DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E FISICA “ENNIO DI GIORGI”
Corso di Laurea Magistrale in Matematica
Scheda del corso di Istituzioni Analisi Superiore I – A.A. 2017/18, I semestre – 6 CFU
Prof. Diego Pallara

Obiettivi del corso Il corso si propone di far conoscere agli studenti gli elementi di base della teoria astratta della misura e i metodi elementari dell'Analisi funzionale negli spazi di funzioni sommabili e negli spazi di Hilbert, attraverso la discussione delle serie di Fourier e della trasformata di Fourier. In particolare, lo studente dovrebbe essere in grado di risolvere problemi del tipo:
Determinare proprietà delle misure e delle funzioni misurabili.
Fornire semplici stime di integrali.
Discutere proprietà elementari della geometria degli spazi di Hilbert.
Determinare proprietà e applicazioni delle trasformate di Fourier di funzioni.
Programma del corso

1. *Teoria della misura:* Richiami sulle proprietà delle famiglie di insiemi. Anelli, algebre, σ-algebre. Funzioni di insieme: additività, σ-additività e subadditività. Spazi misurabili, misure positive e loro proprietà (monotonia, criterio di coincidenza). Misure esterne e teorema di estensione di Carathéodory. Misure di Borel regolari in spazi metrici. Funzioni misurabili, integrale di Lebesgue rispetto a una misura positiva. Teoremi di Levi, Fatou, Lebesgue sul passaggio allimte sotto il segno di integrale e applicazioni agli integrali dipendenti da parametri. Costruzione della misura prodotto e teorema di Fubini-Tonelli. Misura di Lebesgue in $\mathbb{R}$ e in $\mathbb{R}^n$. Misura immagine e cambiamento di variabili negli integrali multipli.

2. *Spazi L^p:* Nozioni introduttive sugli spazi normati (completezza, separabilità). Funzioni convesse coniugate, norme L^p, $1 \leq p \leq \infty$. Diseguaglianze di Cauchy-Schwarz, Hölder. Minkowski, Jensen. Completezza degli spazi L^p, separabilità. Teoremi di Lusin, Egorov; diseguaglianze di Chebyšhev, Markov. Prodotto di convoluzione e diseguaglianza di Young. Funzioni $C_c^\infty(\Omega)$, approssimazione dell'identità, approssimazione di funzioni L^p con funzioni regolari, densità di $C_c^\infty(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$.

3. *Spazi di Hilbert complessi e serie di Fourier:* Prodotti scalari, norme indotte, diseguaglianza di Cauchy-Schwarz astratta, identità del parallelogramma. Teoremi sulla proiezione su un sottospazio chiuso proprio e su un convesso chiuso. Sistemi ortonormali, definizione di base di Hamel e di base di Schauder, basi hilbertiane ortonormali e caratterizzazione della completezza di un sistema ortonormale. Funzionali lineari continui e limitati su uno spazio di Banach, duale e biduale topologico. teorema di rappresentazione di Riesz per spazi di Hilbert. Serie di Fourier in un intervallo. Lemma di Riemann-Lebesgue, nucleo di Dirichlet, convergenza puntuale di una serie di Fourier sotto l'ipotesi del Dini, completezza del sistema trigonometrico in $L^2(-\pi, \pi)$.

4. *Trasformata di Fourier:* La Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Proprietà della trasformata. Regole algebriche e analitiche di trasformazione. Convoluzione. Teorema di inversione. La Trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Principali trasformate. Applicazioni: il problema di Dirichlet nel semispazio (nucleo di Poisson) e l'equazione del calore in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Equazione del calore e moto browniano.

Conoscenze Preliminari: Analisi matematica di base; topologia generale; algebra lineare.
Modalità di verifica delle conoscenze acquisite: l'esame consiste di due prove: nella prima (scritta) è richiesta la risoluzione di esercizi del tipo elencato. Per accedere alla seconda prova bisogna superare la prima. Nella seconda prova (orale) è richiesta l'esposizione di risultati presentati nel corso: definizioni, enunciati, dimostrazioni, esempi.
Orario di ricevimento: L'orario di ricevimento è pubblicato sulla pagina
`https : //www.matfis.unisalento.it/scheda_personale/ − /people/diego.pallara`
Testi di riferimento:
Ambrosio, Da Prato, Mennucci: *Introduction to measure theory and integration*, Ed. Della Normale 2011
Haïm Brézis: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations,* Springer 2010.
A.N. Kolmogorov, S.V. Fomin: *Elementi di teoria delle funzioni e di Analisi Funzionale,* MIR 1980.
E. Lieb, M. Loss: *Analysis,* AMS 2001.