

Prova scritta di Algebra I

(durata: 2 ore)

15 giugno 2018

Esercizio n.1

Dimostrare che

- (1) 13 divide $2^{70} + 3^{70}$,
- (2) $11 \cdot 31$ divide $20^{15} - 1$.

Esercizio n.2

Siano $a, m \in \mathbb{Z}$ e $A := a + m\mathbb{Z}$. Poniamo

$$\mathcal{S} := \{Y \mid \exists X \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \quad Y = AX + X\}$$

Dimostrare che

- (1) \mathcal{S} un sottogruppo di $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$,
- (2) $YZ \in \mathcal{S}$, per ogni $Y \in \mathcal{S}$ e $Z \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$,
- (3) $A + \bar{1}$ invertibile $\iff \mathcal{S} = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Esercizio n.3 Definiamo sul prodotto diretto G del gruppo $(\mathbb{Z}, +)$ con se stesso la seguente relazione

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z} \quad (a, b) \sim (c, d) \iff 2(a - c) = 5(b - d).$$

Dimostrare che

- (1) la relazione \sim una congruenza di G ,
- (2) il quoziente G/\sim è isomorfo al gruppo $(\mathbb{Z}, +)$.