

Prova scritta di Algebra I

(durata: 2 ore)

11 settembre 2018

Esercizio n.1

Sia p un numero primo. Dimostrare che, per ogni $z \in \mathbb{Z}$, valgono

(1) $\text{mcd}(pz, p+z) \in \{1, p, p^2\}$

(2) se $\text{mcd}(p, z) = 1$, allora $\text{mcd}(pz, p+z) = 1$.

Esercizio n.2

Definiamo sul prodotto cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ la seguente operazione ponendo, per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$,

$$(a, b) * (c, d) = (ac, bc + d)$$

Determinare

(1) il gruppo $\mathcal{U}(M)$ degli elementi invertibili del monoide $(M, *)$,

(2) l'insieme degli elementi di $\mathcal{U}(M)$ di ordine 2.

Esercizio n.3

Sia G un gruppo tale che $(ab)^3 = a^3b^3$, per ogni $a, b \in G$.

(1) Dimostrare che $a^2b^2 = (ba)^2$, per ogni $a, b \in G$.

(2) Dimostrare che l'insieme

$$N := \{a \mid a \in G, \exists x \in G \ a = x^2\}$$

un sottogruppo normale di G .