Facoltà di Ingegneria

Dipartimento di Ingegneria dell'Innovazione

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN

Ingegneria Meccanica

Lezioni di:

CALCOLO E PROGETTO DI MACCHINE

Computing and Mechanical Design

Prof. Ing. Vito Dattoma

Argomenti delle lezioni

- ***Introduzione al corso***
- ***Metodi di risoluzione di problemi di campo***

  Metodi diretti e metodi approssimati: differenze finite, residui pesati
- ***Metodi variazionali***
- ***Metodo degli elementi finiti***

  Introduzione all'analisi strutturale

Elementi monoassiali

Matrici di rigidezza per sollecitazioni nel piano e nello spazio

Proprietà delle matrici di rigidezza

Risoluzione mediante il metodo degli spostamenti

Matrice dei coseni direttori

Matrice [A]

Assemblaggio di matrici

Applicazioni con uno o più elementi: sollecitazioni diverse

Metodo diretto di costruzione della matrice di rigidezza globale

Formulazione generale del P.L.V.

- ## *Elementi bidimensionali*

Funzioni di forma: continuità delle funzioni di forma

Formulazione dell'elemento triangolare a 3 nodi

Metodo generale per la costruzione delle funzioni di forma

Assemblaggio di matrici di rigidezza per elementi bidimensionali

Trave di Timoshenko

Elementi isoparametrici (famiglia serendipity)

Metodi di integrazione numerica: Newton-Cotes, Gauss - Punti di Gauss

- ## *Struttura di base di un codice agli elementi finiti*

Criteri di schematizzazione

Potenzialità di un codice agli elementi finiti

- ***Caso dinamico***

  Estensione del P.L.V. al caso dinamico
  Matrici di massa: lumped, consistent
  Frequenze proprie strutturali
  Velocità critiche degli alberi rotanti
  Condensazione statica e cinematica

- ***Dinamica delle macchine alternative***

  Oscillazioni torsionali degli alberi
  Sistemi equivalenti
  Analisi del momento motore
  Analisi delle condizioni di risonanza in un monocilindro e in un pluricilindro.

- ***Teoria delle piastre***
- ***Teoria dei gusci***
- ***Teoria dei dischi rotanti***
- ***Laminati in materiale composito***

- ***Fatica dei materiali e delle strutture***

  Meccanismi di frattura per fatica
  Rappresentazione dei dati di fatica
  Curva di Wohler
  Parametri che influenzano la fatica.
  Effetto di intaglio
  Diagrammi di progetto
  Danneggiamento cumulativo
  Legge di Miner

- ***Meccanica della frattura lineare elastica***

  Approccio energetico di Griffith
  Approccio tensionale
  Definizione di Tenacità
  Modello di Dudgale
  Legge di Paris
  Cenni sulla meccanica della frattura elastoplastica

- ***Riferimenti bibliografici***

Medri,G. «Cenni di progettazione di prodotto», Ed. Liguori.

Atzori,B. "Moderni metodi e procedimenti di calcolo nella progettazione meccanica", Ed. Laterza

Cook,R. – Malkus, D.S. – Plesha,M.E. - Witt,R.:"Concepts and applications of finite element analysis", John W. & sons

Belingardi,G. – "Il metodo degli elementi finiti nella progettazione meccanica", Levrotto & Bella, Torino

Belluzzi, O. " Scienza delle Costruzioni", Vol 3, Zanichelli.

Giovannozzi. R. «Costruzione di Macchine», Vol. 2, Patron

Vergani, L. «Meccanica dei materiali»

Atzori, B. «Appunti di Costruzione di Macchine», Ed. Cortina, Padova

Juvinall, R.C. –Marschek, K.M. «Fondamenti di Costruzione di Macchine», Ed. De Agostini, 2017

Dispense del corso

Introduzione al corso:
La progettazione metodica – «Design»

- ***Progettazione:*** *Azione centrale della «genopersistenza di un prodotto»*

- ***Genopersistenza di un prodotto*** *significa sviluppare, gestire, dismettere, ovvero più in dettaglio: concettualizzare, valutare,* ***progettare****, fare il prototipo,* ***sperimentare****, produrre, porre in listino, operare, assistere, modificare, gestire e dismettere*

- ***Scopo della progettazione*** *è la realizzazione del progetto di manufatti aventi specifiche finalità e utilità per la società*

- ***Definizione di progettazione:*** *Complesso di processi decisionali che investe diverse fasi fra le quali il* ***dimensionamento*** *o la* ***resistenza meccanica***

- ***Fasi di progetto:***

  Riconoscimento di un bisogno

  Definizione del problema

  Scelta e Disegno di soluzioni in alternativa

  Analisi, dimensionamento e ottimizzazione del disegno

  Valutazione

  Presentazione

- ***Scelta e disegno di diverse soluzioni***
  - ***Specificare l'obiettivo da raggiungere***
  - ***Scindere la macchina nelle sue operazioni fondamentali***
  - ***Elencare i possibili metodi di soluzione per ciascuna operazione (elettrico, meccanico, chimico,…..)***
  - ***Esaminare ogni soluzione in dettaglio***
  - ***Scegliere tra le varie soluzioni quella che sembra essere la migliore***
  - ***Disegnare dettagliatamente la soluzione scelta***
  - ***Calcolare la soluzione***

- ***Analisi, dimensionamento, ottimizzazione***

Fattori che interessano il progetto

Rispetto al volume

Resistenza

Deformabilità

Peso

Dimensione e forma

Rispetto alla superficie

Usura

Lubrificazione

Corrosione

Forze d'attrito

Calore generato per attrito

Sicurezza

Ecologia

impatto ambientale, acqua, inquinamento aria, rumore, conservazione delle risorse

Qualità della vita

Affibabilita' e manutenibilità

Estetica

Tipologie di progettazione:

rispetto al valore del manufatto

Progettazione per il costo – Design for cost – il prodotto meno costoso

Progettazione per la qualità – Design for quality – il prodotto migliore

Progettazione per il tempo di ciclo – Design for Cycle Time – il prodotto ottenibile più velocemente dalla produzione

Progetto per la tempestività di presentazione sul mercato – Design for Timeliness – il prodotto più rapidamente disponibile

rispetto al livello di innovazione

- ***Progettazione originale: Soluzione completamente nuova – Idea of making something that has not existed before – ma anche per un prodotto avente la stessa funzione di altri prodotti già esistenti.***
- ***Progettazione adattativa: Adattamento delle soluzioni progettuali di un prodotto esistente per una funzione diversa per la quale può essere richiesta la riprogettazione di parti o gruppi del sistema.***
- ***Progettazione di variante: Prevede solo variazioni di dimensioni, del materiale o altre modifiche non sostanziali per la funzione.***

Un problema di campo richiede che vengano determinate le distribuzioni spaziali di una o più variabili di campo.

Es. di problemi di campo sono:

- trasferimento di calore
- analisi strutturale (Elast. e Plastica)
- campi magnetici, elettrostatici
- campi gravitazionali
- analisi dinamica…….

Da un punto di vista matematico un problema di campo è descritto mediante equazioni differenziali o integrali che può essere posto nella forma.

$$\partial[U] = F$$

$\partial[\ ]$ è un operatore nel quale sono state incluse le condizioni al contorno;

F è una funzione data nei punti del dominio in cui si vuole risolvere il problema, inclusi i punti del contorno;

U è la funzione incognita

Esistenza della soluzione

I dati non devono essere incompatibili

Unicità della soluzione

I dati non devono essere insufficienti

La risoluzione del problema comporta:

Stabilità della soluzione

Errori nei dati non perturbano la soluzione

Dipendenza continua dai dati

La soluzione può essere raggiunta attraverso:

- Metodi diretti:

Consiste nell'integrare le equazioni differenziali del problema tenendo conto delle condizioni al contorno per ottenere la soluzione continua esatta.

- Metodi approssimati:

Consistono nella sostituzione delle funzioni originarie con un sistema di equazioni algebriche la cui struttura dipende dal tipo di approssimante scelto.

La formulazione può essere:

- alle differenze finite;
- ai residui pesati;
- variazionale (Ritz, PLV).

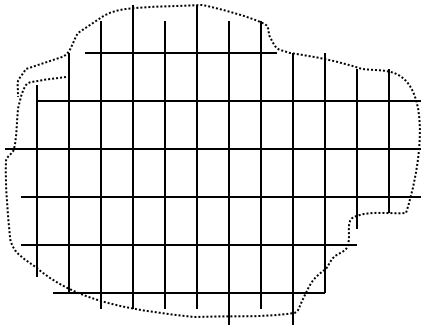
Metodo delle differenze finite

Consiste nell'approssimare il dominio continuo con una serie di punti discreti.

Invece di ottenere una soluzione continua di U nell'intero dominio, si ottiene il valore di U solo nei punti isolati scelti

Fisicamente si costruisce un modello a parametri concentrati e per questo si scrivono le equazioni di equilibrio.

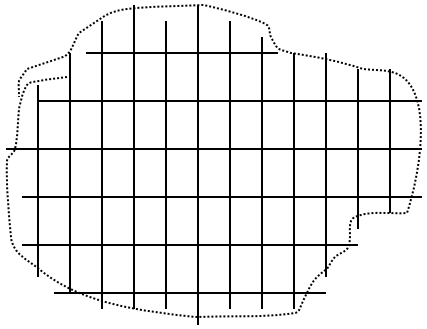
Matematicamente la formulazione continua è ridotta a discreta sostituendo alle variazioni infinitesime (derivate) delle variazioni finite (differenze).



Metodo delle differenze finite

Con questa formulazione le equazioni differenziali originarie vengono sostituite da un sistema algebrico lineare di tante equazioni quanti sono i nodi del reticolo con tante incognite quanti sono i parametri che si vogliono determinare nei nodi.

Tale metodo trova difficoltà nell'imposizione delle condizioni al contorno specialmente nel caso in cui i punti del reticolo non possono cadere esattamente sul contorno; inoltre ci sono difficoltà di ordine matematico sia per il raggiungimento della stabilità della soluzione, sia per la velocità lenta della convergenza alla soluzione.



Metodi dei residui pesati

Nella quasi totalità dei metodi di approssimazione, la soluzione è governata da relazioni tipo

$$U_n = \Sigma_N A_{ni} * W_i$$

dove

A_{ni} sono parametri incogniti da determinare in modo che U_n assuma valori della soluzione cercata in punti prescelti del dominio di definizione.

W_i sono funzioni opportune del punto (funz. base) la cui unica proprietà è quella di soddisfare le condizioni al contorno sia individualmente che come combinazione lineare.

Al tendere ad infinito di N,U_n tende alla soluzione esatta se le le funzioni W_i rappresentano un sistema "completo" di funzioni, intendendo per sistema completo la corrispondenza fra variabilità dell'incognita e andamento della funzione scelta.

In un problema di campo il sistema di equazioni differenziali che lo definisce può anche essere scritto come segue

$$\partial[U] - F = 0$$

Tale sistema sarà soddisfatto se U è la soluzione esatta.

Se nel sistema si sostituisce la soluzione approssimata U_n la differenza scritta sopra non sarà zero, ma pari ad un residuo

$$\partial[U_n] = F_n \qquad \partial[U] - F_n = R$$

Si dice che la soluzione del problema approssimato converge a quella esatta se tende a zero la differenza

$$\mathbf{|U - U_n|}$$

fra la soluzione esatta e quella approssimata (tende a zero la norma dell'errore R per n tendente all'infinito, essendo n il grado di approssimazione).

Talvolta la valutazione della convergenza viene effettuata indirettamente attraverso la funzione di contorno

$R = F - F_n$ **che è detta funzione *errore o residuo.***

Il vantaggio di questo modo di operare sta nel fatto che la funzione F è nota, mentre non lo è U.

I coefficienti A_{ni} della combinazione lineare si ottengono annullando la media pesata dei Residui (errori) sull'intero dominio e/o sul contorno mediante relazioni tipo

$$\int_v R * P_i = 0$$

dove P_i sono le funzioni peso per il calcolo della media.

In altre parole l'espressione precedente afferma che la funzione residuale R, pesata mediante il fattore P_i, ha un valore medio pari a zero sul dominio V.

La scelta delle funzioni peso può essere fatta in vari modi e quindi si possono avere diverse varianti del metodo, come:

- il metodo delle collocazioni

le cui funzioni peso in alcuni punti o sotto-regioni del dominio possono assumere valore pari a zero.

- il metodo dei minimi quadrati

in cui la funzione peso è del tipo $P_i = \partial R/\partial A_{ni}$ e in cui le funzioni A_{ni} sono scelte in modo da minimizzare una ulteriore funzione definita come la somma dei quadrati dei residui in ogni punto.

$$I = \int R^2 [A_{ni}, x]\, dV \qquad \partial I/\partial A_{ni} = 0$$

- il metodo Galerkin (di gran lunga più usato)
  in cui la funzione peso è del tipo $P_i = \partial U_n / \partial A_{ni}$

I problemi di meccanica dei fluidi, almeno per alcuni tipi di flusso, sui campi termici o di trasmissione del calore sono tipici per l'applicazione di questi metodi in quanto tutto quello che è disponibile sono le equazioni differenziali e le condizioni al contorno.

Questi metodi vengono applicati in problemi di campo dove non esiste o è difficilmente esprimibile un funzionale caratterizzato dalla stazionarietà o per i quali non è possibile scrivere l'equazione dei lavori virtuali.

Metodi variazionali

Una vasta classe di problemi di meccanica e di meccanica strutturale ha la possibilità di essere formulata in una doppia maniera:

- sotto forma di equazioni di stato (per rappresentare il comportamento locale dell'elemento o sistema);
- sotto forma di principio di minimo che deriva dalla dimostrazione che la soluzione equilibrata del sistema meccanico o strutturale è quella che rende minima l'energia potenziale (funzione che rappresenta il comportamento globale del sistema).

Il principio di minimo è molto spesso applicato alla meccanica dei continui perché le condizioni di equilibrio si trasformano in condizioni di stazionarietà.

A titolo esplicativo: se A è un insieme di funzioni continue in [a,b] e se

$$G(F) = \int_a^b F(x)\, dx$$

è il valore dell'integrale della funzione F, la relazione che associa ad $F(x) \in A$ il rispettivo $G(F) \in R$, è un funzionale.

Nel caso specifico della meccanica del continuo si tratta di ricercare nella classe delle funzioni ammissibili (definite nel dominio del funzionale), una funzione tale che, soddisfacendo a determinate condizioni al contorno, renda il funzionale stazionario.

Tale ricerca va sotto il nome di *calcolo delle variazioni.*

Nel caso dello studio di una funzione continua e derivabile n volte, l'annullamento della sua derivata prima rappresenta la condizione necessaria per la sua stazionarietà.

Nel caso più generale di una funzione di funzione continua del tipo F(x,φ,φ') con derivate parziali continue rispetto a ciascun argomento, **si dimostra** che affinchè φ=y(x) renda stazionario il funzionale G(F), è necessario che y(x) nel suo dominio soddisfi l'equazione di ***EULERO*** che assume la forma generale

$$\partial F / \partial \varphi - d / dx (\partial F / \partial \varphi') = 0$$

Questa equazione differenziale non è sempre integrabile direttamente e per questo motivo molto spesso si ricorre a metodi approssimati sostituendo le funzioni φ(x), con funzioni $\varphi_n(x)$ che approssimano alla soluzione esatta col tendere a infinito dei termini che le costituiscono.

In dinamica l'equazione di Eulero-Lagrange è conosciuta con le sostituzioni seguenti

$$\partial F / \partial \varphi = \partial \pounds / \partial q_j \qquad \partial F / \partial \varphi' = \partial \pounds / \partial q'_j$$

e quindi $- d/dt\,(\partial \pounds / \partial q'_j) + \partial \pounds / \partial q_j = 0$ con $\pounds = T - \Pi$

e quindi $-d/dt\,(\partial \pounds / \partial q'_j) + \partial \pounds / \partial q_j = 0$ con $\pounds = T - \Pi$

dove £ è la funzione di Lagrange (energia totale del sistema a n gradi di libertà) T è l'energia cinetica totale

Π è l'energia potenziale dei carichi applicati (lavoro utile, energia di deformazione ed anche azioni dissipative se non sono trascurabili)

L'indice j sta ad indicare che vanno scritte tante equazioni di Lagrange quanti sono i gradi di libertà q_j del sistema.

Poiché Π è indipendente dal tempo, l'equazione si può scrivere nella forma seguente

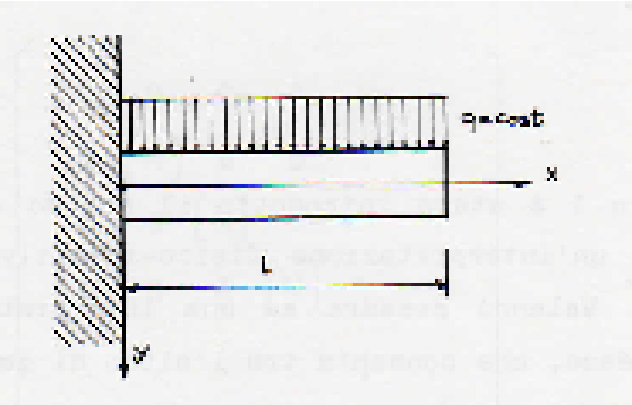
$$-d/dt\,(\partial T / \partial q'_j) + \partial T / \partial q_j - \partial \Pi / \partial q_j = 0$$

E' importante evidenziare che tutti i metodi di approssimazione di origine variazionale si limitano ad assicurare che il funzionale tenda al suo valore minimo senza dare una idea della convergenza puntuale delle approssimanti.

Nei problemi di elasticità lineare statica si dimostra che il funzionale da minimizzare è **l'energia potenziale totale (metodo del potenziale)** del sistema intesa come somma dell'energia di deformazione (energia interna L_{int}) e del lavoro dei carichi esterni (Ω), compreso quello delle forze di massa

$$\Pi = L_{int} + \Omega$$

Essendo nulla l'energia cinetica, l'equazione di Lagrange si riduce a $\partial \Pi / \partial q_j = 0$



L'energia elastica è

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EJ} dx$$

L'eq. della linea elastica

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EJ} \qquad y'' EJ = -M$$

L'energia potenziale totale nella generica sezione x

$$\Pi = \int_0^L \left[\frac{(EJ)^2 y''^2}{2EJ} - qy \right] dx$$

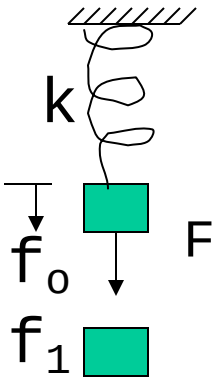
è un esempio di funzionale

Def. funzionale: una relazione che ad ogni elemento di un insieme A di funzioni associa uno ed un solo elemento di un insieme B di numeri reali.

Nel caso dell'esempio sottostante, si supponga che il sistema si porti dalla configurazione f_o in quella f_1 con uno spostamento elastico pari a $f_1 - f_0 = f$

Se la molla non dissipa energia, l'energia potenziale di deformazione del sistema (lavoro delle forze interne) dipende solo dallo spostamento f e vale $L_{int} = 1/2kf^2$

Similmente, il lavoro della forza esterna F dipende dal solo spostamento f e vale F*f con riguardo alla direzione dello spostamento. Pertanto $G(f) = \Pi = L_{int} + \Omega = 1/2kf^2 - Ff$



$$d\Pi/df = kf - F = 0 \qquad F = k*f$$

Se la derivata del potenziale viene scritta nel modo seguente $d\Pi = (kf - F)df = 0$

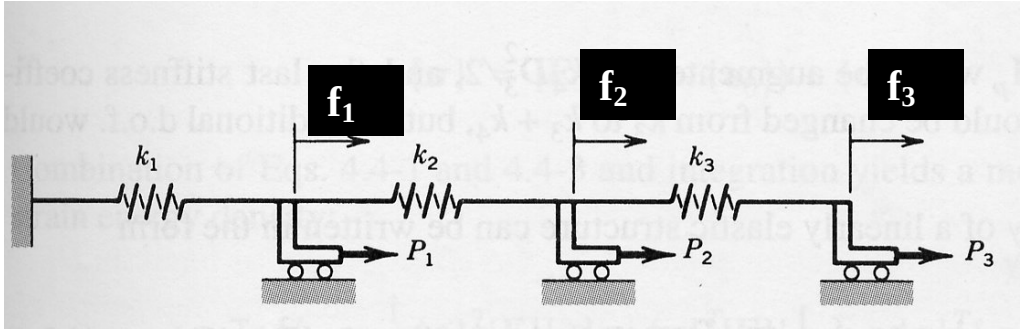
l'espressione $(kf - F)\, df = 0$

è il risultato dell'applicazione del principio dei lavori virtuali che in questa forma esprime che *è zero il lavoro di tutte le forze (esterne ed interne) durante un piccolo spostamento ammissibile df dalla configurazione di equilibrio del sistema*. La qualcosa ha come conseguenza che il potenziale, nella configurazione di equilibrio del sistema, assume il valore minimo ed è stabile.

Si può affermare, quindi, che

- **Fra tutte le configurazioni di un sistema conservativo, quelle che soddisfano le equazioni di equilibrio rendono stazionaria l'energia potenziale rispetto a piccole variazioni di spostamento.**
- **Quando le forze esterne ed interne sono conservative, il principio dei lavori virtuali porta al principio di stazionarietà dell'energia potenziale.**

Nel caso di più gradi di libertà, come nella figura, con vincoli imposti, il potenziale, funzione degli spostamenti, si potrà scrivere



$\Pi = L_{int} + \Omega =$

$$= 1/2k_1f_1^2 + 1/2k_2(f_2-f_1)^2 + 1/2k_3(f_3-f_2)^2 - P_1f_1 - P_2f_2 - P_3f_3$$

Applicando il principio di stazionarietà, deve risultare

$$d\Pi = 0 \text{ dove } d\Pi = \Sigma\, \partial\Pi / \partial f_i\, df_i$$

per qualunque piccolo spostamento df_i
la qual cosa accade se si annullano separatamente i coefficienti $\partial\Pi / \partial f_i$ per i = 1,2,…n.

Risulta dunque

$$\begin{cases} k_1 f_1 - k_2(f_2 - f_1) - P_1 = 0 \\ k_2(f_2 - f_1) - k_3(f_3 - f_2) - P_2 = 0 \\ k_3(f_3 - f_2) - P_3 = 0 \end{cases}$$

Che può essere scritta in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix}$$

Ovvero $[\mathbf{K}]\{\mathbf{f}\} = \{\mathbf{P}\}$

Con **K** matrice di rigidezza, **f** vettore degli spostamenti e **P** vettore delle forze (nella forma generale: attive e vincolari)

Metodo di Ritz

$$\Pi = \int_0^L \left[\frac{(EJ)y''^2}{2} - qy \right] dx \qquad \Pi(x,\varphi,\varphi') = F(x,\varphi,\varphi') \text{ con } \varphi = y(x)$$

Il metodo di Ritz consiste nello scrivere un opportuno funzionale che possegga la caratteristica della stazionarietà e nel sostituire la funzione φ con una del tipo

$$\varphi_n = a_{n1}\, W_1(x,y,z) + a_{n2}\, W_2(x,y,z) + \ldots + a_{nn} W_n(x,y,z)$$

dove

le funzioni W_i sono funzioni note, dette *funzioni base*, mentre le costanti a_{ni} sono incognite da determinare (*coordinate generalizzate*).

In tal modo la stazionarietà del funzionale

$$G(U_n) = G(a_{n1}, a_{n2}, \ldots a_{nn}) = \Pi(\varphi_n) = \Pi(a_{n1}, a_{n2}, \ldots a_{nn}).$$

si ottiene Imponendo a zero le derivate prime del Π rispetto alle a_{ni}

ottenendo in tal modo un sistema di n equazioni algebriche uguale alle incognite da determinare.

Non è comunque sempre facile decidere a quale termine della funzione U_n ci si debba fermare. L'ordine di troncamento da applicare all'espressione polinomiale completa è suggerito dal problema che si deve analizzare e dall'approssimazione che si desidera ottenere.

Le equazioni del sistema sono di ordine più basso rispetto al grado del funzionale, essendo funzioni derivate, e pertanto la ricerca della soluzione è facilitata. Il che non accade nel caso del metodo dei *residui pesati.*

Naturalmente ci sono delle condizioni per la scelta delle funzioni W_i che devono essere rispettate:

- Devono essere continue con le loro derivate prime;

Metodi variazionali – metodo di Ritz

• Devono soddisfare individualmente le condizioni al contorno e di vincolo. Generalmente sono funzioni polinomiali linearmente indipendenti e ammissibili per il problema in esame.

Il metodo di Ritz può essere usato solo in quei problemi per i quali può essere definito un funzionale che sia caratterizzato da stazionarietà. Questa caratteristica è propria dei sistemi conservativi.