

$$\overrightarrow{x} \mapsto I(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}$$

Osservazione.

L'insieme delle applicazioni lineari

$$Lin(V, W) = \{f : V \to W \,|f \ \ \text{lineare}\}$$

è uno spazio vettoriale rispetto le seguenti operazioni

$$\begin{array}{ccc} \forall f, g \in Lin(V, W) & (f+g)(\overrightarrow{x}) := f(\overrightarrow{x}) + g(\overrightarrow{x}) & \forall \overrightarrow{x} \in V \\ \forall f \in Lin(V, W) \text{ e } \forall \lambda \in \mathbb{K} & (\lambda f)(\overrightarrow{x}) := \lambda f(\overrightarrow{x}) & \forall \overrightarrow{x} \in V \end{array}$$

Vale la seguente proposizione

Proposizione 69 *Siano V e W spazi vettoriali con V finitamente generato. Sia $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_n\}$ una base di V e siano $\overrightarrow{w}_1, ..., \overrightarrow{w}_n \in W$. Allora esiste un'unica applicazione lineare $f : V \to W$ tale che $f(\overrightarrow{v}_i) = \overrightarrow{w}_i$ per $i = 1, ..., n$.*

Dim. Sia $\overrightarrow{x} \in V$ allora $\overrightarrow{x} = x_1 \overrightarrow{v}_1 + ... + x_n \overrightarrow{v}_n$. Poniamo

$$f(\overrightarrow{x}) := x_1 \overrightarrow{w}_1 + ... + x_n \overrightarrow{w}_n$$

e quindi $f(\overrightarrow{v}_i) = \overrightarrow{w}_i$ per $i = 1, ..., n$.

- f è lineare, infatti:

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{x'}) &= f((x_1 + x_1')\overrightarrow{v}_1 + ... + (x_n + x_n')\overrightarrow{v}_n) = (x_1 + x_1')\overrightarrow{w}_1 + ... + (x_n + x_n')\overrightarrow{w}_n = \\ &= (x_1 \overrightarrow{w}_1 + ... + x_n \overrightarrow{w}_n) + (x_1' \overrightarrow{w}_1 + ... + x_n' \overrightarrow{w}_n) = f(\overrightarrow{x}) + f(\overrightarrow{x'}) \end{aligned}$$

analogamente si verifica la linearità rispetto al prodotto per uno scalare.

- f è unica, infatti:

supponiamo che esista

$$g : V \to W \text{ tale che } g(\overrightarrow{v}_i) = \overrightarrow{w}_i \text{ per } i = 1, ..., n$$

allora per ogni $\overrightarrow{x} \in V$ si ha

$$f(\overrightarrow{x}) - g(\overrightarrow{x}) = x_1 f(\overrightarrow{v}_1) + ... + x_n f(\overrightarrow{v}_n) - (x_1 g(\overrightarrow{v}_1) + ... + x_n g(\overrightarrow{v}_n)) =$$

$$= x_1 \overrightarrow{w}_1 + ... + x_n \overrightarrow{w}_n - x_1 \overrightarrow{w}_1 - ... - x_n \overrightarrow{w}_n = \overrightarrow{0}$$

ossia $f(\overrightarrow{x}) = g(\overrightarrow{x})$ per ogni $\overrightarrow{x} \in V$ da cui $f = g$. ■

Osservazione.

In generale per conoscere un'applicazione $f : V \to W$ è necessario conoscere $f(\overrightarrow{x})$ per ogni $\overrightarrow{x} \in V$, se invece l'applicazione f è lineare allora è sufficiente conoscere l'immagine di un numero finito di vettori, infatti:

sia $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_n\}$ una base di V e sia $\overrightarrow{x} = x_1 \overrightarrow{v}_1 + ... + x_n \overrightarrow{v}_n$ un generico vettore di V, allora

$$f(\overrightarrow{x}) = f(x_1 \overrightarrow{v}_1 + ... + x_n \overrightarrow{v}_n) = x_1 f(\overrightarrow{v}_1) + ... + x_n f(\overrightarrow{v}_n)$$

per la linearità di f. Quindi dalla conoscenza dell'immagine degli n vettori della base $\mathcal{B}$ si ricava l'immagine di un qualsiasi vettore $\overrightarrow{x}$ dello spazio V.

Un'altra notevole proprietà delle applicazioni lineari è data dalla seguente

Proposizione 70 *Siano V e W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ ed $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora*

$$\begin{aligned} S \textit{ sottospazio di } V &\Rightarrow f(S) \textit{ sottospazio di } W \\ T \textit{ sottospazio di } W &\Rightarrow f^{-1}(T) \textit{ sottospazio di } V \end{aligned}$$

Dim. Sia S sottospazio di V e siano $\overrightarrow{y}, \overrightarrow{y'} \in f(S)$ tali che $f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{y}$ e $f(\overrightarrow{x'}) = \overrightarrow{y'}$ con $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x'} \in S$

$$\overrightarrow{y} + \overrightarrow{y'} = f(\overrightarrow{x}) + f(\overrightarrow{x'}) = f(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{x'}) \in f(S)$$

essendo $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{x'}$ un vettore di S. Analogamente si ha

$$\lambda \overrightarrow{y} = \lambda f(\overrightarrow{x}) = f(\lambda \overrightarrow{x}) \in f(S)$$

essendo $\lambda \overrightarrow{x}$ un vettore di S.

Sia T sottospazio di W e siano $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x'} \in f^{-1}(T)$, allora

$$f(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{x'}) = f(\overrightarrow{x}) + f(\overrightarrow{x'}) \in T$$

essendo $f(\overrightarrow{x})$, $f(\overrightarrow{x'}) \in T$ per definizione di immagine inversa. Da ciò segue $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{x'} \in f^{-1}(T)$.

Analogamente sia $\overrightarrow{x} \in f^{-1}(T)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ si ha

$$f(\lambda \overrightarrow{x}) = \lambda f(\overrightarrow{x}) \in T$$

essendo $f(\overrightarrow{x}) \in T$. Da ciò segue $\lambda \overrightarrow{x} \in f^{-1}(T)$. ■

Tra tutti i sottospazi di V e W ne esistono due particolarmente significativi.

Definizione 71 *Si chiama **nucleo** di f, e si indica con $\ker f$, il sottoinsieme dei vettori $\overrightarrow{x}$ di V tali che*

$$f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}_W$$

Ossia

$$\ker f = f^{-1}(\overrightarrow{0}_W)$$

Segue che $\ker f$ non è vuoto in quanto contiene almeno il vettore nullo di V ed inoltre è un sottospazio vettoriale di V.

Definizione 72 *Se il nucleo dell'applicazione lineare f ha dimensione finita, tale dimensione si dice **nullità** di f e si indica con $nl(f)$.*

Definizione 73 *Si chiama **immagine** di f, e si indica con $\operatorname{Im} f$, il sottoinsieme*

$$\operatorname{Im} f = \{\overrightarrow{y} \in W \mid \exists \overrightarrow{x} \in V : f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{y}\} = f(V)$$

Segue che $\operatorname{Im} f$ è un sottospazio vettoriale di W.

Proposizione 74 *Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare e siano $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x'} \in V$. Allora*

$$f(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x'}) \Leftrightarrow \overrightarrow{x} - \overrightarrow{x'} \in \ker f$$

$$f(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x'}) \Leftrightarrow f(\overrightarrow{x}) - f(\overrightarrow{x'}) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow f(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x'}) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{x} - \overrightarrow{x'} \in \ker f$$

Da ciò segue che f è iniettiva se e solo se $\ker f = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$, infatti:

Sia f iniettiva e sia $\overrightarrow{x} \in \ker f$.

$$\overrightarrow{x} \in \ker f \Rightarrow f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0} = f(\overrightarrow{0}) \Rightarrow \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$$

Viceversa sia $\ker f = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ e sia $f(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x'})$. Dalla proposizione precedente segue $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x'} \in \ker f$ con $\ker f = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ ossia $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x'}$ e quindi f è iniettiva.

Osserviamo che se $f : V \to W$ è un'applicazione lineare allora

$$f \text{ è suriettiva } \Leftrightarrow \operatorname{Im} f = W$$

Lemma 75 *Siano V e W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ ed $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Allora*

$$U = \mathcal{L}(\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_h) \Rightarrow f(U) = \mathcal{L}(f(\overrightarrow{u}_1), ..., f(\overrightarrow{u}_h))$$

La dimostrazione del Lemma è lasciata per esercizio.

Dal Lemma precedente segue che se $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_n\}$ è una base di V allora $f(V) = \operatorname{Im} f = \mathcal{L}(f(\overrightarrow{v}_1), ..., f(\overrightarrow{v}_n))$ da cui $\dim \operatorname{Im} f \leq \dim V$ e, in particolare,

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim V \Leftrightarrow f \text{ è iniettiva.}$$

Infatti:

se f è iniettiva

$$\lambda_1 f(\overrightarrow{v}_1) + ... + \lambda_n f(\overrightarrow{v}_n) = \overrightarrow{0} \Rightarrow f(\lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + ... + \lambda_n \overrightarrow{v}_n) = f(\overrightarrow{0}) \Rightarrow \lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + ... + \lambda_n \overrightarrow{v}_n = \overrightarrow{0}$$

Poichè $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_n\}$ è una base di V, si ha $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$ da cui segue che $f(\overrightarrow{v}_1), ..., f(\overrightarrow{v}_n)$ sono linearmente indipendenti, ossia $\dim \operatorname{Im} f = n = \dim V$.

Viceversa sia $\dim \operatorname{Im} f = n$ e sia $\overrightarrow{x} \in \ker f$ con $\overrightarrow{x} = \lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + ... + \lambda_n \overrightarrow{v}_n$. Allora

$$f(\overrightarrow{x}) = f(\lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + ... + \lambda_n \overrightarrow{v}_n) = \lambda_1 f(\overrightarrow{v}_1) + ... + \lambda_n f(\overrightarrow{v}_n) = \overrightarrow{0}$$

ma

$$\lambda_1 f(\overrightarrow{v}_1) + ... + \lambda_n f(\overrightarrow{v}_n) = \overrightarrow{0} \Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$$

per la lineare indipendenza dei vettori $f(\overrightarrow{v}_1), ..., f(\overrightarrow{v}_n)$ e quindi $\overrightarrow{x} = \lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + ... + \lambda_n \overrightarrow{v}_n = \overrightarrow{0}$. Per l'arbitrarietà della scelta di $\overrightarrow{x}$ si ha che $\ker f = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ ossia f è iniettiva.

Teorema 76 ***(Teorema Fondamentale)*** *Siano V e W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ con V finitamente generato. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare, allora*

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V$$

Dim. Sia $\{\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n\}$ una base di V. La tesi è immediata nel caso in cui $\ker f = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ perchè abbiamo provato che questo equivale a dire che $\dim \operatorname{Im} f = \dim V$. La tesi è altrettanto immediata nel caso in cui $\ker f = V$ perchè in questo caso f è l'applicazione nulla e quindi $\operatorname{Im} f = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

Consideriamo quindi gli altri casi. Sia $\{\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p\}$ una base di $\ker f$ con $0 < p < n$. Abbiamo già osservato che $\dim \operatorname{Im} f \leq \dim V$, sia quindi $\{\overrightarrow{w}_1, ..., \overrightarrow{w}_q\}$ una base di $\operatorname{Im} f$ con $0 < q < n$. Inoltre per ogni $i = 1, ..., q$ esiste $\overrightarrow{v}_i \in V$ tale che $f(\overrightarrow{v}_i) = \overrightarrow{w}_i$. Se proviamo che $\{\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p, \overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_q\}$ è una base di V, abbiamo che

$$\dim V = p + q = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$$

ossia la tesi.

1) $\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p, \overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_q$ generano V.

Sia $\overrightarrow{x} \in V$, allora $f(\overrightarrow{x}) \in \operatorname{Im} V$

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{x}) &\in \operatorname{Im} V \Rightarrow f(\overrightarrow{x}) = \lambda_1 \overrightarrow{w}_1 + ... + \lambda_q \overrightarrow{w}_q = \lambda_1 f(\overrightarrow{v}_1) + ... + \lambda_q f(\overrightarrow{v}_q) = \\ &= f(\lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + ... + \lambda_q \overrightarrow{v}_q) \end{aligned}$$

da ciò segue

$$\overrightarrow{x} - \lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + ... + \lambda_q \overrightarrow{v}_q \in \ker f$$

e quindi

$$\overrightarrow{x} = \lambda_1 \overrightarrow{v}_1 + ... + \lambda_q \overrightarrow{v}_q + \mu_1 \overrightarrow{u}_1 + ... + \mu_p \overrightarrow{u}_p$$

2) $\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p, \overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_q$ sono linearmente indipendenti.

Consideriamo una loro combinazione lineare nulla

$$\alpha_1 \overrightarrow{u}_1 + ... + \alpha_p \overrightarrow{u}_p + \beta_1 \overrightarrow{v}_1 + ... + \beta_q \overrightarrow{v}_q = \overrightarrow{0}$$

da cui

$$f(\alpha_1 \overrightarrow{u}_1 + ... + \alpha_p \overrightarrow{u}_p + \beta_1 \overrightarrow{v}_1 + ... + \beta_q \overrightarrow{v}_q) = f(\overrightarrow{0})$$

ossia

$$\alpha_1 f(\overrightarrow{u}_1) + ... + \alpha_p f(\overrightarrow{u}_p) + \beta_1 f(\overrightarrow{v}_1) + ... + \beta_q f(\overrightarrow{v}_q) = \overrightarrow{0}$$

con $f(\overrightarrow{u}_j) = \overrightarrow{0}$ per ogni $j = 1, ..., p$, essendo $\overrightarrow{u}_j \in \ker f$, ed $f(\overrightarrow{v}_i) = \overrightarrow{w}_i$ per ogni $i = 1, ..., q$. Ne segue

$$\beta_1 f(\overrightarrow{v}_1) + ... + \beta_q f(\overrightarrow{v}_q) = \beta_1 \overrightarrow{w}_1 + ... + \beta_q \overrightarrow{w}_q = \overrightarrow{0}$$

da cui segue $\beta_i = 0$ per ogni $i = 1, ..., q$ per la lineare indipendenza dei vettori $\overrightarrow{w}_i$. Quindi

$$\alpha_1 \overrightarrow{u}_1 + ... + \alpha_p \overrightarrow{u}_p + \beta_1 \overrightarrow{v}_1 + ... + \beta_q \overrightarrow{v}_q = \alpha_1 \overrightarrow{u}_1 + ... + \alpha_p \overrightarrow{u}_p = \overrightarrow{0}$$

da cui segue $\alpha_j = 0$ per ogni $j = 1, ..., p$ per la lineare indipendenza dei vettori $\overrightarrow{u}_j$. La lineare indipendenza dei vettori $\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_p, \overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_q$ è provata. ■

Definizione 77 *Si dice* ***rango*** *di un'applicazione lineare f di uno spazio vettoriale di dimensione finita V in uno spazio vettoriale W, che si indica con $rg(f)$, la dimensione di* $\operatorname{Im} f$.

Il Teorema che abbiamo appena dimostrato mette in relazione il rango di f con la sua nullità, per questo motivo è noto anche con il nome di *Teorema del Rango*.

3.4.1 Isomorfismi.

Definizione 78 *Siano V e W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$. Se $f : V \to W$ è un'applicazione lineare e biunivoca allora f si dice* ***isomorfismo***.

Se f è un'applicazione biettiva tra spazi vettoriali distinti V e W, l'applicazione inversa f^{-1} è l'unica applicazione di W in V tale che

$$f^{-1} \circ f = Id_V \qquad f \circ f^{-1} = Id_W$$

dove Id_V e Id_W indicano l'applicazione identica nei relativi spazi.

Proposizione 79 *Se f è un isomorfismo da V in W allora anche f^{-1} è un isomorfismo da W in V.*

Dim. Ovviamente f^{-1} è invertibile e la sua applicazione inversa è f. Dobbiamo allora provare che f^{-1} è lineare, ossia che $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ e $\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in V$

$$f^{-1}(\lambda \overrightarrow{x} + \mu \overrightarrow{y}) = \lambda f^{-1}(\overrightarrow{x}) + \mu f^{-1}(\overrightarrow{y})$$

Poichè f è iniettiva, i due membri dell'uguaglianza precedente sono uguali se lo sono le loro immagini mediante f. Ora banalmente

$$f\left(f^{-1}(\lambda \overrightarrow{x} + \mu \overrightarrow{y})\right) = \lambda \overrightarrow{x} + \mu \overrightarrow{y}$$

e per la linearità di f

$$f(\lambda f^{-1}(\overrightarrow{x}) + \mu f^{-1}(\overrightarrow{y})) = \lambda f(f^{-1}(\overrightarrow{x})) + \mu f(f^{-1}(\overrightarrow{y})) = \lambda \overrightarrow{x} + \mu \overrightarrow{y}$$

da cui la tesi. ■

Definizione 80 *Due spazi vettoriali V e W si dicono* ***isomorfi****, in simboli $V \cong W$, se esiste un isomorfismo $f : V \to W$.*

Teorema 81 *Siano V e W spazi vettoriali di dimensione finita. Allora*

$$V \cong W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$$

Dim. Supponiamo sia $V \cong W$, allora esiste un isomorfismo $f : V \to W$. Dall'iniettività di f segue $\ker f = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ e dalla suriettività segue $\operatorname{Im} f = W$. Utilizzando il Teorema fondamentale si ha:

$$\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim W$$

Viceversa supponiamo sia $\dim V = \dim W = n$ e siano $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_n\}$ una base di V e $\mathcal{B}' = \{\overrightarrow{w}_1, ..., \overrightarrow{w}_n\}$ una base di W. Consideriamo un'applicazione lineare $f : V \to W$ tale che $f(\overrightarrow{v}_i) = \overrightarrow{w}_i$ per $i = 1, ..., n$. Per la proposizione 46 sappiamo che la funzione f è univocamente determinata, ci resta da provare che è biunivoca.

1) f è iniettiva.

Siano $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x'} \in V$ con $\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{v}_1 + ... + x_n\overrightarrow{v}_n$ e $\overrightarrow{x'} = x_1'\overrightarrow{v}_1 + ... + x_n'\overrightarrow{v}_n$. Se $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{x'}$ allora esistono x_i, x_i' con $x_i \neq x_i'$ per almeno un $1 \leq i \leq n$. Per la definizione di f si ha

$$f(\overrightarrow{x}) = x_1\overrightarrow{w}_1 + ... + x_n\overrightarrow{w}_n \quad \text{e} \quad f(\overrightarrow{x'}) = x_1'\overrightarrow{w}_1 + ... + x_n'\overrightarrow{w}_n$$

$$x_i \neq x_i' \Rightarrow x_1\overrightarrow{w}_1 + ... + x_n\overrightarrow{w}_n \neq x_1'\overrightarrow{w}_1 + ... + x_n'\overrightarrow{w}_n \Rightarrow f(\overrightarrow{x}) \neq f(\overrightarrow{x'})$$

e quindi la tesi.

2) f è suriettiva.

Sia $\overrightarrow{y} \in W$ con $\overrightarrow{y} = y_1\overrightarrow{w}_1 + ... + y_n\overrightarrow{w}_n$. Posto $\overrightarrow{x} = y_1\overrightarrow{v}_1 + ... + y_n\overrightarrow{v}_n$ si ha

$$f(\overrightarrow{x}) = y_1\overrightarrow{w}_1 + ... + y_n\overrightarrow{w}_n = \overrightarrow{y}$$

e quindi la tesi. ■

Esempi.

i) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{K}$, allora $V \cong \mathbb{K}^n$. Sia $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_n\}$ una base di V, l'isomorfismo tra V e $\mathbb{K}^n$ è quello che al generico vettore $\overrightarrow{x} \in V$ associa le sue coordinate $(x_1, ..., x_n)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

$$C_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{K}^n$$
$$\overrightarrow{x} \mapsto (x_1, ..., x_n)$$

ii) Lo spazio dei polinomi $\mathbb{K}_n[t] = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + ... + a_nt^n \mid a_i \in \mathbb{K}\}$ è isomorfo allo spazio vettoriale $\mathbb{K}^{n+1}$ tramite l'isomorfismo $p(t) \mapsto (a_0, ..., a_n)$

Se $V = W$ ed $f : V \to W$ è un'applicazione lineare e biunivoca allora f si dice **automorfismo**.

La totalità degli automorfismi di V, rispetto alla composizione tra applicazioni è un gruppo (in generale non commutativo) detto Gruppo Generale Lineare di V ed indicato con $GL(V)$.

3.5 Matrici ed Applicazioni Lineari.

Abbiamo fin qui affrontato lo studio delle *applicazioni lineari* tra spazi vettoriali. Nel caso in cui gli spazi vettoriali abbiano dimensione finita, vedremo come tali applicazioni possono essere rappresentate da matrici e le diverse operazioni tra applicazioni lineari sono tradotte nelle operazioni tra matrici studiate nel I capitolo.

Siano V e W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ con $\dim V = n$ e $\dim W = m$ e sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Fissiamo una base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n\}$ in V e una base $\mathcal{B}' = \left\{\overrightarrow{e'}_1, ..., \overrightarrow{e'}_m\right\}$ in W. Sia $\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{e}_1 + ... + x_n\overrightarrow{e}_n$ un qualunque vettore di V, per la linearità di f, abbiamo già visto che

$$f(\overrightarrow{x}) = x_1 f(\overrightarrow{e}_1) + ... + x_n f(\overrightarrow{e}_n)$$

e quindi conoscendo $f(\overrightarrow{e}_i)$ per ogni $i = 1, ..., n$ siamo in grado di calcolare l'immagine di un qualsiasi vettore di V. Ora $f(\overrightarrow{e}_1) \in W$ e quindi

$$f(\overrightarrow{e}_1) = a_{11}\overrightarrow{e'}_1 + a_{21}\overrightarrow{e'}_2 ... + a_{m1}\overrightarrow{e'}_m$$

analogamente $f(\overrightarrow{e}_2) \in W$ con

$$f(\overrightarrow{e}_2) = a_{12}\overrightarrow{e'}_1 + a_{22}\overrightarrow{e'}_2 ... + a_{m2}\overrightarrow{e'}_m$$

in generale $f(\overrightarrow{e}_i) \in W$ con

$$f(\overrightarrow{e}_i) = a_{1i}\overrightarrow{e'}_1 + a_{2i}\overrightarrow{e'}_2 ... + a_{mi}\overrightarrow{e'}_m$$

Ossia $f(\overrightarrow{e}_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\overrightarrow{e'}_j$, possiamo allora introdurre una matrice $A = (a_{ji})$ con $a_{ji} \in \mathbb{K}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

in cui gli elementi della i-sima colonna ($i = 1, ..., n$) sono le componenti di $f(\overrightarrow{e}_i)$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$. La matrice A è detta *matrice associata* ad f rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ e si indica con $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)$ o semplicemente con $A = M(f)$ ove le basi siano date.

Dato un qualunque vettore $\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{e}_1 + ... + x_n\overrightarrow{e}_n$ di V, sia $\overrightarrow{y} = y_1\overrightarrow{e'}_1 + ... + y_m\overrightarrow{e'}_m$ la sua immagine tramite f, ossia $\overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{x})$. Si ha

$f(\overrightarrow{x}) = f(x_1\overrightarrow{e}_1 + ... + x_n\overrightarrow{e}_n) = x_1 f(\overrightarrow{e}_1) + ... + x_n f(\overrightarrow{e}_n) =$

$= x_1 f(a_{11}\overrightarrow{e'}_1 + a_{21}\overrightarrow{e'}_2 ... + a_{m1}\overrightarrow{e'}_m) + ... + x_i f(a_{1i}\overrightarrow{e'}_1 + a_{2i}\overrightarrow{e'}_2 ... + a_{mi}\overrightarrow{e'}_m) + ... + x_n f(a_{1n}\overrightarrow{e'}_1 + a_{2n}\overrightarrow{e'}_2 ... + a_{mn}\overrightarrow{e'}_m) = (x_1 a_{11} + ... + x_i a_{1i} + ... + x_n a_{1n})\overrightarrow{e'}_1 + ...$

$+ (x_1 a_{m1} + ... + x_i a_{mi} + ... + x_n a_{mn})\overrightarrow{e'}_m = (x_1 a_{11} + ... + x_i a_{1i} + ... + x_n a_{1n})\overrightarrow{e'}_1 + ... + (x_1 a_{m1} + ... + x_i a_{mi} + ... + x_n a_{mn})\overrightarrow{e'}_m$

Usando la notazione matriciale si ha $Y = AX$ con

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \text{ e } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_m \end{pmatrix}$$

matrici colonna che rappresentano rispettivamente le componenti del vettore $\overrightarrow{x}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ e le componenti del vettore $\overrightarrow{y}$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$. Esplicitando si ha

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

Si osservi che l'applicazione lineare f è rappresentata univocamente da una matrice solo se sono fissate le basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ degli spazi vettoriali V e W. Se si cambia una o entrambe le basi, cambia in generale anche la matrice associata ad f.

Viceversa, data una matrice $A \in \mathcal{M}^{m,n}(\mathbb{K})$ e fissate due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ rispettivamente di V e W, l'applicazione

$$f : V \to W$$

$$X \mapsto AX$$

è l'applicazione lineare che fa corrispondere al vettore con componenti X rispetto alla base $\mathcal{B}$, il vettore con componenti AX riapetto alla base $\mathcal{B}'$.

Se $V = \mathbb{K}^n$ e $W = \mathbb{K}^m$ scrivendo f_A si usa assumere tacitamente che $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ siano le basi canoniche rispettivamente di $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^m$.

Esempio.

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 7 \end{pmatrix}$ rappresenta un'applicazione lineare f_A

$$f_A : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto (x - 2y + 3z, 4x + 5y - 7z)$$

essendo

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y + 3z \\ 4x + 5y - 7z \end{pmatrix}$$

Siano V, W, U spazi vettoriali con $\dim V = n$, $\dim W = m$ e $\dim U = p$ e siano $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}''$ basi rispettivamente di V, W e U. Se

$$f : V \to W \quad \text{e} \quad g : W \to U$$

sono applicazioni lineari, allora

$$h := g \circ f : V \to U$$

è lineare e per le matrici associate vale

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}(h) = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''}(g) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)$$

ove il prodotto tra matrici è righe per colonne.

Ponendo

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}(h) = C \in \mathbb{K}^{p,n}, \quad M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''}(g) = B \in \mathbb{K}^{p,m}, \quad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f) = A \in \mathbb{K}^{m,n}$$

si ha

$$C = BA$$

infatti:

$$\begin{array}{ll} f : V \to W & \text{e} \quad g : W \to U \\ X \mapsto Y = AX & \quad Y \mapsto Z = BY \end{array}$$

posto $Z = CX$ si ha

$$Z = BY = B(AX) = (BA)X \Rightarrow C = BA$$

utilizzando il seguente lemma

Lemma 82 *Siano F e G due matrici. Se per ogni matrice X per cui sia possibile effettuare i prodotti si ha $FX = GX$ allora $F = G$.*

Dim.

$$\forall X \quad FX = GX \Rightarrow \forall X \quad (F-G)X = O \Rightarrow rg(F-G) = 0 \Rightarrow F-G = 0 \Rightarrow F = G$$

■

Alla luce di quanto detto possiamo dare un ulteriore esempio di spazi vettoriali isomorfi.

Siano V e W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ con basi rispettivamente $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n\}$ e $\mathcal{B}' = \left\{\overrightarrow{e'}_1, ..., \overrightarrow{e'}_m\right\}$. Consideriamo lo spazio vettoriale $Lin(V, W) = \{f : V \to W \,|\, f \;\; \text{lineare}\}$, si dimostra che

$$Lin(V, W) \cong \mathbb{K}^{m,n}$$

Infatti l'applicazione

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} : Lin(V, W) \to \mathbb{K}^{m,n}$$

è un'isomorfismo.

In particolare per $W = V$ fissata una base $\mathcal{B}$ di V e posto $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ possiamo identificare un automorfismo con una matrice quadrata invertibile ad elementi in $\mathbb{K}$, ossia

$$GL(V) \cong GL(n, \mathbb{K})$$

L'applicazione identica Id di V è rappresentata dalla matrice identità di ordine n.

Si noti che se f è un automorfismo di V, poichè

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id$$

segue

$$M(f \circ f^{-1}) = M(f) \cdot M(f^{-1}) = M(Id) = I_n$$

da cui

$$M(f^{-1}) = M(f)^{-1}$$

Teorema 83 *Siano V e W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ con $\dim V = n$ e $\dim W = m$ e sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Il rango di f coincide con il rango della matrice $M(f)$.*

Dim. Sia $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n\}$ una base di V, sappiamo che $rg(f) = \dim \operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Im} f = \mathcal{L}(f(\overrightarrow{e}_1), ..., f(\overrightarrow{e}_n))$. D'altra parte $f(\overrightarrow{e}_1), ..., f(\overrightarrow{e}_n)$ sono le colonne di A quindi $rg(A) = \dim \mathcal{L}(f(\overrightarrow{e}_1), ..., f(\overrightarrow{e}_n))$ da cui la tesi. ■

Se consideriamo il sottospazio vettoriale $\ker f$, la sua dimensione è legata al rango di A dalla seguente relazione

$$\dim \ker f = \dim V - rgA$$

che discende dal Teorema fondamentale.

3.5.1 Cambiamenti di base.

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n\}$ una sua base, sia $\mathcal{B}' = \left\{\overrightarrow{e'}_1, ..., \overrightarrow{e'}_n\right\}$ una nuova base di V.

Ogni elemento di $\mathcal{B}$, in quanto vettore di V, si potrà scrivere come combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{B}'$ e viceversa ogni elemento di $\mathcal{B}'$ si potrà scrivere come combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{B}$. In forma compatta

$$\overrightarrow{e}_k = \sum_{j=1}^{n} b_{jk} \overrightarrow{e'}_j \quad \text{e} \quad \overrightarrow{e'}_j = \sum_{r=1}^{n} c_{rj} \overrightarrow{e}_r$$

La matrice $B = (b_{jk})$, le cui colonne sono le componenti dei vettori della base $\mathcal{B}$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$, è una matrice invertibile per il Teorema 60, ed è esattamente la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(Id)$. Analogamente $C = (c_{rj}) = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(Id)$. Si ha

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(Id) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(Id) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(Id \circ Id) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(Id) = I$$

Ne segue che $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(Id) = \left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(Id)\right)^{-1}$. Se X sono le componenti di un vettore rispetto alla base $\mathcal{B}$, BX saranno le componenti X' dello stesso vettore, in quanto applicando l'applicazione identica il vettore resta lo stesso, rispetto alla base $\mathcal{B}'$, si ha cioè $BX = X'$. Il passaggio dalle componenti rispetto a B' alle componenti rispetto a B è $CX' = X$ e B e C sono una l'inversa dell'altra.

Considerati V e W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ con $\dim V = n$ e $\dim W = m$, vediamo in che modo si trasforma la matrice associata ad un'applicazione lineare $f : V \to W$ per effetto di un cambiamento di base in V e/o in W.

Siano $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_n\}$ e $\mathcal{C} = \{\overrightarrow{w}_1, ..., \overrightarrow{w}_m\}$ due basi di V e W. Supponiamo che in V si operi un cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ e in W un cambiamento di base da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}'$.

Allora si ha

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}(Id_W) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(Id_V) = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}(Id_W \circ f \circ Id_V) = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}(f) \qquad (*)$$

Questa è la formula che indica come cambia la matrice associata ad un'applicazione lineare quando si cambia base.

Nel caso particolare di un endomorfismo $f : V \to V$, sia $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$. Se si passa dalla $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{B}'$ allora la $(*)$ diventa

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(Id)M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(Id) = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f) \qquad (**)$$

Posto $P = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(Id)$ si ha che $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(Id) = P^{-1}$ e quindi se $A' = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f)$ vale la relazione

$$A' = P^{-1}AP$$

Definizione 84 *Siano $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$. Esse si dicono **simili** se esiste una matrice invertibile P tale che $B = P^{-1}AP$*

Vale quindi il seguente

Teorema 85 *Matrici associate ad uno stesso endomorfismo rispetto a basi diverse sono simili.*

Osservazione. La similitudine tra matrici è una relazione di equivalenza, infatti:

i) A è simile a se stessa (*proprietà riflessiva*). Basta porre $P = I$

ii) Se A è simile a B allora B è simile ad A (*proprietà simmetrica*).

Da $B = P^{-1}AP$ segue $A = C^{-1}BC$ con $C = P^{-1}$

iii) Se A è simile a B e B è simile a D allora A è simile a D (*proprietà transitiva*). Da $B = P^{-1}AP$ e $D = E^{-1}BE$ segue

$$D = E^{-1}BE = E^{-1}\left(P^{-1}AP\right)E = \left(E^{-1}P^{-1}\right)A\,(PE) = (PE)^{-1}A\,(PE)$$

Proposizione 86 *Siano $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ allora*

$$A \textit{ simile a } B \Rightarrow rgA = rgB \textit{ e } \det A = \det B$$

Dim. Vogliamo quindi dimostrare che il rango di una matrice ed il suo determinante sono *invarianti per similitudine*. Siano allora A e B due matrici simili e sia f l'endomorfismo ad esse associato (a meno di un cambiamento di base).

Si ha

$$rgA = \dim \operatorname{Im} f = rgB$$

D'altra parte, dire che A e B sono simili equivale a dire che $B = P^{-1}AP$ con P matrice invertibile. Utilizzando la regola di Binet si ha

$$\det B = \det\left(P^{-1}AP\right) = \det P^{-1}\det A \det P = \frac{1}{\det P}\det A \det P = \det A$$

■

Osservazione.

$$rgA = rgB \text{ e } \det A = \det B \nRightarrow A \text{ e } B \text{ simili}$$

infatti, siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

con $\det A = 1 = \det B$ e $rgA = 2 = rgB$.

Se A e B fossero simili allora si avrebbe $B = P^{-1}AP$ con P matrice invertibile, ma

$$B = P^{-1}AP = P^{-1}IP = P^{-1}P = I$$

e questo è assurdo.

3.5.2 Sistemi ed Applicazioni Lineari.

Lo studio dei sistemi lineari a coefficienti e termini noti in un campo $\mathbb{K}$ è fortemente connesso con la teoria delle applicazioni lineari tra spazi vettoriali di dimensione finita V_n, W_m sul campo $\mathbb{K}$. Questo legame è evidente nel teorema di Rouchè-Capelli che ora andiamo a dimostrare.

Teorema 87 ***Teorema di Rouchè-Capelli.*** *Sia $AX = B$ un sistema lineare con $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,n}$ matrice dei coefficenti, $X \in \mathbb{K}^n$ colonna delle incognite e $B \in \mathbb{K}^m$ colonna dei termini noti.*

$$\textit{il sistema } AX = B \textit{ è compatibile } \Leftrightarrow rg(A) = rg(A|B)$$

dove $A|B$ è la matrice completa ottenuta aggiungendo ad A la colonna B dei termini noti. Inoltre

$$\textit{se } rg(A) = rg(A|B) = p \textit{ si hanno i seguenti casi: } \begin{cases} p = n & \textit{una sola soluzione} \\ p < n & \infty^{n-p} \textit{ soluzioni} \end{cases}$$

dove con "∞^{n-p} soluzioni" si intende infinite soluzioni dipendenti da $n - p$ parametri indipendenti.

Dim. Associamo alla matrice A l'applicazione lineare f_A ove $A = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}(f_A)$ con $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ basi canoniche di $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^m$ rispettivamente. Si ha

$$f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$$

$$X \mapsto f_A(X) = AX$$

Ora

$$\text{il sistema } AX = B \text{ è compatibile } \Leftrightarrow \exists X_0 \in \mathbb{K}^n \text{ tale che } AX_0 = B$$

ossia

$$\text{il sistema } AX = B \text{ è compatibile } \Leftrightarrow \exists X_0 \in \mathbb{K}^n \text{ tale che } f_A(X_0) = B$$

ma questo equivale a dire che $\overrightarrow{b} \in \operatorname{Im} f_A$ essendo B la matrice colonna delle componenti di $\overrightarrow{b}$.

Siano ora $\overrightarrow{a}_{i_1}, \overrightarrow{a}_{i_2}, ..., \overrightarrow{a}_{i_p}$ p colonne indipendenti di A che generano $\operatorname{Im} f_A$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{b} \quad &\in \quad \operatorname{Im} f_A = \mathcal{L}\left(\overrightarrow{a}_{i_1}, \overrightarrow{a}_{i_2}, ..., \overrightarrow{a}_{i_p}\right) \Leftrightarrow \mathcal{L}\left(\overrightarrow{a}_{i_1}, \overrightarrow{a}_{i_2}, ..., \overrightarrow{a}_{i_p}\right) = \mathcal{L}\left(\overrightarrow{a}_{i_1}, \overrightarrow{a}_{i_2}, ..., \overrightarrow{a}_{i_p}, \overrightarrow{b}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad rg\left\{\overrightarrow{a}_{i_1}, \overrightarrow{a}_{i_2}, ..., \overrightarrow{a}_{i_p}\right\} = rg\left\{\overrightarrow{a}_{i_1}, \overrightarrow{a}_{i_2}, ..., \overrightarrow{a}_{i_p}, \overrightarrow{b}\right\} \Leftrightarrow rg(A) = rg(A|B) \end{aligned}$$

Per dimostrare la seconda parte del teorema supponiamo che $rg(A) = rg(A|B) = p$. Per la compatibilità del sistema esiste almeno una soluzione $\overrightarrow{x}_0 \in \mathbb{K}^n$ tale che $f_A(\overrightarrow{x}_0) = \overrightarrow{b}$.

Detto S l'insieme delle soluzioni del sistema $AX = B$, proviamo che

$$S = \overrightarrow{x}_0 + \ker f_A$$

Sia $\overrightarrow{z} \in S$, allora $f_A(\overrightarrow{z}) = \overrightarrow{b}$ da cui

$$f_A(\overrightarrow{z} - \overrightarrow{x}_0) = f_A(\overrightarrow{z}) - f_A(\overrightarrow{x}_0) = \overrightarrow{b} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$$

ossia $\overrightarrow{z} - \overrightarrow{x}_0 \in \ker f_A$. Ora da $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{x}_0 + (\overrightarrow{z} - \overrightarrow{x}_0)$ con $\overrightarrow{z} - \overrightarrow{x}_0 \in \ker f_A$ segue $\overrightarrow{z} \in \overrightarrow{x}_0 + \ker f_A$.

Viceversa sia $\overrightarrow{z} \in \overrightarrow{x}_0 + \ker f_A$ ossia $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{x}_0 + \overrightarrow{x}$ con $\overrightarrow{x} \in \ker f_A$

$$f_A(\overrightarrow{z}) = f_A\left(\overrightarrow{x}_0 + \overrightarrow{x}\right) = f_A\left(\overrightarrow{x}_0\right) + f_A(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{b}$$

ossia $\overrightarrow{z} \in S$.

Osserviamo che $\overrightarrow{x} \in \ker f_A$ se e solo se $f_A(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}$ ossia, in termini di matrici, se e solo se $AX = O$ con X matrice colonna delle componenti di $\overrightarrow{x}$.

Tutte le soluzioni del sistema $AX = B$ si ottengono quindi aggiugendo ad una soluzione particolare di $AX = B$ le soluzioni del sistema omogeneo associato $AX = O$.

Abbiamo già provato che l'insieme Δ delle soluzioni di un sistema omogeneo è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$ e dal teorema del rango segue che

$$\dim \Delta = n - rgA = n - p$$

ossia il sistema ammette infinite soluzioni dipendenti da $n - p$ parametri indipendenti.

Nel caso particolare di $n = p$ ci si riconduce ad un sistema quadrato di n equazioni in n incognite con matrice dei coefficienti di rango massimo. In tal caso $\ker f_A = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ e il sistema ha un'unica soluzione che si può determinare usando il teorema di Cramer. ∎

3.5.3 Sottospazi affini.

Definizione 88 *Sia V uno spazio vettoriale e $\overrightarrow{v}$ un fissato vettore di V. Si chiama **traslazione** definita dal vettore $\overrightarrow{v}$, l'applicazione*

$$t_{\overrightarrow{v}} : V \to V$$

$$\overrightarrow{x} \mapsto t_{\overrightarrow{v}}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{v}$$

Si osservi che se $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, $t_{\overrightarrow{v}}$ non è lineare, infatti $t_{\overrightarrow{v}}(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$.
Indichiamo con $T(V)$ l'insieme di tutte le traslazioni di V. Si ha:

i) $t_{\overrightarrow{v}} \circ t_{\overrightarrow{w}} = t_{\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}} = t_{\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v}} = t_{\overrightarrow{w}} \circ t_{\overrightarrow{v}}$ ($\circ$ è commutativa)

ii) $(t_{\overrightarrow{v}} \circ t_{\overrightarrow{w}}) \circ t_{\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}} \circ t_{\overrightarrow{u}} = t_{(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})+\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{v}+(\overrightarrow{w}+\overrightarrow{u})} = t_{\overrightarrow{v}} \circ t_{\overrightarrow{w}+\overrightarrow{u}} = t_{\overrightarrow{v}} \circ (t_{\overrightarrow{w}} \circ t_{\overrightarrow{u}})$ ($\circ$ è associativa)

iii) se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ $t_{\overrightarrow{0}}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} = Id(\overrightarrow{x})$ e si ha $t_{\overrightarrow{v}} \circ t_{\overrightarrow{0}} = t_{\overrightarrow{v}} = t_{\overrightarrow{0}} \circ t_{\overrightarrow{v}}$ (Id è elemento neutro rispetto a $\circ$)

iv) se consideriamo la traslazione $t_{\overrightarrow{v}}$ allora esiste la traslazione $t_{-\overrightarrow{v}}$ tale che

$$t_{\overrightarrow{v}} \circ t_{-\overrightarrow{v}} = t_{\overrightarrow{0}} = t_{-\overrightarrow{v}} \circ t_{\overrightarrow{v}}$$

ossia esiste l'elemento simmetrico.

Abbiamo così provato che $(T(V), \circ)$ è un gruppo abeliano.

Definizione 89 *Si chiama applicazione affine di uno spazio vettoriale V in sè ogni applicazione φ tale che*

$$\varphi = t_{\overrightarrow{v}} \circ f$$

con $f : V \to V$ applicazione lineare.

Esempio.
Sia

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (-x + 2y - 1, 5x - y + 7)$$

φ è un'applicazione affine, cioè $\varphi = t_{\overrightarrow{v}} \circ f$ con $\overrightarrow{v} = (-1, 7)$ ed

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (-x + 2y, 5x - y)$$

La matrice A associata ad f è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Da $\det A \neq 0$ segue $rgA = 2 = \dim \operatorname{Im} f$ e quindi $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$ ossia f è suriettiva.

D'altra parte $\dim \ker f = 2 - \dim \operatorname{Im} f = 0$ e quindi $\ker f = \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$ ossia f è iniettiva.

Dunque f è un isomorfismo e si può provare che anche $\varphi = t_{\overrightarrow{v}} \circ f$ è in questo caso invertibile.

Se U è un sottospazio vettoriale di V ed $\overrightarrow{v}$ un vettore non nullo fissato di V, il sottoinsieme

$$S = t_{\overrightarrow{v}}(U) = \overrightarrow{v} + U = \{\overrightarrow{x} \in V \,|\, \overrightarrow{x} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \text{ con } \overrightarrow{u} \in U\}$$

è detto *varietà lineare* o *sottospazio affine* di V. Se $\overrightarrow{v} \notin U$, $t_{\overrightarrow{v}}(U)$ non è un sottospazio vettoriale. Si può però definire la "dimensione di U", in breve $\dim U$, ponendo

$$\dim S = \dim U$$

Ad esempio lo spazio $S = \overrightarrow{x}_0 + \ker f_A$ delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo ha dimensione pari alla dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato, in quanto è un suo traslato.

Sia ora $S = \overrightarrow{v} + U$ un sottospazio affine di V, $f : V \to V$ un endomorfismo e φ è un'applicazione affine. Valgono le seguenti proprietà:

1) $f(S) = f(\overrightarrow{v}) + f(U)$. Infatti:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{y} &\in f(S) \Leftrightarrow \overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{x}) \text{ con } \overrightarrow{x} \in S, \overrightarrow{x} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{v}) + f(\overrightarrow{u}) \text{ con } f(\overrightarrow{u}) \in f(U) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{y} \in f(\overrightarrow{v}) + f(U) \end{aligned}$$

2) $\varphi(S)$ è un sottospazio affine di V. Infatti:
da $S = \overrightarrow{w} + U$ e $\varphi = t_{\overrightarrow{v}} \circ f$ segue

$$\begin{aligned} \varphi(S) &= (t_{\overrightarrow{v}} \circ f)(S) = t_{\overrightarrow{v}}(f(S)) = t_{\overrightarrow{v}}(f(\overrightarrow{w} + U)) = \\ &= t_{\overrightarrow{v}}(f(\overrightarrow{w}) + f(U)) = \overrightarrow{v} + f(\overrightarrow{w}) + f(U) = \overrightarrow{z} + f(U) \end{aligned}$$

con $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{v} + f(\overrightarrow{w}) \in V$.

3) Sia $g : V \to W$ un'applicazione lineare, sia $\overrightarrow{w}_0 \in W$ un vettore fissato tale che $g^{-1}(\overrightarrow{w}_0) \neq \varnothing$. Sia $\overrightarrow{v}_0 \in V$ tale che $g(\overrightarrow{v}_0) = \overrightarrow{w}_0$. Allora $g^{-1}(\overrightarrow{w}_0)$ è un sottospazio affine di V. Infatti:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{x} &\in g^{-1}(\overrightarrow{w}_0) \Leftrightarrow g(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{w}_0 = g(\overrightarrow{v}_0) \Leftrightarrow g(\overrightarrow{x}) - g(\overrightarrow{v}_0) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow g(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{v}_0) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{x} - \overrightarrow{v}_0 \in \ker g \Leftrightarrow \overrightarrow{x} \in \overrightarrow{v}_0 + \ker g \end{aligned}$$

ossia $g^{-1}(\overrightarrow{w}_0) = \overrightarrow{v}_0 + \ker g$.

3.5.4 Endomorfismi notevoli.

Vogliamo ora analizzare degli endomorfismi di particolare importanza in Geometria, partendo da alcuni esempi.

Esempio n.1

Sia V uno spazio vettoriale, U e W suoi sottospazi supplementari, cioè tali che $V = U \oplus W$. Allora per ogni $\overrightarrow{x} \in V$

$$\exists \mid \overrightarrow{x}_u \in V \text{ e } \exists \mid \overrightarrow{x}_w \in W \text{ tale che } \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}_u + \overrightarrow{x}_w$$

Consideriamo

$$f : V \to V$$

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}_u + \overrightarrow{x}_w \mapsto f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}_u$$

f è detta *proiezione* su U fatta parallelamente a W ed è un'applicazione lineare.

Ad esempio possiamo considerare $V = \mathbb{R}^3$ $U = \pi_{xy}$ e $W = assez$ ed

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$$

che rappresenta la proiezione sul piano xy eseguita parallelamente all'asse$z$. In questo caso

$$\overrightarrow{x} = (x, y, z) = \overrightarrow{x}_u + \overrightarrow{x}_w \text{ con } \overrightarrow{x}_u = (x, y, 0) \text{ e } \overrightarrow{x}_w = (0, 0, z)$$

Esempio n.2

Sia $V = U \oplus W$ e

$$s : V \to V$$

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}_u + \overrightarrow{x}_w \mapsto s(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}_u - \overrightarrow{x}_w$$

s è un endomorfismo detto *simmetria* rispetto ad U eseguita parallelamente a W.

Ad esempio possiamo considerare $V = \mathbb{R}^3$ $U = \pi_{xy}$ e $W = assez$ ed

$$s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$$

che rappresenta la simmetria rispetto al piano xy.

Definizione 90 *Un endomorfismo $p : V \to V$ si dice* ***proiezione*** *se $p^2 = p$ (cioè se $p \circ p = p$).*

L'applicazione definita nell'Esempio n.1, la funzione nulla e l'identità sono esempi di proiezioni.

Teorema 91 *Se $p : V \to V$ è una proiezione allora*

$$
\begin{aligned}
a)\ V &= \operatorname{Im} p \oplus \ker p. \text{ In particolare } p \text{ è del tipo definito nell'Es. n.1} \\
& \quad b) \text{ L'unica proiezione invertibile è l'identità}
\end{aligned}
$$

Dim. a) Dobbiamo provare che $V = \operatorname{Im} p \oplus \ker p$ ossia che

$$V = \operatorname{Im} p + \ker p \text{ e } \operatorname{Im} p \cap \ker p = \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$$

Sia $\overrightarrow{x} \in V$, poniamo $\overrightarrow{x} = p(\overrightarrow{x}) + \overrightarrow{x} - p(\overrightarrow{x})$. Si ha banalmente $p(\overrightarrow{x}) \in \operatorname{Im} p$ ed inoltre

$$p(\overrightarrow{x} - p(\overrightarrow{x})) = p(\overrightarrow{x}) - p(p(\overrightarrow{x}))$$

ed essendo p una proiezione

$$p(\overrightarrow{x}) - p(p(\overrightarrow{x})) = p(\overrightarrow{x}) - p(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}$$

da cui $\overrightarrow{x} - p(\overrightarrow{x}) \in \ker p$.

Per provare che $\operatorname{Im} p \cap \ker p = \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$ consideriamo un generico vettore $\overrightarrow{y} \in \operatorname{Im} p \cap \ker p$. Allora esiste $\overrightarrow{x} \in V$ tale che $\overrightarrow{y} = p(\overrightarrow{x})$ ed inoltre $p(\overrightarrow{y}) = \overrightarrow{0}$ da cui

$$\overrightarrow{0} = p(\overrightarrow{y}) = p(p(\overrightarrow{x})) = p(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{y}$$

Inoltre p è del tipo dell'Es. n.1 se si pone $U = \operatorname{Im} p$ e $W = \ker p$ infatti.

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}_u + \overrightarrow{x}_w \text{ con } \overrightarrow{x}_u = p(\overrightarrow{x}) \text{ e } \overrightarrow{x}_w = \overrightarrow{x} - p(\overrightarrow{x})$$

e

$$f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}_u = p(\overrightarrow{x})$$

b) Per ipotesi p è invertibile e $p^2 = p$.

$$p \text{ invertibile } \Rightarrow \exists p^{-1} \text{ t.c. } p^{-1} \circ p = Id$$

quindi

$$p^2 = p \Rightarrow Id = p^{-1} \circ p = p^{-1} \circ p^2 = \left(p^{-1} \circ p\right) \circ p = p$$

da cui la tesi. ■

Osservazione.

Se p è una proiezione allora anche $p_1 = Id - p$ è una proiezione, infatti:

$$p_1^2 = (Id - p) \circ (Id - p) = Id - 2p + p^2 = Id - 2p + p = Id - p = p_1$$

Inoltre $\ker p_1 = \operatorname{Im} p$ infatti:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{x} &\in \ker p_1 \Leftrightarrow p_1(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow (Id - p)(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{x} - p(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{x} = p(\overrightarrow{x}) \Leftrightarrow \overrightarrow{x} \in \operatorname{Im} p
\end{aligned}
$$

Analogamente $\operatorname{Im} p_1 = \ker p$, infatti:

$$\overrightarrow{y} \in \ker p \Leftrightarrow p(\overrightarrow{y}) = \overrightarrow{0}$$

da $p_1 = Id - p$ segue $p = Id - p_1$ e quindi

$$\overrightarrow{0} = p(\overrightarrow{y}) = (Id - p_1)(\overrightarrow{y}) = \overrightarrow{y} - p_1(\overrightarrow{y})$$

ossia $\overrightarrow{y} = p_1(\overrightarrow{y}) \in \operatorname{Im} p_1$.

Abbiamo così verificato che se p è la proiezione di U rispetto a W allora p_1 è la proiezione di W rispetto ad U.

Definizione 92 *Un endomorfismo $\phi : V \to V$ si dice* ***involuzione*** *se $\phi^2 = Id$.*

Teorema 93 *Sia $\phi : V \to V$ un endomorfismo. Allora*

a) se ϕ è un involuzione allora $-\phi$ è un involuzione

b) se ϕ è un involuzione allora ϕ è un automorfismo e $\phi^{-1} = \phi$

c) ϕ è un involuzione se e solo se ϕ è una simmetria

Dim. a) Per ipotesi

$$\phi \text{ involuzione} \Rightarrow \phi^2 = Id$$

da cui

$$(-\phi)^2 = \phi^2 = Id$$

ossia $-\phi$ è un involuzione.

b) Sia ϕ un endomorfismo involutorio.

$$\phi(\overrightarrow{x}) = \phi(\overrightarrow{y}) \Rightarrow \phi^2(\overrightarrow{x}) = \phi^2(\overrightarrow{y}) \Rightarrow \overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$$

ossia ϕ è iniettiva.

Sia ora $\overrightarrow{y} \in V$, consideriamo $\overrightarrow{x} = \phi(\overrightarrow{y})$, si ha

$$\phi(\overrightarrow{x}) = \phi(\phi(\overrightarrow{y})) = \phi^2(\overrightarrow{y}) = \overrightarrow{y}$$

ossia ϕ è suriettiva e quindi ϕ è un automorfismo.

Inoltre

$$\begin{aligned} \phi^2 &= Id \Rightarrow \phi^{-1} \circ \phi^2 = \phi^{-1} \circ Id \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\phi^{-1} \circ \phi\right) \circ \phi = \phi^{-1} \Rightarrow \phi = \phi^{-1} \end{aligned}$$

c) Sia ϕ una simmetria, allora da $\phi(\overrightarrow{x}_u + \overrightarrow{x}_w) = \overrightarrow{x}_u - \overrightarrow{x}_w$ con $V = U \oplus W$ segue

$$\phi^2(\overrightarrow{x}_u + \overrightarrow{x}_w) = \phi(\phi(\overrightarrow{x}_u + \overrightarrow{x}_w)) = \phi(\overrightarrow{x}_u - \overrightarrow{x}_w) = \overrightarrow{x}_u + \overrightarrow{x}_w$$

ossia ϕ è un involuzione.

Viceversa supponiamo che ϕ sia un involuzione e poniamo

$$U = \left\{ \overrightarrow{y} \in V \middle| \overrightarrow{y} = \frac{\overrightarrow{x} + \phi(\overrightarrow{x})}{2} \ \overrightarrow{x} \in V \right\}$$

$$W = \left\{ \overrightarrow{y} \in V \middle| \overrightarrow{y} = \frac{\overrightarrow{x} - \phi(\overrightarrow{x})}{2} \ \overrightarrow{x} \in V \right\}$$

U e W sono sottospazi vettoriali di V ed inoltre $V = U \oplus W$ infatti $\forall \overrightarrow{x} \in V$

$$\overrightarrow{x} = \frac{\overrightarrow{x} + \phi(\overrightarrow{x})}{2} + \frac{\overrightarrow{x} - \phi(\overrightarrow{x})}{2}$$

inoltre sia $\overrightarrow{y} \in U \cap W$, allora $\exists \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2 \in V$ t.c. $\overrightarrow{y} = \frac{\overrightarrow{x}_1 + \phi(\overrightarrow{x}_1)}{2} = \frac{\overrightarrow{x}_2 - \phi(\overrightarrow{x}_2)}{2}$ da cui

$$\overrightarrow{x}_1 + \phi(\overrightarrow{x}_1) = 2\overrightarrow{y} = \overrightarrow{x}_2 - \phi(\overrightarrow{x}_2)$$

e quindi

$$\phi(\overrightarrow{x}_1) + \phi(\overrightarrow{x}_2) = \overrightarrow{x}_2 - \overrightarrow{x}_1$$

da cui, applicando ϕ ad ambo i membri, si ottiene

$$\phi(\overrightarrow{x}_2) - \phi(\overrightarrow{x}_1) = \overrightarrow{x}_1 + \overrightarrow{x}_2$$

da

$$\begin{cases} \phi(\overrightarrow{x}_1) + \phi(\overrightarrow{x}_2) = \overrightarrow{x}_2 - \overrightarrow{x}_1 \\ \phi(\overrightarrow{x}_2) - \phi(\overrightarrow{x}_1) = \overrightarrow{x}_1 + \overrightarrow{x}_2 \end{cases}$$

segue $2\phi(\overrightarrow{x}_2) = 2\overrightarrow{x}_2$ e quindi

$$\overrightarrow{y} = \frac{\overrightarrow{x}_2 - \phi(\overrightarrow{x}_2)}{2} \Rightarrow \overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$$

come volevasi dimostrare.

Infine $\phi = s$ dove s è la simmetria definita nell'Es. n.2. Infatti:

$$s(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}_u - \overrightarrow{x}_w = \frac{\overrightarrow{x} + \phi(\overrightarrow{x})}{2} - \frac{\overrightarrow{x} - \phi(\overrightarrow{x})}{2} = \phi(\overrightarrow{x})$$

■

Definizione 94 *Un endomorfismo $\phi : V \to V$ si dice* ***nilpotente*** *se $\exists h \in N$ t.c. $\phi^h = 0$ (applicazione nulla). Il minimo h tale che $\phi^h = 0$ si dice* ***ordine*** *dell'operatore nilpotente.*

3.5.5 Autovalori ed autovettori.

L'argomento che andiamo ora ad introdurre è tra i più utilizzati nelle applicazioni dell'algebra lineare e ci permette di approfondire il seguente problema:

Dato un endomorfismo f dello spazio vettoriale V, trovare una base $\mathcal{B}$ di V che semplifichi il più possibile la matrice associata ad f.

Nel seguito consideriamo V spazio vettoriale di dimensione finita n su $\mathbb{K}$ ed $f : V \to V$ un endomorfismo.

Definizione 95 *Un vettore* $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$ *di* V *si dice* ***autovettore*** *di* f *relativo all'****autovalore*** $\lambda \in \mathbb{K}$ *se si ha*

$$f(\overrightarrow{x}) = \lambda \overrightarrow{x}$$

Osservazione.

Qualunque sia $\lambda \in \mathbb{K}$ si ha

$$f(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0} = \lambda \overrightarrow{0}$$

per la linearità di f, per questo motivo nella definizione di autovettore si suppone esplicitamente $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$.

Può invece esistere l'autovalore $\lambda = 0$, infatti se $\ker f \neq \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ allora tutti i vettori non nulli di $\ker f$ risultano essere autovettori relativi all'autovalore $\lambda = 0$.

Se ponessimo l'attenzione sull'autovalore piuttosto che sull'autovettore, potremmo dare la seguente definizione che è del tutto analoga alla precedente.

Definizione 96 *Un elemento* $\lambda \in \mathbb{K}$ *è detto autovalore di* f *se esiste un vettore non nullo* $\overrightarrow{x}$ *tale che*

$$f(\overrightarrow{x}) = \lambda \overrightarrow{x}$$

Sia λ un autovalore di f e sia $\overrightarrow{x}$ un autovettore relativo all'autovalore λ, allora

$$f(\overrightarrow{x}) = \lambda \overrightarrow{x}$$

da cui

$$f(\overrightarrow{x}) - \lambda Id(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}$$

ossia

$$\overrightarrow{x} \in \ker(f - \lambda Id)$$

Se indichiamo con $V(\lambda)$ l'insieme costituito dal vettore nullo e dagli autovettori di f relativi all'autovalore λ si ha

$$V(\lambda) = \ker(f - \lambda Id)$$

ossia $V(\lambda)$ è un sottospazio vettoriale di V di dimensione ≥ 1. Esso è detto *autospazio* di f relativo all'autovalore λ.

Il numero naturale $\dim V(\lambda)$ è detto *molteplicità geometrica* di λ. Nel seguito indicheremo con g_λ la molteplicità geometrica di λ.

Teorema 97 *Autovettori relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.*

Dim. Procediamo per induzione sul numero p di autovettori relativi ad autovalori distinti.

Per $p = 1$ essendo l'autovettore non nullo per definizione, esso è linearmente indipendente.

Supponiamo vera la tesi per $p - 1$ autovettori relativi ad autovalori distinti e dimostriamo che è vera per p autovettori.

Siano allora $\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2, ..., \overrightarrow{x}_p$ autovettori relativi agli autovalori distinti $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ e siano $\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2, ..., \overrightarrow{x}_{p-1}$ linearmente indipendenti. Se per assurdo i p vettori fossero linearmente dipendenti allora si avrebbe

$$\overrightarrow{x}_p = \alpha_1 \overrightarrow{x}_1 + \alpha_2 \overrightarrow{x}_2 + ... + \alpha_{p-1} \overrightarrow{x}_{p-1} \qquad (*)$$

da cui

$$f(\overrightarrow{x}_p) = f(\alpha_1 \overrightarrow{x}_1 + \alpha_2 \overrightarrow{x}_2 + ... + \alpha_{p-1} \overrightarrow{x}_{p-1}) = \alpha_1 f(\overrightarrow{x}_1) + \alpha_2 f(\overrightarrow{x}_2) + ... + \alpha_{p-1} f(\overrightarrow{x}_{p-1})$$

ossia

$$\lambda_p \overrightarrow{x}_p = \alpha_1 \lambda_1 \overrightarrow{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \overrightarrow{x}_2 + ... + \alpha_{p-1} \lambda_{p-1} \overrightarrow{x}_{p-1} \qquad (1)$$

d'altra parte per $(*)$ si ha

$$\lambda_p \overrightarrow{x}_p = \alpha_1 \lambda_p \overrightarrow{x}_1 + \alpha_2 \lambda_p \overrightarrow{x}_2 + ... + \alpha_{p-1} \lambda_p \overrightarrow{x}_{p-1} \qquad (2)$$

e quindi sottraendo membro a membro la (2) dalla (1) si ha

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_p)\overrightarrow{x}_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_p)\overrightarrow{x}_2 + ... + \alpha_{p-1}(\lambda_{p-1} - \lambda_p)\overrightarrow{x}_{p-1} = \overrightarrow{0}$$

Ora $\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2, ..., \overrightarrow{x}_{p-1}$ sono linearmente indipendenti e gli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ sono tutti distinti, quindi la relazione precedente è soddisfatta solo per

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_{p-1} = 0$$

ma questo implica $\overrightarrow{x}_p = \overrightarrow{0}$ contro l'ipotesi che $\overrightarrow{x}_p$ sia un autovettore. ■

In modo analogo a quanto fatto nella dimostrazione precedente si può verificare che

$$\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow V(\lambda_i) \cap V(\lambda_j) = \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$$

Infatti sia $\overrightarrow{v} \in V(\lambda_i) \cap V(\lambda_j)$, allora

$$(f - \lambda_i Id)\overrightarrow{v} = (f - \lambda_j Id)\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \Rightarrow (f - \lambda_i Id - f + \lambda_j Id)\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$$

da cui segue $(\lambda_j - \lambda_i)\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ e quindi $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ essendo $\lambda_j - \lambda_i \neq 0$ poichè $\lambda_i \neq \lambda_j$.

Sia ora $f : V \to V$ un endomorfismo ed $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n,n}$ la matrice associata ad f rispetto ad una fissata base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n\}$.

Un vettore $\overrightarrow{x} = x_1 \overrightarrow{e}_1 + ... + x_n \overrightarrow{e}_n$ è un autovettore di f relativo all'autovalore $\lambda \in \mathbb{K}$, se $f(\overrightarrow{x}) = \lambda \overrightarrow{x}$ ossia se le sue componenti, non tutte nulle, soddisfano le seguenti relazioni

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = \lambda x_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

Il sistema precedente può essere riscritto anche nella forma

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

che in forma compatta diventa

$$(A - \lambda I)X = O$$

Affinchè tale sistema omogeneo di n equazioni nelle n incognite $(x_1, x_2, ..., x_n)$ abbia soluzioni non nulle, deve essere

$$\det(A - \lambda I) = O$$

Abbiamo così dimostrato che gli autovalori di f sono le soluzioni, appartenenti al campo $\mathbb{K}$, dell'equazione $\det(A - \lambda I) = O$ detta *equazione caratteristica* di f.

Chiamiamo invece *polinomio caratteristico* di f il polinomio nella variabile λ

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

che, sviluppando il determinante, diventa

$$p_A(\lambda) = C_n(A)\lambda^n + C_{n-1}(A)\lambda^{n-1} + ... + C_1(A)\lambda + C_0(A)$$

dove $C_i(A)$ sono funzioni degli elementi della matrice A.

In particolare

$$\begin{cases} C_n(A) = (-1)^n \\ C_{n-1}(A) = (-1)^{n-1} tr(A) \\ ..... \\ C_0(A) = \det A \end{cases}$$

Osserviamo che essendo $C_n(A) \neq 0$ il polinomio $p_A(\lambda)$ è un polinomio nella variabile λ di grado n.

Se $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ è uno zero di $p_A(\lambda)$ di molteplicità k ossia

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k Q(\lambda) \qquad \text{con } Q(\lambda_0) \neq 0$$

allora si dice che λ_0 è un autovalore di *molteplicità algebrica* k. Nel seguito indicheremo con a_{λ_0} la molteplicità algebrica di λ_0.

Osservazioni.

- Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ allora l'equazione $\det(A - \lambda I) = O$ ha n radici in $\mathbb{C}$, pertanto f ha n autovalori, ciascuno contato con la sua molteplicità.

- Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ allora gli autovalori di f sono le soluzioni reali dell'equazione $\det(A - \lambda I) = O$. In particolare se n è dispari allora f ammette almeno una soluzione reale e quindi un autovalore.

Teorema 98 *Se A ed A' sono due matrici simili allora*

$$p_A(\lambda) = p_{A'}(\lambda)$$

Dim. Se A ed A' sono due matrici simili allora esiste una matrice invertibile B tale che $A' = B^{-1}AB$. Ora

$$\begin{aligned} p_{A'}(\lambda) &= \det(A' - \lambda I) = \det\left[\left(B^{-1}AB\right) - \lambda\left(B^{-1}IB\right)\right] = \\ &= \det\left[B^{-1}(A - \lambda I)B\right] = \det B^{-1} \det(A - \lambda I) \det B = \\ &= \frac{1}{\det B} \det(A - \lambda I) \det B = \det(A - \lambda I) = p_A(\lambda) \end{aligned}$$

■

Non è vero però il viceversa, possono esistere cioè matrici che hanno lo stesso polinomio caratteristico pur non essendo simili.

Ricordando che matrici simili rappresentano lo stesso endomorfismo rispetto a basi diverse, possiamo allora parlare di polinomio caratteristico di un endomorfismo f, che indichiamo con $p_f(\lambda)$, come del polinomio caratteristico di una qualsiasi matrice associata all'endomorfismo stesso.

3.5.6 Endomorfismi semplici.

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n su $\mathbb{K}$ ed $f : V \to V$ un endomorfismo.

Supponiamo che esista una base $\{\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_n\}$ di V costituita da autovettori di f relativi agli autovalori, non necessariamente tutti distinti, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Ciò significa che

$$f(\overrightarrow{u}_1) = \lambda_1 \overrightarrow{u}_1 \quad f(\overrightarrow{u}_2) = \lambda_2 \overrightarrow{u}_2 .... f(\overrightarrow{u}_n) = \lambda_n \overrightarrow{u}_n$$

Rispetto alla base di autovettori, l'endomorfismo f è quindi rappresentato dalla seguente matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Viceversa, se f è rappresentato, in una certa base, da una matrice diagonale, tale base è una base di autovettori.

Definizione 99 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n su $\mathbb{K}$. Un endomorfismo f di V si dice* ***semplice*** *se esiste una base di V costituita da autovettori per f.*

In termini di matrici la precedente definizione diventa:

Una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ si dice **diagonalizzabile** se esiste una matrice D diagonale simile ad A. In altre parole se, considerato l'endomorfismo f di V associato ad A, esiste una base di V costituita da autovettori per f.

Osservazione.

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n\}$ una sua base ed

$$f : V \to V$$

un'applicazione lineare rappresentata dalla matrice A.

Se A è diagonalizzabile allora esiste in V una base costituita da autovettori di f che indichiamo con $\mathcal{A}$. Essendo $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ si ha che

$$D = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(Id) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(Id)$$

è la matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{A}$ e quindi è diagonale. Posto $P = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(Id)$ si ha che $D = P^{-1}AP$. La matrice P ha per colonne le componenti degli n autovettori indipendenti di f relative alla base $\mathcal{B}$ ed è solitamente detta matrice *diagonalizzante.*

Non tutte le matrici sono diagonalizzabili così come non tutti gli endomorfismi sono semplici.

Vediamo ora alcuni risultati che ci permetteranno di introdurre un criterio per stabilire se un endomorfismo f è semplice oppure no.

Proposizione 100 *Se f è un endomorfismo di V_n con n autovalori distinti, esso è semplice.*

Dim. Supponiamo che f abbia n autovalori distinti $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ e siano $\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_n$ gli autovettori relativi. Essendo n autovettori relativi ad autovalori distinti, essi sono linearmente indipendenti e quindi costituiscono una base di autovettori per f. ■

Proposizione 101 *Sia λ un autovalore per f, endomorfismo di V_n e siano g_λ e a_λ, rispettivamente, la molteplicità geometrica e la molteplicità algebrica di λ. Allora*

$$1 \le g_\lambda \le a_\lambda$$

Dim. Si ha $g_\lambda \ge 1$ poichè in $V(\lambda)$ esiste almeno un autovettore non nullo per definizione.

Sia ora μ un autovalore di f e $g_\mu = \dim V(\mu)$. Siano $\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_q$ una base di $V(\mu)$ avendo posto $q = g_\mu$. Per il teorema della base incompleta, V ha una base del tipo $\{\overrightarrow{v}_1, ..., \overrightarrow{v}_q, \overrightarrow{e}_{q+1}, ..., \overrightarrow{e}_n\}$ e la matrice associata ad f rispetto questa base è del tipo

$$A = \begin{pmatrix} \mu & & & & & \\ & \cdot & & & & \\ & & \cdot & & & B \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \mu & \\ & & O & & & C \end{pmatrix}$$

con C matrice del tipo $(n-q) \times (n-q)$ e

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} \mu - \lambda & & & & & \\ & \cdot & & & & \\ & & \cdot & & & B \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \mu - \lambda & \\ & & O & & & C - \lambda I \end{pmatrix}$$

Operando successivi sviluppi rispetto alle prime q colonne si ha

$$\det(A - \lambda I) = (\mu - \lambda)^q \det(C - \lambda I)$$

Se ne deduce che a_μ è almeno q da cui $g_\mu \leq a_\mu$. ■

Teorema 102 *(Criterio di Semplicità) Sia V_n uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ ed f un endomorfismo di V_n. Le seguenti proposizioni sono equivalenti:*
1) f è semplice,
2) a) tutti gli zeri $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ di $p_f(\lambda)$ appartengono a $\mathbb{K}$
b) $g_{\lambda_i} = a_{\lambda_i}$ $\forall i = 1, ..., r \leq n$
3) $V_n = V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus ... \oplus V(\lambda_r)$ con $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ autovalori distinti di f.

Dim. 1) $\Rightarrow$2)

a) Se f è semplice allora esiste una base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n\}$ di autovettori per f. Siano $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ gli autovalori distinti di f e sia b_{λ_i} il numero degli autovettori di $\mathcal{B}$ relativi all'autovalore λ_i. Si ha

$$b_{\lambda_1} + b_{\lambda_2} + ... + b_{\lambda_r} = n$$

ed essendo $a_{\lambda_i} \geq g_{\lambda_r} \geq b_{\lambda_i}$ $\forall i$ ne segue

$$p_f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{b_{\lambda_1}} (\lambda_2 - \lambda)^{b_{\lambda_2}} ... (\lambda_r - \lambda)^{b_{\lambda_r}}$$

Poichè $\deg p_f(\lambda) = n$ e quindi $p_f(\lambda)$ ha al più n radici, è necessariamente

$$a_{\lambda_i} = g_{\lambda_r} = b_{\lambda_i}$$

perciò

$$p_f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{a_{\lambda_1}} (\lambda_2 - \lambda)^{a_{\lambda_2}} ... (\lambda_r - \lambda)^{a_{\lambda_r}}$$

Pertanto tutti gli zeri $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ di $p_f(\lambda)$ appartengono a $\mathbb{K}$.

2) $\Rightarrow$3)

Siano $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ gli autovalori distinti di f . Per quanto dimostrato precedentemente, se consideriamo la somma $V(\lambda_1) + V(\lambda_2) + ... + V(\lambda_r)$, questa è diretta. Sia ora

$$S = V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus ... \oplus V(\lambda_r)$$

si ha

$$\begin{aligned}\dim S &= \dim V(\lambda_1) + \dim V(\lambda_2) + ... + \dim V(\lambda_r) = g_{\lambda_1} + g_{\lambda_2} + ... + g_{\lambda_r} = \\ &= a_{\lambda_1} + a_{\lambda_2} + ... + a_{\lambda_r} = n\end{aligned}$$

e quindi $S = V_n$

3) $\Rightarrow$1)

Per ipotesi $V_n = V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus ... \oplus V(\lambda_r)$. Consideriamo $\mathcal{B}_i$ base di $V(\lambda_i)$, si ha

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup ... \cup \mathcal{B}_r$$

è una base di V_n costituita da autovettori, ossia f è semplice. ■

4 Spazio vettoriale euclideo.

All'inizio di questo capitolo abbiamo trattato in maniera più approfondita lo spazio $\mathbb{V}_3$ dei vettori ordinari. In esso abbiamo definito il prodotto scalare attraverso i moduli dei due vettori coinvolti ed il coseno del loro angolo, tutti elementi deducibili dalla rappresentazione grafica, una volta che si sia fissata un'unità di misura per le lunghezze dei segmenti.

A partire da questa definizione geometrica abbiamo messo in evidenza le proprietà del prodotto scalare, anch'esse dedotte da considerazioni geometriche, che tra l'altro consentono il calcolo del prodotto scalare in componenti.

Quello che andiamo a fare nel seguito è generalizzare il concetto di prodotto scalare per spazi vettoriali reali di dimensione qualsiasi in cui ad un vettore non corrisponde, in generale, un segmento.

Definizione 103 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo $\mathbb{R}$. Si chiama* ***prodotto scalare*** *l'applicazione:*

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \mapsto g(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$

che ad ogni coppia di vettori $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ di V associa un numero reale, che indicheremo con $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ (e si legge $\overrightarrow{u}$ scalare $\overrightarrow{v}$) che oddisfa le seguenti proprietà:

1) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} \quad \forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V$ (prop. commutativa)

2) $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} \quad \forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V$ (prop. distributiva)

3) $(\lambda \overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \lambda(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \cdot (\lambda \overrightarrow{v}) \quad \forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ (prop. di omogeneità)

4) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} > 0 \ \ \forall \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ (g è definita positiva)

Definizione 104 *Si dice **spazio vettoriale euclideo** uno spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{R}$, di dimensione finita, dotato di un prodotto scalare g.*

Osserviamo che dalla proprietà 4) segue che

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \ \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$$

ed inoltre

$$\forall \overrightarrow{v} \in V \qquad \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$$

basta porre $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$.

Il numero

$$\|\overrightarrow{u}\|_g := \sqrt{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}} \geq 0$$

si dice *norma*, o *lunghezza*, o *modulo* di $\overrightarrow{u}$ rispetto a g.

Per la proprietà 4) si ha $\|\overrightarrow{u}\|_g > 0$ se $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ ed anche

$$\|\lambda \overrightarrow{u}\|_g = \sqrt{\lambda \overrightarrow{u} \cdot \lambda \overrightarrow{u}} = |\lambda| \, \|\overrightarrow{u}\|$$

Un vettore di norma 1 si dice *versore* (o *vettore unitario*), se $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, il vettore $\frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|_g}$ si dice versore di $\overrightarrow{u}$.

Esempi.

1. Lo spazio $\mathbb{V}_3$ dei vettori geometrici è un esempio di spazio vettoriale euclideo.

2. In $\mathbb{R}^2$ si consideri la legge che a due vettori $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2)$ ed $\overrightarrow{y} = (y_1, y_2)$ associa il numero

$$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = 4x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$$

Si verifica facilmente che l'applicazione così definita è un prodotto scalare. Ad esempio

$$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x} = 4x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$$

dove il secondo membro è un polinomio omogeneo di 2° grado con discriminante negativo e quindi $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x} > 0$ per $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$

In uno spazio vettoriale euclideo (V, g) valgono proprietà ben note per i vettori di $\mathbb{V}_3$, motivo per cui si estende a V la terminologia usata per $\mathbb{V}_3$.

Si dice che due vettori $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in V$ sono ortogonali (rispetto a g) se $g(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$ e si scrive $\overrightarrow{u} \perp_g \overrightarrow{v}$ o anche $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$.

In questo caso vale il seguente Teorema di Pitagora per spazi vettoriali euclidei

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|_g^2 = \|\overrightarrow{u}\|_g^2 + \|\overrightarrow{v}\|_g^2$$

Teorema 105 ***(Disuguaglianza di Schwarz)***

$$\textit{1)}\ |g(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})| \leq \|\overrightarrow{u}\|_g \|\overrightarrow{v}\|_g$$

$$\textit{2)}\ |g(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})| = \|\overrightarrow{u}\|_g \|\overrightarrow{v}\|_g \Leftrightarrow \overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}$$

Dim. 1) Se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ oppure $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ la disuguaglianza è banalmemte verificata. Supponiamo allora $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ e $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ e consideriamo il vettore $\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Si ha

$$0 \leq \|\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}\|_g^2 = g(\overrightarrow{u}+\lambda\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}+\lambda\overrightarrow{v}) = g(\overrightarrow{u},\overrightarrow{u})+\lambda g(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})+\lambda g(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u})+g(\lambda\overrightarrow{v},\lambda\overrightarrow{v})$$

per le proprietà del prodotto scalare si ha

$$g(\overrightarrow{u},\overrightarrow{u})+\lambda g(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})+\lambda g(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u})+g(\lambda\overrightarrow{v},\lambda\overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u}\|_g^2+2\lambda g(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u})+\lambda^2\|\overrightarrow{v}\|_g^2$$

ora $\lambda^2\|\overrightarrow{v}\|_g^2 + 2\lambda g(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}) + \|\overrightarrow{u}\|_g^2$ è un polinomio di 2° grado nella variabile λ e quindi da

$$\lambda^2\|\overrightarrow{v}\|_g^2 + 2\lambda g(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}) + \|\overrightarrow{u}\|_g^2 \geq 0 \qquad \forall\lambda \in \mathbb{R}$$

segue

$$\frac{\Delta}{4} = g(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u})^2 - \|\overrightarrow{v}\|_g^2\|\overrightarrow{u}\|_g^2 \leq 0$$

da cui

$$|g(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})| \leq \|\overrightarrow{u}\|_g \|\overrightarrow{v}\|_g$$

2) Supponiamo $\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}$ allora $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$ e si ha

$$\begin{aligned} |g(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})| &= |g(k\overrightarrow{v},\overrightarrow{v})| = |k|\,|g(\overrightarrow{v},\overrightarrow{v})| = |k|\,\|\overrightarrow{v}\|_g^2 = \\ &= \Big(|k|\,\|\overrightarrow{v}\|_g\Big)\|\overrightarrow{v}\|_g = \|\overrightarrow{u}\|_g\|\overrightarrow{v}\|_g \end{aligned}$$

Viceversa supponiamo sia $|g(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})| = \|\overrightarrow{u}\|_g \|\overrightarrow{v}\|_g$ ossia

$$\frac{\Delta}{4} = g(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u})^2 - \|\overrightarrow{v}\|_g^2\|\overrightarrow{u}\|_g^2 = 0$$

da cui

$$\lambda = -\frac{g(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}{\|\overrightarrow{v}\|_g^2}$$

e

$$\|\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}\|_g^2 = \lambda^2\|\overrightarrow{v}\|_g^2 + 2\lambda g(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}) + \|\overrightarrow{u}\|_g^2 = 0$$

ossia $\overrightarrow{u} = -\lambda\overrightarrow{v}$. ■

Proposizione 106 ***(Disuguaglianza triangolare)***

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|_g \leq \|\overrightarrow{u}\|_g + \|\overrightarrow{v}\|_g$$

Dim.

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|_g^2 &= g(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u}\|_g^2 + 2g(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}) + \|\overrightarrow{v}\|_g^2 \leq \\ &\leq \|\overrightarrow{u}\|_g^2 + 2\,|g(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u})| + \|\overrightarrow{v}\|_g^2\end{aligned}$$

per la Disuguaglianza di Schwarz

$$\|\overrightarrow{u}\|_g^2+2\,|g(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u})|+\|\overrightarrow{v}\|_g^2 \leq \|\overrightarrow{u}\|_g^2+2\,\|\overrightarrow{u}\|_g\,\|\overrightarrow{v}\|_g+\|\overrightarrow{v}\|_g^2 = \left(\|\overrightarrow{u}\|_g + \|\overrightarrow{v}\|_g\right)^2$$

da cui la tesi. ■

Dalla disguaglianza di Schwarz segue anche che

$$\frac{g(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u})}{\|\overrightarrow{u}\|_g\,\|\overrightarrow{v}\|_g} \leq \frac{|g(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u})|}{\|\overrightarrow{u}\|_g\,\|\overrightarrow{v}\|_g} \leq 1$$

quindi, se $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ e $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, possiamo definire il *coseno dell'angolo* $\widehat{\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}}$ ne seguente modo:

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}}) := \frac{g(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u})}{\|\overrightarrow{u}\|_g\,\|\overrightarrow{v}\|_g}$$

essendo il secondo membro compreso tra -1 e $+1$.

Vale il seguente Lemma:

Lemma 107 *Se $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, ..., \overrightarrow{u}_h$ sono vettori non nulli di uno spazio vettoriale euclideo tra loro ortogonali, allora essi sono indipendenti.*

Dim. Sia

$$\alpha_1\overrightarrow{u}_1 + \alpha_2\overrightarrow{u}_2 + ... + \alpha_h\overrightarrow{u}_h = \overrightarrow{0}$$

moltiplichiamo scalarmente ambo i bembri per $\overrightarrow{u}_1$:

$$g(\alpha_1\overrightarrow{u}_1 + \alpha_2\overrightarrow{u}_2 + ... + \alpha_h\overrightarrow{u}_h, \overrightarrow{u}_1) = 0$$

applicando le proprietà del prodotto scalare si ha

$$\begin{aligned}g(\alpha_1\overrightarrow{u}_1 + \alpha_2\overrightarrow{u}_2 + ... + \alpha_h\overrightarrow{u}_h, \overrightarrow{u}_1) &= \alpha_1 g(\overrightarrow{u}_1,\overrightarrow{u}_1) + \alpha_2 g(\overrightarrow{u}_2,\overrightarrow{u}_1) + ... + \alpha_h g(\overrightarrow{u}_h,\overrightarrow{u}_1) = \\ &= \alpha_1 g(\overrightarrow{u}_1,\overrightarrow{u}_1) = 0\end{aligned}$$

essendo $g(\overrightarrow{u}_i,\overrightarrow{u}_j) = 0$ per $i \neq j$.

Da $\overrightarrow{u}_1 \neq \overrightarrow{0}$ segue necessariamente $\alpha_1 = 0$. Ripetendo un procedimento analogo per gli altri vettori $\overrightarrow{u}_2, ..., \overrightarrow{u}_h$ si ottiene $\alpha_2 = ... = \alpha_h = 0$ e quindi la tesi. ■

Definizione 108 *Una base $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, ..., \overrightarrow{e}_n\}$ dello spazio vettoriale euclideo V_n si dice ortonormale se*

$$g(\overrightarrow{e}_i,\overrightarrow{e}_j) = \begin{cases} 0 \text{ se } i \neq j \\ 1 \text{ se } i = j \end{cases}$$

Teorema 109 *Ogni spazio vettoriale euclideo V_n ammette almeno una base ortonormale.*

Dim. La dimostrazione consisterà nell'illustrare un metodo, noto con il nome di *ortonormalizzazione di Gram-Schmidt*, che permette di ottenere una base ortonormale $\{\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, ..., \overrightarrow{e}_n\}$ di V_n a partire da una base qualsiasi $\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, ..., \overrightarrow{u}_n\}$, una tale forma di dimostrazione è detta *costruttiva.*

Poniamo $\overrightarrow{e}_1 = \frac{\overrightarrow{u}_1}{\|\overrightarrow{u}_1\|_g}$.

Dobbiamo ora scegliere un vettore $\overrightarrow{v}_2$ che sia ortogonale ad $\overrightarrow{e}_1$ e tale che $\mathcal{L}(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{v}_2) = \mathcal{L}(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2)$

$$\overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{u}_2 - g(\overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{e}_1)\overrightarrow{e}_1$$

Osserviamo che $\overrightarrow{v}_2 \perp \overrightarrow{e}_1$, infatti:

$$\begin{aligned} g(\overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{e}_1) &= g(\overrightarrow{u}_2 - g(\overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{e}_1)\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_1) = g(\overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{e}_1) - g(g(\overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{e}_1)\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_1) = \\ &= g(\overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{e}_1) - g(\overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{e}_1)g(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_1) = g(\overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{e}_1) - g(\overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{e}_1) = 0 \end{aligned}$$

essendo $g(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_1) = 1$

Si pone $\overrightarrow{e}_2 = \frac{\overrightarrow{v}_2}{\|\overrightarrow{v}_2\|_g}$. In generale al passo h-simo si sceglierà

$$\overrightarrow{v}_h = \overrightarrow{u}_h - \sum_{i=1}^{h-1} g(\overrightarrow{u}_h, \overrightarrow{e}_i)\overrightarrow{e}_i$$

e si porrà $\overrightarrow{e}_h = \frac{\overrightarrow{v}_h}{\|\overrightarrow{v}_h\|_g}$. ■

Osservazione.

Se in uno spazio vettoriale euclideo V_n fissiamo una base ortonormale allora, come già visto nello spazio $\mathbb{V}_3$, il prodotto scalare g e la norma assumono una forma più semplice:

$$\begin{aligned} g(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X^t Y \\ \|\overrightarrow{x}\|_g &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = X^t X \end{aligned}$$

Sia U un sottospazio vettoriale di V_n, si definisce *complemento ortogonale* di U il sottospazio, indicato con $U^\perp$, così definito:

$$U^\perp = \{\overrightarrow{x} \in V \,|g(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{u}) = 0 \quad \forall \overrightarrow{u} \in U\}$$

Verificare che $U^\perp$ è un sottospazio vettoriale è semplice, proviamo ad esempio che $U^\perp$ è chiuso rispetto la somma di vettori:

siano $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in U^\perp$ allora $g(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{u}) = g(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{u}) = 0 \;\; \forall \overrightarrow{u} \in U$

$$g(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}, \overrightarrow{u}) = g(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{u}) + g(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{u}) = 0 \;\; \forall \overrightarrow{u} \in U$$

da cui $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \in U^{\perp}$.

Osservazione.

Fissata una base $\{\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_h\}$ di U, per determinare $U^{\perp}$ è sufficiente chiedere che $g(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{u_i}) = 0 \quad \forall i = 1, ..., h$ ossia

$$g(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{u}) = 0 \quad \forall \overrightarrow{u} \in U \Leftrightarrow g(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{u_i}) = 0 \quad \forall i = 1, ..., h$$

infatti:

se $g(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{u}) = 0 \quad \forall \overrightarrow{u} \in U$ allora in particolare sarà $g(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{u_i}) = 0 \quad \forall i = 1, ..., h$

viceversa supponiamo $g(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{u_i}) = 0 \quad \forall i = 1, ..., h$ e sia $\overrightarrow{u} \in U$ da cui $\overrightarrow{u} = \alpha_1 \overrightarrow{u}_1 + ... + \alpha_h \overrightarrow{u}_h$

$$g(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{u}) = g(\overrightarrow{x}, \alpha_1 \overrightarrow{u}_1 + ... + \alpha_h \overrightarrow{u}_h) = \alpha_1 g(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{u}_1) + ... + \alpha_h g(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{u}_h) = 0$$

perchè in ogni addendo $g(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{u_i}) = 0$ per ipotesi.

Teorema 110 *Per ogni vettore $\overrightarrow{x} \in V$ esiste ed è unico il vettore $\overrightarrow{x}_U \in U$ tale che $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}_U \in U^{\perp}$. Il vettore $\overrightarrow{x}_U$ si dice proiezione ortogonale di $\overrightarrow{x}$ su U.*

Dim. Consideriamo una base ortonormale $\{\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_h\}$ di U, il vettore $\overrightarrow{x}_U$, se esiste, sarà un vettore del tipo $\overrightarrow{x}_U = \lambda_1 \overrightarrow{e}_1 + ... + \lambda_h \overrightarrow{e}_h$. Si tratta allora di determinare opportunemente i coefficienti λ_i imponendo che il vettore $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}_U$ appartenga ad $U^{\perp}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}_U \quad &\in \quad U^{\perp} \Leftrightarrow g(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}_U, \overrightarrow{e_i}) = 0 \quad \forall i = 1, ..., h \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad g(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{e_i}) - g(\overrightarrow{x}_U, \overrightarrow{e_i}) = 0 \quad \forall i = 1, ..., h \end{aligned}$$

essendo $\overrightarrow{x}_U = \sum_{j=1}^{h} \lambda_j \overrightarrow{e}_j$ si ottiene

$$g(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{e_i}) - g(\overrightarrow{x}_U, \overrightarrow{e_i}) = g(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{e_i}) - g(\sum_{j=1}^{h} \lambda_j \overrightarrow{e}_j, \overrightarrow{e_i}) = g(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{e_i}) - \sum_{j=1}^{h} \lambda_j g(\overrightarrow{e_j}, \overrightarrow{e_i}) = 0$$

poichè $\{\overrightarrow{e_i}\}$ è una base ortonormale $g(\overrightarrow{e_j}, \overrightarrow{e_i}) = \begin{cases} 1 \text{ se } j = i \\ 0 \text{ se } j \neq i \end{cases}$ e quindi

$$g(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{e_i}) - \sum_{j=1}^{h} \lambda_j g(\overrightarrow{e_j}, \overrightarrow{e_i}) = g(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{e_i}) - \lambda_i = 0$$

da cui $\lambda_i = g(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{e_i})$.

Abbiamo così provato che per ogni vettore $\overrightarrow{x} \in V$ esiste ed è unico il vettore $\overrightarrow{x}_U \in U$ tale che $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}_U \in U^{\perp}$

$$\overrightarrow{x}_U = g(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{e}_1)\overrightarrow{e}_1 + ... + g(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{e}_h)\overrightarrow{e}_h$$

I coefficienti $g(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{e}_1), ..., g(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{e}_h)$ sono detti *coefficienti di Fourier* di $\overrightarrow{x}$ rispetto al base ortonrmale $\{\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_h\}$. ■

Come conseguenza di questo teorema si ha che $V = U \oplus U^{\perp}$ da cui il nome "complemento" ortogonale per $U^{\perp}$.