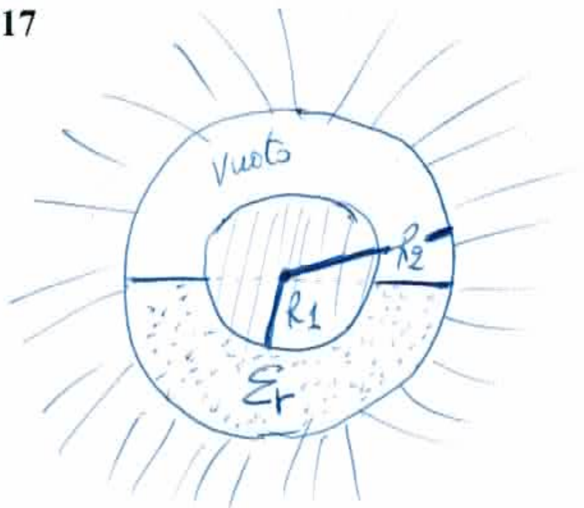
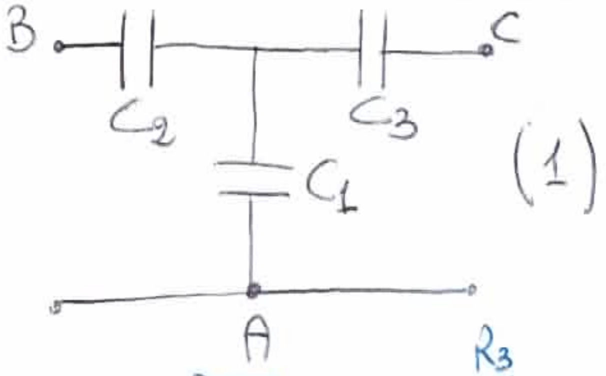
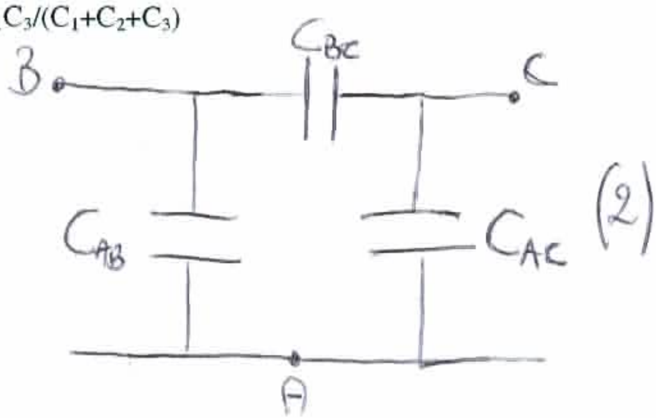
Prova Scritta di FISICA GENERALE II
Ingegneria Civile
16 Gennaio 2017

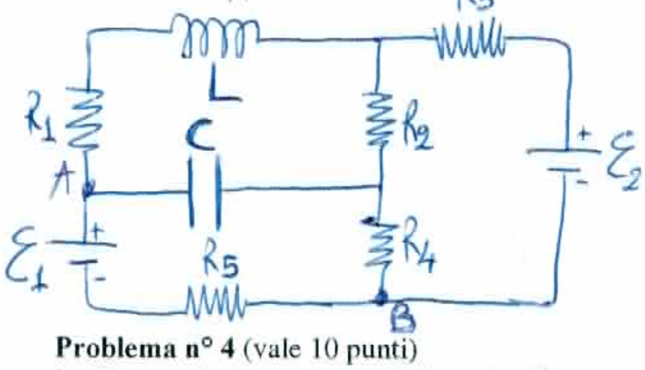
Problema n° 1 (10 punti)
Con riferimento alla figura a destra, si consideri un condensatore sferico, in cui l'armatura interna (recante carica **+Q**) e quella esterna (recante carica **–Q**) hanno raggio $\mathbf{R_1}$ e $\mathbf{R_2}$, rispettivamente. Lo spazio tra le armature è parzialmente riempito con un materiale dielettrico isotropo, lineare ed omogeneo, caratterizzato da costante dielettrica relativa ε_r. Determinare:
- la capacità del condensatore;
- le cariche di polarizzazione indotte rispettivamente, nel volume e su ciascuna superficie del dielettrico.



Problema n° 2 (8 punti)
Siano date le reti di condensatori (1) e (2), rappresentate in basso, per le quali i potenziali applicati ai punti A, B, C valgono φ_A, φ_B e φ_C, rispettivamente. *Verificare* che le due configurazioni sono equivalenti se sussistono le seguenti relazioni:
$C_{AB}=C_1C_2/(C_1+C_2+C_3)$; $C_{BC}=C_2C_3/(C_1+C_2+C_3)$; $C_{AC}=C_1C_3/(C_1+C_2+C_3)$

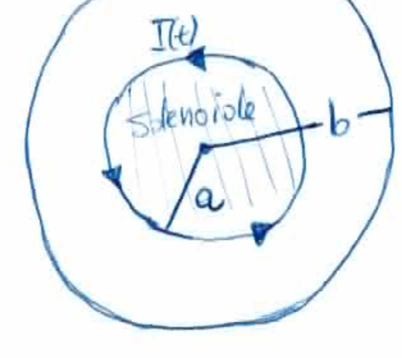




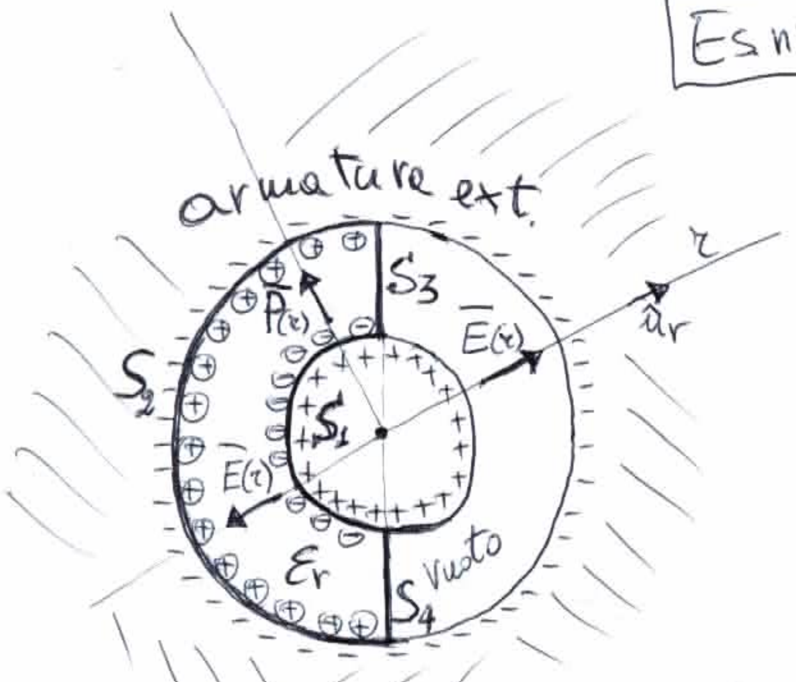


Problema n° 3 (10 punti)
Il circuito rappresento nella figura a sinistra è a regime. Determinare:
- carica e polarità del condensatore;
- la differenza di potenziale tra i punti **A** e **B;**
- l'energia immagazzinata nell'induttore.

Problema n° 4 (vale 10 punti)
La figura a destra rappresenta la sezione trasversale di un solenoide, di raggio **a**, costituito da spire avvolte con densità lineare **n** e percorse da corrente variabile nel tempo $\mathbf{I(t)= I_0 + I_0 t}$. Una spira circolare di raggio **b**, resistenza totale **R** ed induttanza **L**, è posta nel vuoto all'esterno [illegible] DEL solenoide [illegible], coassialmente e perpendicolarmente all'asse dello stesso (vedi figura a destra). Si determini il verso e l'andamento temporale dell'intensità della corrente che scorre nella spira.



Es n° 1



$\pm$ } Cariche libere sulle armature del condensatore

σ_{p1}, σ_{p2}

$\ominus$ $\oplus$ } Cariche di polarizzazione (sulle superfici S_2 e S_1 del (entro il) dielettrico

$\sigma_{p3}=0 \quad \sigma_{p4}=0 \quad \rho_p=0$

Essendo la differenza di potenziale fra le armature costante, $\bar{E}(R_1\le r<R_2)$ deve essere costante sia entro il dielettrico che nella regione vuota; inoltre, data la simmetria, deve essere radiale.

Applicando la legge di Gauss, si trova:

$$\varepsilon_0 \underset{\substack{\text{semisfera}\\ \text{vuota}\\ R_1\le r<R_2}}{\int} \bar{E}(R_1\le r<R_2)\cdot d\bar{S} + \varepsilon_0\varepsilon_r \underset{\substack{\text{semisfera con}\\ \text{dielettrico}\\ R_1\le r<R_2}}{\int} \bar{E}(R_1\le r<R_2)\cdot d\bar{S} = Q \implies$$

[equivale a

$$\underset{\substack{\text{sup. sfer.}\\ R_1\le r\le b}}{\oint} \bar{D}\cdot d\bar{S} = \underset{\substack{\text{semisfera}\\ \text{vuoto}}}{\int} \bar{D}_{vuoto}\cdot d\bar{S} + \underset{\substack{\text{semisfera}\\ \text{con dielettr.}}}{\int} \bar{D}_{diel}\cdot d\bar{S} = Q$$

dove $D_{vuoto} = \varepsilon_0 \left|\bar{E}(R_1\le r<R_2)\right|$ e $D_{diel} = \varepsilon_0\varepsilon_r \left|\bar{E}(R_1\le r<R_2)\right|$]

$$\implies \varepsilon_0 \left|\bar{E}(R_1\le r<R_2)\right| 2\pi r^2 + \varepsilon_0\varepsilon_r \left|\bar{E}(R_1\le r<R_2)\right| 2\pi r^2 = Q \implies$$

$$\implies \left|\bar{E}(R_1\le r<R_2)\right| = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon_r+1)r^2}$$

In definitiva, dentro il condensatore $\bar{E}(R_1\le r<R_2) = \dfrac{Q\,\hat{u}_r}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon_r+1)r^2}$

La differenza di potenziale fra le armature vale:

$$\varphi_{\substack{arm\\ int}} - \varphi_{\substack{arm\\ ext}} = -\int_{arm\, ext}^{arm\, int} \bar{E}(R_1\le r<R_2)\cdot d\bar{r} = -\int_{R_2}^{R_1} \frac{Q\,dr}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon_r+1)r^2} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon_r+1)}\,\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}$$

La capacità del condensatore pertanto è:

$$C = \frac{Q}{\left(\varphi^{arm}_{int} - \varphi^{arm}_{ext}\right)} = 2\pi\left(\varepsilon_r+1\right)\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

In alternativa:

$$C = \frac{1}{2} C_{vuoto} + \frac{1}{2} C_{diel} =$$

dove: C_{vuoto} = capacità del condensatore sferico nel vuoto

C_{diel} = capacità del condensatore sferico interamente riempito di dielettrico

con $\frac{1}{2} C_{vuoto}$ e $\frac{1}{2} C_{diel}$ collegati in parallelo

$$= \frac{1}{2} 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} + \frac{1}{2} 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} =$$

$$= 2\pi\varepsilon_0\left(\varepsilon_r+1\right)\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

NOTA

Le densità di carica libera che si affacciano sulle armature sono diverse sulle due emisfere:

- sull'armatura interna:

$$\sigma_{vuoto}(r=R_1) = \overline{D}_{vuoto}(r=R_1)\cdot\hat{u}_r = \varepsilon_0\left|\overline{E}(r=R_1)\right| = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_r+1)R_1^2}$$

$$\sigma_{diel}(r=R_1) = \overline{D}_{diel}(r=R_1)\cdot\hat{u}_r = \varepsilon_0\varepsilon_r\left|\overline{E}(r=R_1)\right| = \frac{\varepsilon_r Q}{2\pi(\varepsilon_r+1)R_1^2}$$

Verifica: $\sigma_{vuoto}(r=R_1)\, 2\pi R_1^2 + \sigma_{diel}(r=R_1)\, 2\pi R_1^2 = Q$

- sull'armatura esterna:

$$\sigma_{vuoto}(r=R_2) = \overline{D}_{vuoto}(r=R_2)\cdot\left(-\hat{u}_r\right) = \varepsilon_0\left|\overline{E}(r=R_2)\right| = \frac{-Q}{2\pi(\varepsilon_r+1)R_2^2}$$

$$\sigma_{diel}(r=R_2) = \overline{D}_{diel}(r=R_2)\cdot\left(-\hat{u}_r\right) = \varepsilon_0\varepsilon_r\left|\overline{E}(r=R_2)\right| = \frac{-\varepsilon_r Q}{2\pi(\varepsilon_r+1)R_2^2}$$

Verifica: $\sigma_{vuoto}(r=R_2)\, 2\pi R_2^2 + \sigma_{diel}(r=R_2)\, 2\pi R_2^2 = -Q$

Entro il dielettrico (omogeneo, lineare, isotropo), le densità di polarizzazione vale:

$$\overline{P}(r) = \overline{P}(R_1 \le r \le R_2) = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\,\overline{E}(R_1 \le r < R_2) =$$

$$= \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\frac{Q\,\hat{u}_r}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon_r+1)r^2} = \frac{(\varepsilon_r - 1)\,\hat{u}_r}{2\pi(\varepsilon_r+1)r^2}$$

Le cariche di polarizzazione superficiali valgono:

<u>su S_1</u>: $\sigma_{p1} = \overline{P}(r=R_1)\cdot(-\hat{u}_r) = \dfrac{-(\varepsilon_r-1)}{2\pi(\varepsilon_r+1)R_1^2} < 0$

<u>su S_2</u>: $\sigma_{p2} = \overline{P}(r=R_2)\cdot\hat{u}_r = \dfrac{\varepsilon_r - 1}{2\pi(\varepsilon_r+1)R_2^2} > 0$

<u>su S_3</u> = $\sigma_{p3} = \overline{P}(R_1 \le r \le R_2)\cdot\hat{u}_t = 0$ ($\overline{P}$ è ortogonale alla normale di S_3)

<u>su S_4</u>: $\sigma_{p4} = \overline{P}(R_1 \le r \le R_2)\cdot\hat{u}_t = 0$ ($\overline{P}$ è ortogonale alla normale di S_4)

La carica totale di polarizzazione superficiale vale:

$$Q_p^S = \sigma_{p1}\,2\pi R_1^2 + \sigma_{p2}\,2\pi R_2^2 = 0$$

Quindi, la carica totale di polarizzazione nel volume è:

$$Q_p^V = -Q_p^S = 0$$

D'altra parte, la densità di carica di polarizzazione volumetrica vale:

$$\rho_P = -\overline{\nabla}\cdot\overline{P}(r) = -\left[\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}\right] =$$

$$= -\frac{(\varepsilon_r - 1)}{2\pi(\varepsilon_r+1)}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right]\right] =$$

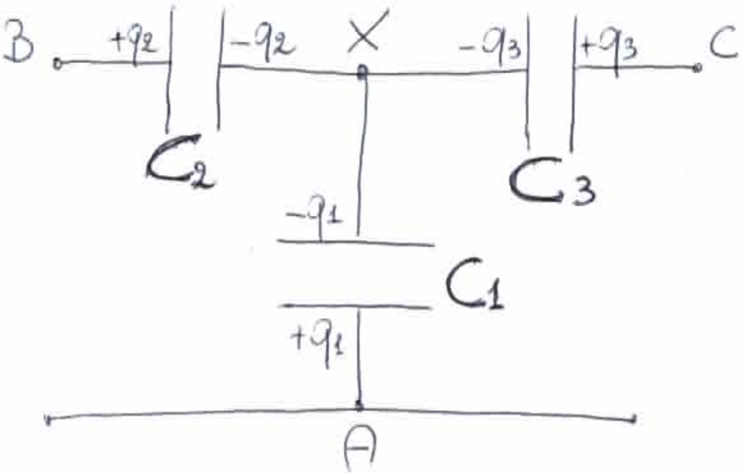
$$= -\frac{(\varepsilon_r - 1)}{2\pi(\varepsilon_r+1)}\left[3(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} - 3(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}(x^2+y^2+z^2)\right] =$$

$$= -\frac{(\varepsilon_r - 1)}{2\pi(\varepsilon_r+1)}\left[3(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} - 3(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\right] = \emptyset \;!!$$

$\boxed{\text{Es. n°2}}$

Assegnando arbitrariamente le cariche alle armature dei condensatori, la rete (1) è descritta dalle seguenti relazioni:

$$(1)\quad \begin{cases} -q_1 - q_2 - q_3 = 0 \\ \varphi_B - \varphi_X = \dfrac{q_2}{C_2} \\ \varphi_C - \varphi_X = \dfrac{q_3}{C_3} \\ \varphi_A - \varphi_X = \dfrac{q_1}{C_1} \end{cases}$$



dal sistema (1) si ricavano le cariche:

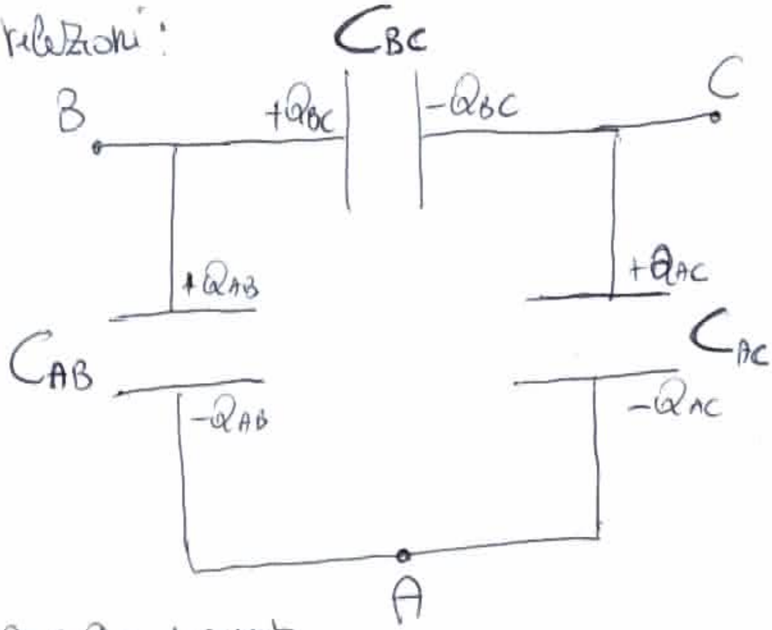
$$q_1 = \frac{\left(C_1C_2 + \frac{C_3}{C_2}\right)\varphi_A - C_1C_2\varphi_B - C_1C_2\varphi_C}{C_1+C_2+C_3}$$

$$q_2 = \frac{C_1C_2\left(1 + \frac{C_3}{C_1}\right)\varphi_B - C_2C_3\varphi_C - C_1C_2\varphi_A}{C_1+C_2+C_3}$$

$$q_3 = \frac{-\frac{C_3}{C_2}\varphi_A - C_2C_3\varphi_B + C_2(C_1+C_3)\varphi_C}{C_1+C_2+C_3}$$

La rete (2) è descritta dalle seguenti relazioni:

$$(2)\quad \begin{cases} \varphi_B - \varphi_C = \dfrac{Q_{BC}}{C_{BC}} \\ \varphi_B - \varphi_A = \dfrac{Q_{AB}}{C_{AB}} \\ \varphi_C - \varphi_A = \dfrac{Q_{AC}}{C_{AC}} \end{cases}$$



Utilizzando le espressioni di q_1, q_2 e q_3 ricavate prima dal sistema (1), si verificano le identità seguenti, esprimendo le differenze di potenziale in (2) come $\varphi_B - \varphi_C = \frac{q_2}{C_2} - \frac{q_3}{C_3}$, $\varphi_B - \varphi_A = \frac{q_2}{C_2} - \frac{q_1}{C_1}$ e $\varphi_C - \varphi_A = \frac{q_3}{C_3} - \frac{q_1}{C_1}$, rispettivamente:

(a) $$\frac{Q_{AB}}{C_{AB}} = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2+C_3}\left(\frac{\varphi_B-\varphi_A}{C_{AB}}\right) = \underbrace{\frac{C_1C_2}{C_1+C_2+C_3}\left(\frac{q_2}{C_2}-\frac{q_1}{C_1}\right)\frac{1}{C_{AB}}}_{(*)} = \underbrace{\varphi_B-\varphi_A}_{(**)}$$

L'identità $(*) = (**)$ è soddisfatta se $C_{AB} = \dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2+C_3}$

(b) $$\frac{Q_{BC}}{C_{BC}} = \frac{C_2C_3}{C_1+C_2+C_3}\,\frac{(\varphi_B-\varphi_C)}{C_{BC}} = \underbrace{\frac{C_2C_3}{C_1+C_2+C_3}\left(\frac{q_2}{C_2}-\frac{q_3}{C_3}\right)\frac{1}{C_{BC}}}_{(*)} = \underbrace{\varphi_B-\varphi_C}_{(**)}$$

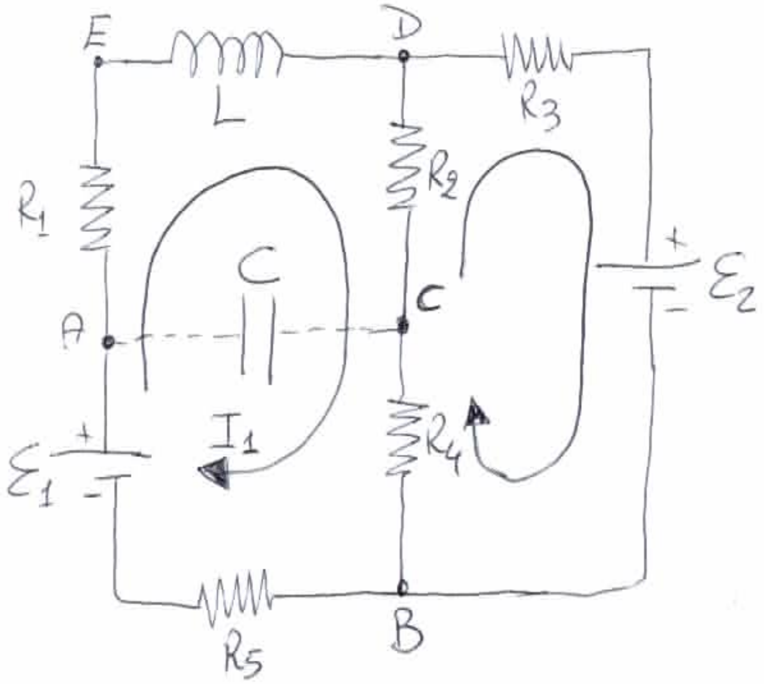
L'identità $(*) = (**)$ è soddisfatta se $C_{BC} = \dfrac{C_2C_3}{C_1+C_2+C_3}$

(c) $$\frac{Q_{AC}}{C_{AC}} = \frac{C_1C_3}{C_1+C_2+C_3}\left(\frac{\varphi_C-\varphi_A}{C_{AC}}\right) = \underbrace{\frac{C_1C_3}{C_1+C_2+C_3}\left(\frac{q_3}{C_3}-\frac{q_1}{C_1}\right)\frac{1}{C_{AC}}}_{(*)} = \underbrace{\varphi_C-\varphi_A}_{(**)}$$

L'identità $(*) = (**)$ è soddisfatta se $C_{AC} = \dfrac{C_1C_3}{C_1+C_2+C_3}$

Es. n° 3

All'equilibrio, il sistema equivalente è (essendo $i_{AC}=0$ e $\Delta\varphi_L=\varphi_E-\varphi_D=0$):



$$\begin{cases} \mathcal{E}_1-(R_1+R_5)I_1-(R_2+R_4)(I_1-I_2)=0 \\ \mathcal{E}_2-R_2 I_2-(R_2+R_4)(I_2-I_1)=0 \end{cases}$$

$\Downarrow$ da cui si ricava:

$$\begin{cases} I_1=\dfrac{\mathcal{E}_2(R_2+R_4)+\mathcal{E}_1(R_2+R_3+R_4)}{(R_2+R_3+R_4)(R_1+R_2+R_4+R_5)-(R_2+R_4)^2} \\ I_2=\dfrac{\cancel{\mathcal{E}_2(R_2+R_4)}(R_1+R_2+R_4+R_5)+\mathcal{E}_1(R_2+R_4)^{\cancel{2}\,1}}{\cancel{(R_2+R_4)}[(R_2+R_3+R_4)(R_1+R_2+R_4+R_5)-(R_2+R_4)^2]}=\dfrac{\mathcal{E}_2(R_1+R_2+R_4+R_5)+\mathcal{E}_1(R_2+R_4)}{(R_2+R_3+R_4)(R_1+R_2+R_4+R_5)-(R_2+R_4)^2} \end{cases}$$

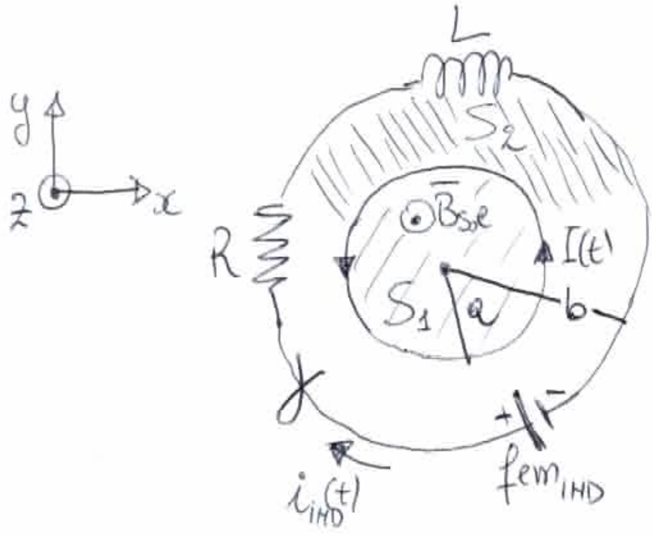
$\varphi_A-\varphi_C=R_1 I_1+R_2(I_1-I_2)\overset{\text{oppure}}{=}\mathcal{E}_1-R_5 I_1-R_4(I_1-I_2)$

Il condensatore ha polarità che dipende dal segno di $\varphi_A-\varphi_C$ e vale $Q=C|\varphi_A-\varphi_C|$

$\varphi_A-\varphi_B=\mathcal{E}_1-R_5 I_1\overset{\text{oppure}}{=}R_1 I_1+(R_2+R_4)(I_1-I_2)$

L'energia immagazzinata nell'induttore vale: $U_L=\frac{1}{2}L I_1^2$

Es. n°4



$$\bar{B}_{sol} = \mu_0 n I(t) \hat{k}$$

La spira esterna γ è equivalente ad un circuito RL in cui fem_{IND} è spiegata dalla legge di Faraday.

fuori dal solenoide

$$\Phi_\gamma(\bar{B}_{sol}) = \int_{S_\gamma = S_1 + S_2} \bar{B}_{sol} \cdot d\bar{S} = \int_{S_1} \mu_0 n I(t) \hat{k} \cdot |d\bar{S}| \hat{k} + \int_{S_2} (\bar{B} = 0) \cdot d\bar{S} =$$

$$= \int_0^b \mu_0 n I(t)\, 2\pi r\, dr = \mu_0 n I(t) \pi a^2$$

$$fem_{IND} = -\frac{d}{dt} \Phi_\gamma(\bar{B}_{sol}) = -\frac{d}{dt}\left[\mu_0 n (I_0 + I_0 t) \pi a^2\right] = -\mu_0 n \pi a^2 I_0$$

è costante e tende a far circolare $i_{IND}(t)$ nel verso indicato in figura.

L'equazione che descrive il circuito equivalente a cui è riconducibile la spira esterna è:

$$fem_{IND} - i_{IND}(t) R - L \frac{d i_{IND}(t)}{dt} = 0$$

, la cui soluzione è:

$$i_{IND}(t) = \frac{fem_{IND}}{R}\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{L/R}\right)\right] = \frac{\mu_0 n \pi a^2 I_0}{R}\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{L/R}\right)\right]$$